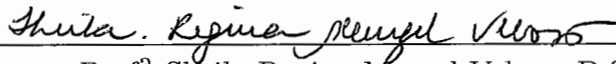


LÓGICA MODAL DA BIFURCAÇÃO

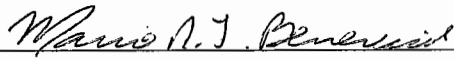
Renata Pereira de Freitas

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

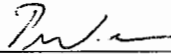
Aprovada por:



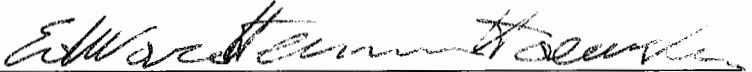
Prof<sup>a</sup> Sheila Regina Murgel Veloso, D.Sc.



Prof. Mario Roberto Folhadela Benevides, Ph.D.



Prof. Paulo Augusto Silva Veloso, Ph.D.




Prof. Edward Hermann Haeusler, D.Sc.



Prof. Marcelo Finger, Ph.D.

  
Prof. Marcelo Fabian Erias, Ph.D.

  
Prof. Jean-Yves Béziau, Ph.D.

DE FREITAS, RENATA PEREIRA

Lógica Modal da Bifurcação [Rio de Janeiro]  
2002

VIII, 112 p. 29,7-cm (COPPE/UFRJ, D.Sc.,  
Engenharia de Sistemas e Computação, 2002)

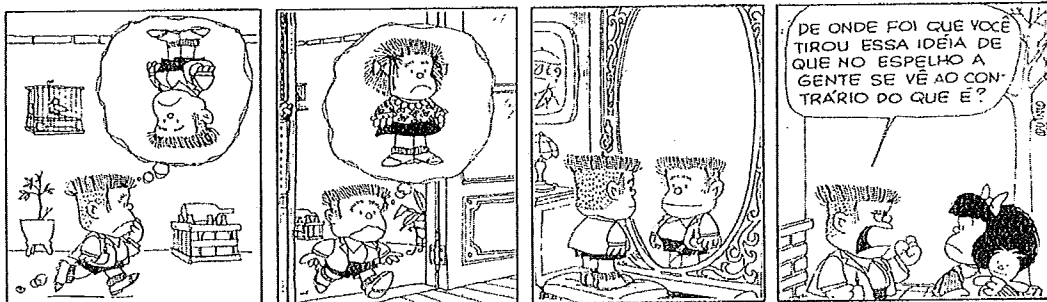
Tese – Universidade Federal do Rio de Ja-  
neiro, COPPE

- 1 - Álgebra Relacional
- 2 - Operador de “Fork”
- 3 - Lógica Modal
- 4 - Lógica de Setas
- 5 - Lógica Híbrida

I. COPPE/UFRJ    II. Título (série)

Para minha mãe e minhas filhas.

Parcialmente financiado pelo CNPq.



Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

## LÓGICA MODAL DA BIFURCAÇÃO

Renata Pereira de Freitas

Dezembro/2002

Orientadores : Sheila Regina Murgel Veloso  
Mario Roberto Folhadela Benevides  
Programa : Engenharia de Sistemas e Computação

Álgebras booleanas com operadores possuem uma contrapartida modal natural. Um exemplo bastante estudado é a Lógica de Setas, uma lógica modal associada à Álgebra Relacional. Este vínculo entre o formalismo algébrico e sua lógica modal é forte o suficiente para permitir que problemas algébricos sejam reformulados na linguagem modal. Assim, o problema da axiomatização da classe das álgebras relacionais representáveis ganha sua formulação modal como o problema da axiomatização do quadrado. Neste trabalho apresentamos a Lógica Modal da Bifurcação, i.e., a contraparte modal da Álgebra com Operador de Bifurcação, seguindo os passos percorridos para a definição da Lógica de Setas a partir da Álgebra Relacional. Mostramos que, estendendo a Lógica de Setas para obter a Lógica de Setas com Bifurcação, da mesma forma como a Álgebra Relacional é estendida para a obtenção da Álgebra com Operador de Bifurcação, temos uma axiomatização das estruturas relacionais (com bifurcação) quadradas. Mostramos também que a Lógica de Setas com Bifurcação é equipolente em meios de expressão à Lógica de Primeira Ordem. Apresentamos ainda outra extensão da Lógica de Setas, a Lógica de Setas Híbrida Bidimensional, que tem o poder de expressão da Lógica de Primeira Ordem e no qual, portanto, também é possível axiomatizar o quadrado. Este sistema, no entanto, não é tão vantajoso quanto a Lógica de Setas com Bifurcação, pois não tem uma contraparte algébrica conhecida.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

