

Relaxações Contínuas para o Problema da Amostra de Máxima Entropia Restrito e um Algoritmo de Trajetória Central de Passos Longos para Problemas de Programação Semidefinida

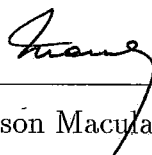
Marcia Helena Costa Fampa

Tese submetida ao corpo docente da Coordenação dos Programas de Pós-Graduação em Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências em Engenharia de Sistemas e Computação.

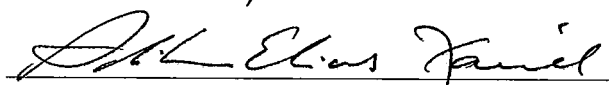
Aprovada por:



Prof. Clóvis C. Gonzaga, D.Sc. (Presidente)




Prof. Nelson Maculan Filho, D.Habil.



Prof. Adilson Elias Xavier, D.Sc.



Prof. Abilio P. de Lucena Filho, Ph.D.



Prof. Alfredo Noel Iussem, Ph.D.

Rio de Janeiro, RJ - Brasil
Novembro de 1996

FAMPA, MARCIA HELENA COSTA

Relaxações Contínuas para o Problema da Amostra de Máxima Entropia Restrito e um Algoritmo de Trajetória Central de Passos Longos para Problemas de Programação Semidefinida [Rio de Janeiro] 1996.

XIII, 113 p., (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 1996)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

A Marcus, Nathalie e Gabriel.
Aos meus pais Luiz e Cristina.

Agradecimentos

Ao Prof. Clóvis C. Gonzaga, pela orientação desta tese e pela contribuição prestada durante todo o seu desenvolvimento. Agradeço-lhe acima de tudo, pela confiança em mim depositada e pela oportunidade de concretizar o projeto de doutorado sanduiche no exterior. Sem a sua indicação, o trabalho na Universidade de Iowa, que tanto enriqueceu esta tese, provavelmente não teria se concretizado.

Ao Prof. Nelson Maculan Filho, pela co-orientação desta tese e pela participação na banca examinadora do exame de qualificação. Agradeço-lhe também o interesse e a ajuda prestada durante todo o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Prof Adilson E. Xavier, pela participação na banca examinadora desta tese e do exame de qualificação. Agradeço-lhe também a colaboração prestada durante o período de defesa do exame de qualificação.

Ao Prof. Kenneth Kortanek, por assentir na minha estadia na Universidade de Iowa através do programa de doutorado sanduiche no exterior. Agradeço-lhe também por, junto a sua esposa Irene Kortanek, fazer-me sentir especialmente bem-vinda à Iowa City.

Ao Prof. Kurt Anstreicher, pela proposta do tema abordado nesta tese e pela excelente orientação do trabalho desenvolvido durante a minha estadia na Universidade de Iowa. Agradeço-lhe também pelo incentivo e interesse demonstrado na finalização desta tese, pela recepção e ajuda quando cheguei em Iowa City, e pela oportunidade de apresentar o trabalho por nós desenvolvido no congresso da SIAM em Victoria, Canadá em maio deste ano.

Ao Prof. Yinyu Ye, pelos conhecimentos transmitidos durante a minha estadia na Universidade de Iowa através do curso oferecido e através do esclarecimento de dúvidas em seu escritório. Agradeço-lhe também pela excelente acomodação no laboratório de otimização da Universidade e pela disponibilidade dos recursos oferecidos.

Ao Prof. Jon Lee, pela proposta de trabalho no tema principal desta dissertação e pelo fornecimento de dados dos problemas testes.

Aos Profs. Abilio Lucena e Alfredo Iusem, por assentirem em compor a banca examinadora.

Aos colegas de escritório Erling Andersen, Xiaojie Xu e Fernanda Raupp, pelo incentivo e companheirismo durante a minha estadia na Universidade de Iowa.

Ao colega Ricardo Duarte, pelas informações prestadas durante a fase final de desenvolvimento da tese.

Aos meus professores na COPPE/UFRJ, pelos conhecimentos transmitidos durante a minha passagem pelo programa de pós-graduação.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte financeiro recebido.

Ao meu esposo e aos meus filhos pelo apoio e solidariedade durante todo o desenvolvimento deste trabalho. Agradeço-lhes também por me incentivarem a optar pelo doutorado sanduiche e por me acompanharem durante toda a minha estadia em Iowa City.

Aos meus pais pelo exemplo de perseverança, pelo incentivo, pela dedicação e pela grande ajuda prestada durante toda a minha pós-graduação, sem os quais a finalização deste trabalho se tornaria ao menos bem mais difícil.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.).

Relaxações Contínuas para o Problema da Amostra de Máxima Entropia Restrito e um Algoritmo de Trajetória Central de Passos Longos para Problemas de Programação Semidefinida

Marcia Helena Costa Fampa
Novembro, 1996

Orientador: Prof. Clóvis C. Gonzaga.