FORK MODAL LOGIC

Renata Pereira de Freitas

December/2002

Thesis Supervisors : Sheila Regina Murgel Veloso  
Mario Roberto Folhadela Benevides  
Department : Computing and Systems Engineering

Boolean algebras with operators have a natural modal counterpart. A widely studied example is Arrow Logic, the modal logic associated to Relation Algebra. This connection between the algebraic formalism and its modal logic is close enough to allow algebraic problems to be formulated in the modal language. In this way the problem of axiomatizing Representable Relation Algebras has its modal formulation as the problem of axiomatizing square frames. In this work we present the fork modal logic, i.e., the modal counterpart of Fork Algebra, following the steps of the definition of Arrow Logic from Relation Algebra. We show that, extending Arrow Logic to obtain Fork Arrow Logic in the same way Relation Algebra is extended to Fork Algebra, we get an axiomatization of the fork square frames. Besides we show that Fork Arrow Logic is equipollent in means of expression with First-Order Logic. We present another extension of Arrow Logic, called Two-dimensional Hybrid Arrow Logic, that has the expressive power of First-Order Logic and, consequently, where it is possible to axiomatize the square. This system, however, is not as good as Fork Arrow Logic, since it does not have a known algebraic counterpart.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Lógica de Setas</b>	<b>8</b>
1.1 Álgebra Relacional . . . . .	8
1.2 Lógica de Setas . . . . .	19
1.2.1 Linguagem . . . . .	21
1.2.2 Semântica . . . . .	22
1.2.3 Axiomática . . . . .	25
1.2.4 Completude . . . . .	27
1.2.5 Semântica bidimensional . . . . .	31
1.2.6 Quadrado . . . . .	32
<b>2 Lógica de Setas com Operador Diferença</b>	<b>36</b>
2.1 Axiomática . . . . .	36
2.2 Completude . . . . .	41
2.3 Expressividade . . . . .	47
<b>3 Lógica de Setas Híbrida</b>	<b>50</b>
3.1 Lógica de Setas Híbrida . . . . .	53
3.2 Axiomática para LSH . . . . .	56
3.3 Completude para LSH . . . . .	59
3.4 Lógica de Setas Híbrida Bidimensional . . . . .	65
3.5 Axiomática para LSH2 . . . . .	69
3.6 Completude de LSH2 . . . . .	74
3.7 Expressividade . . . . .	78

<b>4</b>	<b>Lógica de Setas com Bifurcação</b>	<b>80</b>
4.1	Álgebras com Operador de Bifurcação . . . . .	80
4.1.1	Os problemas da finitização e da algebrização . . . . .	81
4.1.2	Álgebras com Operador de Bifurcação . . . . .	83
4.2	Lógica de Setas com Bifurcação . . . . .	87
4.3	Quadrado em LSB . . . . .	93
4.4	Expressividade . . . . .	95
	<b>Conclusão</b>	<b>101</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>104</b>

# Introdução

A Lógica Modal da Bifurcação (LSB) é a versão modal das álgebras com operador de bifurcação [HFBV97], assim como a Lógica de Setas (LS) [MV97] é a lógica modal associada às álgebras relacionais [Tar41].

LSB foi proposta por M. Benevides e P.A.S. Veloso em [BV99]. Neste trabalho, apresentamos uma prova de completude para o sistema. Mostramos que, em LSB, é possível axiomatizar a classe das estruturas com bifurcação quadradas e apresentamos uma tradução de LSB para a Lógica de Primeira Ordem (LPO), provando que os dois formalismos são equipolentes em meio de expressão.

Álgebras com operador de bifurcação apareceram em ciência da computação como um formalismo de especificação relacional para programas não-determinísticos [HV91]. Classes de álgebras com operador de bifurcação próprias e abstratas foram utilizadas para a especificação, assim como para a derivação de programas a partir de especificações, além do desenvolvimento de programas, no cálculo relacional [HV91, HBS93, FAN93, BHSV93, FA94, FG95, BFHM96].

Um cálculo de programação pode ser visto como um conjunto de regras para a obtenção de programas a partir de especificações de uma maneira sistemática. Uma abordagem muito interessante e popular é aquela baseada em linguagens de programação funcionais [Bir90, Fri02]. Nestes formalismos funcionais, especificações e programas são escritos na mesma linguagem e regras de transformação são escritas em uma metalinguagem adequada, freqüentemente *ad-hoc*. Uma deficiência dos formalismos funcionais, no entanto, é a pouca expressividade de suas linguagens de especificação, limitadas a expressões funcionais. Como expressões funcionais podem ser vistas como programas (provavelmente programas ineficientes), para especificar um problema em uma linguagem funcional, precisamos ter, de antemão, pelo menos

um algoritmo que resolva o problema.

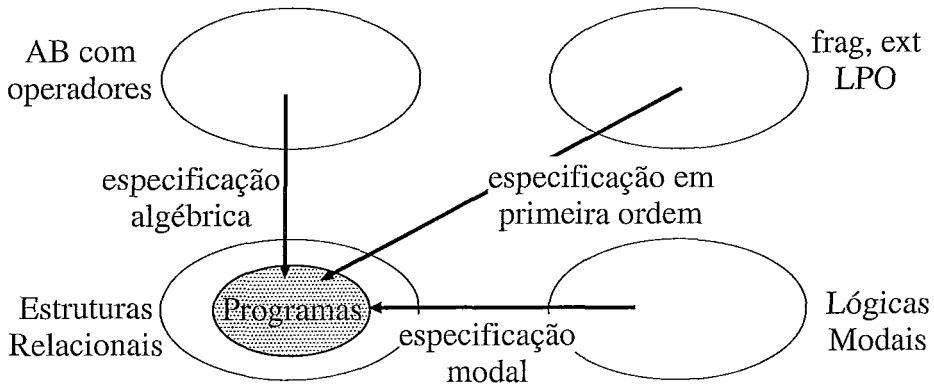
Por outro lado, cálculos relacionais possuem uma linguagem de especificação mais expressiva (devido à presença do reverso e do complementar de relações), permitindo especificações mais declarativas. No entanto, a escolha de um formalismo relacional não garante um cálculo totalmente adequado. Estes formalismos, como o proposto em [Mol91], por exemplo, apesar de terem uma linguagem de especificação com maior poder de expressão, também possuem certas lacunas metodológicas. O processo de derivação de programas deveria utilizar apenas propriedades abstratas das relações, onde as variáveis para indivíduos não ocorrem. No entanto, como não existe um conjunto de regras abstratas completo que capture toda a informação (semântica das relações), o processo de derivação de programas fica alternando entre a utilização de propriedades abstratas e propriedades concretas das relações.

Ao utilizar álgebras com operador de bifurcação como um cálculo de programação [FA94, FG95, HV91], temos o poder de expressão de LPO. Além disso, os axiomas das álgebras com operador de bifurcação abstratas constituem uma caracterização completa das álgebras com operador de bifurcação próprias [Fri02]. Podemos, então, utilizar LPO como linguagem de especificação e certas equações na álgebra com operador de bifurcação como programas. É raciocinar sobre propriedades de especificações e de programas dentro da teoria. A equivalência equacional entre as teorias das álgebras com operador de bifurcação abstratas e das álgebras com operador de bifurcação próprias permite enunciar estratégias e heurísticas para o processo de construção de programas como fórmulas de primeira ordem sobre relações [Fri02].

Assim, o cálculo de programação baseado em álgebras com operador de bifurcação possui vantagens claras sobre muitos outros cálculos funcionais e relacionais. A axiomatização finita das álgebras com operador de bifurcação permite uma caracterização finita do cálculo, que simplifica a manipulação dos programas. Além disso, especificações de problemas possuem uma representação natural nas álgebras com operador de bifurcação. A possibilidade de interpretar teorias de primeira ordem como teorias equacionais nas álgebras com operador de bifurcação dá a estas o poder de expressão de LPO.