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação.

Nós propomos uma nova relaxação não linear para o Problema da Amostra de Máxima Entropia Restrito – o problema de escolher uma submatriz principal $s \times s$, com determinante máximo, de uma matriz definida positiva $n \times n$, sujeito a restrições lineares. Implementamos o algoritmo de *branch-and-bound* para o problema, utilizando a nova relaxação. A performance nos problemas testes é bastante superior a uma implementação anterior que utiliza uma relaxação baseada em autovalores.

Consideramos também um algoritmo primal de trajetória central de passos longos para programação semidefinida. Nosso principal resultado nesta parte do trabalho é a extensão para programação semidefinida, da elegante análise de convergência quadrática de Roos e Vial para programação linear. Para problemas sujeitos a restrições nas quais matrizes $m \times m$ devem ser semidefinidas positivas, obtemos algoritmos com complexidade de $O(m \ln(t))$ ou $O(\sqrt{m} \ln(t))$ iterações para reduzir o *gap* primal–dual inicial por um fator t , dependendo de como o parâmetro da função barreira é reduzido.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirement for the degree of Doctor of Science (D.Sc.).

Continuous Relaxations for Constrained Maximum-Entropy Sampling Problem and a Long-Step Path Following Algorithm for Semidefinite Programming Problems

Marcia Helena Costa Fampa
November, 1996

Thesis Supervisor: Clóvis C. Gonzaga
Department: Systems Engineering and Computer Science

We suggest a new nonlinear relaxation for the Constrained Maximum Entropy Sampling Problem – the problem of choosing the $s \times s$ principal submatrix with maximal determinant from a given $n \times n$ positive definite matrix, subject to linear constraints. We implement a branch-and-bound algorithm for the problem, using the new relaxation. The performance on test problems is far superior to a previous implementation using an eigenvalue-based relaxation.

We also consider a primal long-step path following algorithm for semidefinite programming. Our main result on this research, is that Roos and Vial's elegant analysis of quadratic convergence, for the linear programming case, extends in a very natural way to semidefinite programming. For problems with a semidefiniteness constraint on an $m \times m$ matrix we obtain algorithms with complexities of $O(m \ln(t))$ or $O(\sqrt{m} \ln(t))$ iterations to reduce the initial primal-dual gap by a factor of t , depending on how the barrier parameter is reduced.

Índice

1	Introdução	1
1.1	Motivação	1
1.2	Descrição dos Capítulos	4
1.3	Notação	5
2	O Problema da Amostra de Máxima Entropia	7
2.1	Introdução	7
2.2	Descrição do Problema	7
2.3	Complexidade	8
2.4	Abordagem Computacional	9
3	Obtenção de Limites Superiores para o Problema da Amostra de Máxima Entropia Restrito (CMESP)	11
3.1	Introdução	11
3.2	Uma Relaxação Baseada em Autovalores	12
3.3	Relaxações contínuas baseadas em Programação Não Linear	12
3.3.1	O Problema de Programação Não Linear (NLP)	13
3.3.2	Multiplicando a Matriz de Covariância C por uma Constante Positiva γ	18
3.3.3	Como Obter o Melhor Limite Possível Baseado na Relaxação NLP	18
3.3.4	Como Escolher D e γ	22
3.3.5	Uma Relaxação Baseada num Problema Complementar à NLP	23
3.3.6	Solução Dual para o Problema NLP e Critérios para fixar Variáveis em zero ou um na Solução de CMESP	24
3.4	Resolvendo a Relaxação	26

3.4.1	O Método de Barreira Logarítmica	26
3.4.2	A Trajetória Central	28
3.4.3	O Algoritmo	29
3.4.4	Aplicação do Algoritmo de Barreira Logarítmica ao Problema NLP	30
4	Obtenção de Limites Inferiores para o Problema da Amostra de Máxima Entropia	32
4.1	Introdução	32
4.2	O Problema Irrestrito	32
4.3	O Problema Restrito	33
5	Implementação do Método de Resolução para o CMESP	35
5.1	Introdução	35
5.2	O Algoritmo de <i>Branch-and-Bound</i>	35
5.3	Relação entre os Limites Obtidos pela Relaxação Não Linear para os Problemas Pais e Filhos na Árvore Enumerativa do <i>Branch-and-Bound</i>	39
5.3.1	A Opção “Identidade”	39
5.3.2	A Opção “Diagonal”	44
5.4	Aspectos da Implementação	48
5.5	Resultados Numéricos	67
6	Um Algoritmo de Trajetória Central de Passos Longos para o Problema de Programação Semidefinida	72
6.1	Introdução	72
6.2	O Problema de Programação Semidefinida	74
6.3	A Trajetória Central	76
6.4	Propriedades de Pontos Próximos da Trajetória Central	77
6.5	Complexidade de um Algoritmo de Passos Longos	84
6.6	Viabilidade e Solução Inicial para o Problema de Programação Semidefinida	88
6.6.1	Viabilidade	88
6.6.2	Solução Inicial	89
7	Implementação do Algoritmo de Trajetória Central de Passos Longos para	

o Problema de Programação Semidefinida	91
7.1 Introdução	91
7.2 Aspectos da Implementação	92
7.3 Resultados Numéricos	93
8 Conclusão	103
Referências Bibliográficas	106