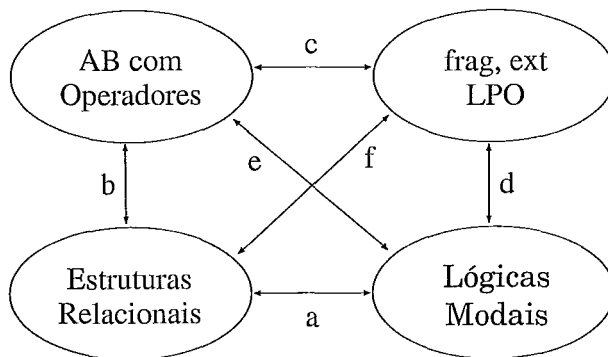
A álgebra com operador de bifurcação se apresenta, portanto, como um formalismo de especificação e derivação de programas alternativo a LPO. Neste trabalho, desenvolvemos LSB, uma terceira alternativa para a especificação e derivação de programas, agora no contexto modal (Figura 1).

Figura 1:



Esta pesquisa se coloca em um contexto mais geral, segundo o panorama esboçado no seguinte diagrama, adaptação do diagrama (Figura 2) proposto por C. Brink [Bri93] (cf. [Ven96]).

Figura 2:



Estruturas relacionais, lógicas modais e álgebras booleanas com operadores estão estreitamente conectadas. E entre estes e LPO (e seus fragmentos e extensões), certas conexões também podem ser estudadas.

O diagrama (Figura 2) apresenta algumas conexões entre Álgebra Booleana com Operadores, lógicas modais, estruturas relacionais e (fragmentos e extensões de) LPO. A conexão (a) entre lógicas modais e estruturas relacionais é estabelecida pela semântica de mundos possíveis, desde o trabalho de S. Kripke [Kri59]. A dualidade (b) entre Álgebras Booleanas com Operadores e estruturas relacionais foi investigada, inicialmente, por B. Jónsson e A. Tarski [JT51, JT52]. A relação entre álgebras e LPO é estudada no domínio da lógica algébrica e fornece a seta (c) do diagrama. A seta (d) é dada pela teoria da correspondência [vBen84]. A seta (e) representa a semântica algébrica da lógica modal [Lem66a, Lem66b]. A seta (f) corresponde à teoria de modelos.

É importante observar que as setas mostradas no diagrama não são funtores, embora cada nó do diagrama possa ser considerado como uma categoria. O diagrama não possui propriedades importantes como, por exemplo, a comutatividade. De fato, o entendimento das setas é dado pelas relações pontuais entre elementos pertencentes a cada um dos quatro domínios do diagrama. Assim, o entendimento global do diagrama está longe de ser alcançado. Acreditamos que o desenvolvimento de LSB, acrescentando um ponto no domínio modal, espelhado em cada um dos outros domínios, contribuirá para melhorar o entendimento do diagrama como um todo, assim como o desenvolvimento de LS e sua relação com AR contribuirá. De fato, utilizamos algumas das conexões no diagrama para obter LSB da mesma forma como LS foi obtida de AR. E o método utilizado na prova de completude de LSB que apresentamos é uma instância de um teorema mais geral sobre a axiomatização de certas classes de lógicas modais.

Desde a década de 70, a lógica modal era considerada a lógica dos conceitos intencionais, tais como necessidade, possibilidade e crença, motivados principalmente por considerações filosóficas. A receita para definir uma lógica modal era dada como segue. 1) Escolher os conceitos intencionais. 2) Expandir a linguagem da lógica proposicional clássica pelo acréscimo de novos conectivos modais. 3) Construir uma semântica de Kripke para a linguagem construída, escolhendo uma noção apropriada de estrutura modal, i.e., um conjunto de mundos juntamente com relações de acessibilidade entre mundos. 4) Escolher axiomas considerados suficientes para capturar

as modalidades nas quais se está interessado. 5) Provar que a axiomática escolhida é correta e completa com relação à semântica desejada. Muita pesquisa foi conduzida nesta abordagem [Seg71].

Hoje em dia, estruturas modais são consideradas como estruturas relacionais e lógicas modais são linguagens formais para raciocinar sobre tais estruturas. A nova receita para definir uma lógica modal é a seguinte. 1) Escolha sua estrutura (relacional) ou sua classe de estruturas. 2) Tome uma linguagem modal cujas letras proposicionais e modalidades são usadas, respectivamente, para falar de subconjuntos e relações na estrutura. Os passos 3 a 5 são essencialmente como na receita antiga. Assim, poderia-se pensar que não nos afastamos da receita original, já que o resultado final é o mesmo. Mas não é esse o caso. Pesquisadores, como S.K. Thomason, J. van Benthem e H. Sahlqvist, baseados nesta nova abordagem, provaram que a lógica modal é, de fato, um fragmento da lógica de segunda ordem bastante rico. Neste sentido, seguindo a receita, obtém-se um formalismo com algumas metapropriedades interessantes e que pode ser utilizado para especificação formal, como uma alternativa LPO. Uma revisão geral desta visão da lógica modal encontra-se em [BRV01].

Seguindo os passos de van Benthem, Y. Venema [Ven91] aplicou a nova receita a uma importante classe de estruturas, chamadas estruturas de setas, definindo o que é chamado Lógica de Setas (LS), a lógica modal básica de setas. Neste caso, um mundo típico é um par  $(a, b)$  de elementos, que pode ser considerado uma seta com cabeça  $a$  e cauda  $b$ , e as relações entre pares são as usuais composição e reversão de setas. Setas são motivadas, entre outras coisas, por serem a entrada/saída de estados de transição. Composição, neste contexto, significa seqüencialização de transições. Estruturas de setas possuem uma conexão direta com álgebras relacionais, fornecendo uma ponte entre lógica modal e lógica algébrica [MV97].

Como existe uma relação estreita entre AR e LS, o fato de AR não ser representável na classe das álgebras relacionais de conjuntos acarreta que LS não axiomatiza a classe das estruturas relacionais quadradas (estruturas cujo domínio é um produto cartesiano) e o fato de AR ter o poder de expressão de um fragmento de LPO com três variáveis acarreta que LS também é equipolente, em meios de

expressão, a este fragmento. Assim, o problema de estender AR para alcançar a representabilidade e o poder de expressão de LPO é traduzido para o contexto modal como o problema de estender LS tendo em vista o poder de expressão de LPO e a possibilidade de axiomatizar a classe dos quadrados.

No Capítulo 1, apresentamos LS como a lógica modal de AR. Enunciamos dois problemas-chave no estudo de AR: o problema da representação (estender AR a fim de axiomatizar a classe das álgebras relacionais representáveis) e o problema da expressividade (estender AR a fim de alcançar o poder de expressão de LPO). Explicitamos a conexão entre AR e LS. Reenunciamos os problemas-chave de AR como questões em LS. No contexto modal, o problema da representação é reformulado como o problema da axiomatização do quadrado. No Capítulo 2, apresentamos uma extensão de LS, devida a Y. Venema, a Lógica de Setas com Operador Diferença. Este sistema axiomatiza o quadrado com um aparato dedutivo não-ortodoxo, perdendo, com isso, a conexão com o formalismo algébrico. No Capítulo 3, apresentamos uma extensão híbrida de LS, a Lógica de Setas Híbrida Bidimensional. Este sistema axiomatiza o quadrado com um aparato dedutivo não-ortodoxo e tem o poder de expressão de LPO. No Capítulo 4, apresentamos LSB e mostramos que este sistema axiomatiza os quadrados infinitos (e triviais) com um aparato dedutivo ortodoxo e tem o poder de expressão de LPO. Finalmente, apresentamos as conclusões e perspectivas de desenvolvimento do trabalho.

## Sistemas Lógicos

Antes de passarmos ao Capítulo 1, vamos apresentar, de maneira sucinta, as definições e resultados que estamos pressupondo.

Um *sistema lógico* é um par  $\langle \mathcal{L}, \text{cn} \rangle$ , onde  $\mathcal{L}$  é uma *linguagem* e  $\text{cn}$  uma *relação de conseqüência*. Uma *linguagem* é um conjunto cujos elementos são chamados *fórmulas* dessa linguagem. Uma *relação de conseqüência* sobre uma linguagem é uma relação binária entre conjuntos de fórmulas e fórmulas dessa linguagem.

Uma relação de conseqüência pode ser definida, sintaticamente, a partir de um cálculo dedutivo ou, semanticamente, a partir das noções de estrutura e satisfabilidade. No primeiro caso, é usual representar a relação de conseqüência por  $\vdash$  e, no segundo, por  $\models$ . Dado um conjunto  $\Gamma$  de fórmulas de um sistema lógico, podemos considerar o conjunto das conseqüências de  $\Gamma$ , denotado por  $\text{Cn}(\Gamma)$ . Assim, dois sistemas lógicos são iguais se possuem a mesma linguagem e a mesma relação de conseqüência (seja ela definida sintaticamente ou semanticamente). Quando um sistema lógico é definido tanto sintaticamente quanto semanticamente, a prova de que as duas definições determinam o mesmo sistema lógico é chamada *prova da completude/corretude* do sistema. Neste texto, todos os sistemas lógicos serão apresentados tanto semanticamente quanto sintaticamente e a prova de completude/corretude para cada sistema será a demonstração de que a relação de conseqüência definida a partir das noções de estrutura e satisfabilidade e aquela definida por um aparato dedutivo coincidem.