Lista de Figuras

5.1	Diagrama do Algoritmo de <i>Branch-and-Bound</i>	38
5.2	Gaps entre soluções ótimas inteiras e limites gerados pelo método “Identidade” e pelo método dos autovalores para os problemas 52/16/s	56
5.3	Gaps entre soluções ótimas inteiras e limites gerados pelo método “Diagonal” e pelo método dos autovalores para os problemas 52/16/s	56
5.4	Gaps entre soluções ótimas inteiras e limites gerados pelo método “Traço Mínimo” e pelo método dos autovalores para os problemas 52/16/s	57
5.5	Gaps entre soluções ótimas inteiras e limites gerados pelo método “Identidade”, utilizando-se relaxações originais e complementares, e pelo método dos autovalores para os problemas 52/16/s	57
5.6	Gaps entre soluções ótimas inteiras e limites gerados pelo método “Diagonal”, utilizando-se relaxações originais e complementares, e pelo método dos autovalores para os problemas 52/16/s	58
5.7	Gaps entre soluções ótimas inteiras e limites gerados pelo método “Traço Mínimo”, utilizando-se relaxações originais e complementares, e pelo método dos autovalores para os problemas 52/16/s	58
5.8	Limites obtidos estabelecendo-se $\gamma = (1 - \alpha)1/d_{max} + (\alpha)1/d_{min}$ para os problemas 52/16/s	59
5.9	Limites obtidos estabelecendo-se $\gamma = (1 - \alpha)1/d_{max} + (\alpha)1/d_{min}$ para os problemas 63/27/s	59
5.10	Limites obtidos estabelecendo-se $\gamma = (1 - \alpha)1/d_{max} + (\alpha)1/d_{min}$ para os problemas 36/27/s	60
5.11	Gaps antes e depois de fixar-se variáveis nos problemas 52/16/s	67
7.1	Aplicação do algoritmo de passos longos ao problema de Traço Mínimo com $n = 36$ e $\epsilon = 10^{-6}$ para diferentes valores de σ	101

Lista de Tabelas

5.1	Limites obtidos para os problemas 52/16/s	50
5.2	Tempo em <i>wall seconds</i> para obtenção dos limites para os problemas 52/16/s	50
5.3	Limites obtidos para os problemas 63/27/s	51
5.4	Tempo em <i>wall seconds</i> para obtenção dos limites para os problemas 63/27/s	52
5.5	Limites obtidos para os problemas 36/27/s	53
5.6	Tempo em <i>wall seconds</i> para obtenção dos limites para os problemas 36/27/s	54
5.7	Tempo de execução em <i>wall seconds</i> com e sem busca linear (BL) para os problemas 52/16/s	63
5.8	Tempo de execução em <i>wall seconds</i> com e sem busca linear (BL) para os problemas 63/27/s	64
5.9	Tempo de execução em <i>wall seconds</i> com e sem busca linear (BL) para os problemas 36/27/s	65
5.10	Fixando variáveis nos problemas 52/16/s	66
5.11	Número de limites calculados na resolução de 50 problemas	68
5.12	Tempo em <i>wall seconds</i> para solucionar-se 50 problemas	69
5.13	Número de limites calculados - Fixando variáveis - na resolução de 50 problemas	71
5.14	Tempo em <i>wall seconds</i> - Fixando variáveis - para solucionar-se 50 problemas	71
7.1	Resultados numéricos para o problema de Traço Mínimo com $n = 36$ e $\epsilon = 10^{-6}$	95
7.2	Resultados numéricos para o problema de Traço Mínimo com $n = 36$ e $\epsilon = 10^{-8}$	96
7.3	Resultados numéricos para o problema de Traço Mínimo com $n = 52$ e $\epsilon = 10^{-6}$	97
7.4	Resultados numéricos para o problema de Traço Mínimo com $n = 52$ e $\epsilon = 10^{-8}$	98
7.5	Resultados numéricos para o problema de Traço Mínimo com $n = 63$ e $\epsilon = 10^{-6}$	99
7.6	Resultados numéricos para o problema de Traço Mínimo com $n = 63$ e $\epsilon = 10^{-8}$	100

7.7	Resultados finais para o problema de Traço Mínimo com $\epsilon = 10^{-8}$	101
7.8	Resultados finais para o problema de Máximo Autovalor com $\epsilon = 10^{-8}$	102