Um sistema lógico  $\langle \mathcal{L}_2, \text{cn}_2 \rangle$  é uma *extensão* de um sistema lógico  $\langle \mathcal{L}_1, \text{cn}_1 \rangle$  quando  $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2$  e, para qualquer conjunto  $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq \mathcal{L}_1$ , se  $\Gamma \text{cn}_1 \alpha$ , então  $\Gamma \text{cn}_2 \alpha$ . A extensão é *equipolente* se:

- i) (*equipolência em meios de expressão*) para qualquer fórmula  $\beta \in \mathcal{L}_2$ , existe uma fórmula  $\alpha \in \mathcal{L}_1$  de modo que  $\alpha \text{cn}_2 \beta$ .
- ii) (*equipolência em meios de prova*) para quaisquer fórmulas  $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_1$  se  $\alpha \text{cn}_2 \beta$ , então  $\alpha \text{cn}_1 \beta$ .

Dizemos que um sistema lógico *axiomatiza* uma classe de estruturas quando, neste sistema, o conjunto das conseqüências do conjunto vazio é igual ao conjunto das fórmulas que são satisfeitas em todas as estruturas da classe.

# Capítulo 1

## Lógica de Setas

Neste capítulo fazemos uma descrição da teoria da Álgebra Relacional e da Lógica de Setas. Nosso objetivo é apresentar alguns elementos que serão úteis para a compreensão dos capítulos seguintes. Uma abordagem aprofundada pode ser encontrada nos livros [TG87] e [MV97], que contêm todos os resultados aqui apresentados.

Na Seção 1.1, fazemos uma revisão dos principais conceitos e resultados de Álgebra Booleana e Álgebra Relacional. Na Seção 1.2, apresentamos a Lógica de Setas, um formalismo modal relacionado estreitamente à Álgebra Relacional e que, por isso, possui características interessantes, porém sérias limitações, quando visto como um formalismo de especificação. Nos outros capítulos, apresentamos extensões da Lógica de Setas em que algumas destas limitações são superadas.

### 1.1 Álgebra Relacional

#### Álgebra Booleana

A classe das álgebras relacionais foi introduzida por A. Tarski, em 1941 [Tar41], como uma candidata a desempenhar, para o cálculo das relações binárias, o mesmo papel que as álgebras booleanas desempenham para o cálculo dos conjuntos. Para um bom entendimento das questões relacionadas ao estudo das álgebras relacionais, devemos compreender em que sentido as álgebras booleanas são a contraparte algébrica do *cálculo dos conjuntos*.

O cálculo dos conjuntos lida com as propriedades das operações de união, interseção e complementação de conjuntos. Dado um conjunto  $\mathcal{U}$ , denotamos por  $2^{\mathcal{U}}$  o

conjunto de todos os subconjuntos de  $\mathcal{U}$ . Como a união, a interseção e a complementação (com relação a  $\mathcal{U}$ ) de elementos de  $2^{\mathcal{U}}$  é um elemento de  $2^{\mathcal{U}}$ , é natural que associemos a álgebra  $\langle 2^{\mathcal{U}}, \cup, \cap, -, \emptyset, \mathcal{U} \rangle$ , a cada conjunto  $\mathcal{U}$ . De maneira geral, a cada conjunto  $\mathcal{U}$  podemos associar certas álgebras cujos domínios são subconjuntos de  $2^{\mathcal{U}}$ , fechados sob as operações binárias  $\cup$  e  $\cap$ , de *união* e *interseção*, sob a operação unária  $\mathcal{U}-$ , de *diferença com relação a  $\mathcal{U}$* , e contendo como elementos distinguidos o conjunto  $\emptyset$  e o próprio  $\mathcal{U}$ .

**Definição** Um *campo de conjuntos*, sobre um conjunto  $\mathcal{U}$ , é uma família não vazia  $F$  de subconjuntos de  $\mathcal{U}$  que é fechada sob união, interseção e diferença com relação a  $\mathcal{U}$ , e que contém  $\emptyset$  e  $\mathcal{U}$ .

Uma *álgebra de conjuntos* é uma álgebra  $\langle C, \cup, \cap, -, \emptyset, \mathcal{U} \rangle$ , onde  $C$  é um campo de conjuntos sobre um conjunto  $\mathcal{U}$ . Denotamos por AC a classe de todas as álgebras de conjuntos.

Uma álgebra de conjuntos é *plena* se  $C = 2^{\mathcal{U}}$ , para algum conjunto  $\mathcal{U}$ . Denotamos por ACP a classe de todas as álgebras de conjuntos plenas.

É sabido que as seguintes identidades são verdadeiras, dados quaisquer conjuntos  $a$ ,  $b$  e  $c$ :

$$\begin{array}{ll}
 (a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c) & (a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c) \\
 a \cup b = b \cup a & a \cap b = b \cap a \\
 a \cup a = a & a \cap a = a \\
 a \cup \emptyset = a & a \cap \mathcal{U} = a \\
 a \cup \mathcal{U} = \mathcal{U} & a \cap \emptyset = \emptyset \\
 a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c) & a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c) \\
 \bar{\bar{a}} = a & \\
 a \cup \bar{a} = \mathcal{U} & a \cap \bar{a} = \emptyset \\
 \overline{a \cup b} = \bar{a} \cap \bar{b} & \overline{a \cap b} = \bar{a} \cup \bar{b} \\
 \bar{\emptyset} = \mathcal{U} & \bar{\mathcal{U}} = \emptyset
 \end{array}$$

Em particular, elas são verdadeiras em todas as álgebras de conjuntos.

A partir das identidades acima, podemos elaborar duas definições e levantar dois problemas que motivam o estudo das álgebras booleanas.

Em primeiro lugar, obviamente, nem todas as identidades que são verdadeiras em todas as álgebras de conjuntos foram listadas. Por outro lado, algumas destas identidades decorrem das outras pelos mecanismos usuais de derivação a partir de identidades [Hun33].

**Definição** O *cálculo dos conjuntos* é o conjunto de todas as identidades entre termos, obtidas da maneira usual, a partir das variáveis  $x, y, z$  e das constantes  $\emptyset$  e  $\mathcal{U}$ , por aplicação dos operadores  $\cup$ ,  $\cap$  e  $-$ , que são verdadeiras em todas as álgebras de conjuntos.

Temos, então, o seguinte problema:

**PROBLEMA DA AXIOMATIZAÇÃO DAS ÁLGEBRAS DE CONJUNTOS** Determinar um conjunto finito  $Ax$  de identidades, de modo que todas as identidades do cálculo dos conjuntos sejam deriváveis a partir de  $Ax$  pelos mecanismos usuais de derivação a partir de identidades [Hen77].

Neste contexto, o conjunto das identidades listadas anteriormente deve ser visto como um candidato a um tal conjunto  $Ax$  de axiomas. Desta forma, o Problema da Axiomatização pode ser visto como um problema sobre o “poder de dedução” destas identidades.

O segundo problema diz respeito ao “poder de expressão” das identidades acima, pois questiona em que medida elas são capazes de caracterizar as álgebras de conjuntos. Podemos descrevê-lo de maneira adequada observando o seguinte. De um lado, temos uma classe de álgebras bastante *naturais*, as álgebras de conjuntos, e do outro, algumas identidades que são verdadeiras em todas as álgebras desta classe. A questão é saber se existem outras álgebras, diferentes das álgebras de conjuntos, nas quais todas essas identidades também são verdadeiras. Colocada desta forma, a questão tem uma solução trivial pois, se tomarmos uma álgebra  $A$  isomorfa a uma álgebra de conjuntos, todas as identidades consideradas também serão verdadeiras em  $A$ . Este fato leva a considerar que, para que possamos resolver este problema

adequadamente, devemos “algebrizá-lo”. Isto é feito do seguinte modo:

**Definição** Uma *álgebra de tipo booleano* é uma álgebra  $\langle A, +, \cdot, -, 0, 1 \rangle$ , onde  $+$  e  $\cdot$  são operações binárias em  $A$ ,  $-$  é uma operação unária em  $A$  e  $0, 1 \in A$ . Uma *álgebra booleana* é uma álgebra de tipo booleano  $\langle A, +, \cdot, -, 0, 1 \rangle$ , que satisfaz as seguintes identidades, para quaisquer  $x, y, z \in A$ :

$$\begin{array}{ll}
 (x + y) + z = x + (y + z) & (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \\
 x + y = y + x & x \cdot y = y \cdot x \\
 x + x = x & x \cdot x = x \\
 x + 0 = x & x \cdot 1 = x \\
 x + 1 = 1 & x \cdot 0 = 0 \\
 x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z) & x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \\
 -(-x) = x & \\
 x + (-x) = 1 & x \cdot (-x) = 0 \\
 -(x + y) = (-x) \cdot (-y) & -(x \cdot y) = (-x) + (-y) \\
 -0 = 1 & -1 = 0
 \end{array}$$

Dada uma álgebra booleana  $\langle A, +, \cdot, -, 0, 1 \rangle$ ,  $+$  é chamada a *adição* de  $A$ ,  $\cdot$  o *produto* de  $A$ ,  $-$  a *complementação* de  $A$ ,  $0$  o elemento *mínimo* de  $A$  e  $1$  o elemento *máximo* de  $A$ . Denotamos por  $\text{AB}$  a classe de todas as álgebras booleanas.

Como estruturas isomorfas satisfazem as mesmas identidades, a definição de álgebra booleana é uma abstração do conceito de álgebra de conjuntos e pretende tanto ser uma caracterização — por meio de um conjunto finito de identidades — das álgebras de conjuntos, quanto uma solução do Problema da Axiomatização. Na verdade, se as identidades acima caracterizam as álgebras booleanas, elas também são uma axiomatização destas álgebras (cf. [Tar41]). Esta observação simples mostra o papel de destaque que foi dado ao seguinte problema no estudo das álgebras booleanas.

**PROBLEMA DA REPRESENTAÇÃO PARA AS ÁLGEBRAS BOOLEANAS** Determinar se toda álgebra booleana é isomorfa a uma álgebra de conjuntos.

Como foi mostrado por M.H. Stone em uma série de artigos, reorganizados em [Sto36, Sto37], o problema da representação para álgebras booleanas tem solução positiva. A idéia básica da prova é a seguinte. Em primeiro lugar, as álgebras de conjuntos são, por definição, subálgebras das álgebras de conjuntos plenas. Em segundo, Tarski [Tar56] forneceu uma caracterização das álgebras de conjuntos plenas como álgebras booleanas que satisfazem a certas condições especiais. Estas condições são expressas de maneira adequada na linguagem dos conjuntos ordenados.

Se  $A$  for uma álgebra booleana e  $a, b, c \in A$ , então  $a + b = b$  se, e somente se  $a \cdot b = a$ . Definimos, então,  $a \leq b$  se  $a + b = b$  (ou, de maneira equivalente, se  $a \cdot b = a$ ) e dizemos que  $a$  é um *subconjunto* de  $b$ . Decorre da definição que  $\leq$  é uma relação de ordem parcial em  $A$ , com primeiro elemento 0 e último elemento 1. Também temos que  $a + b$  é o supremo e  $a \cdot b$  é o ínfimo, com relação a  $\leq$ , de  $a$  e  $b$  em  $A$ . Um *átomo* de uma álgebra booleana é um elemento não nulo minimal. Uma álgebra booleana é *atômica* se cada elemento não nulo tem um átomo como sub-elemento. Uma álgebra booleana é *completa* se possui supremos e ínfimos arbitrários.

**Teorema 1.1.1 (Tarski, 1935)** *Uma álgebra booleana é isomorfa a uma álgebra de conjuntos plena se, e somente se, é atômica e completa.*

Finalmente, podemos provar que as álgebras booleanas são suficientemente ricas em estrutura para que possam ser imersas em álgebras satisfazendo as condições especiais enunciadas no Teorema 1.1.1.

Como veremos a seguir, álgebras relacionais são álgebras booleanas munidas de operações adicionais. Do ponto de vista do estudo geral da representação de álgebras booleanas com operações adicionais, as álgebras de conjuntos plenas possuem ainda outras propriedades que permitem um enunciado mais adequado para a solução do problema da representação.

**Definição** Uma álgebra booleana  $B$  é uma *extensão perfeita* de uma álgebra booleana  $A$  se as seguintes condições são satisfeitas:

- i)  $B$  é completa e atômica.
- ii)  $A$  é uma subálgebra de  $B$ .







































































































































































































