
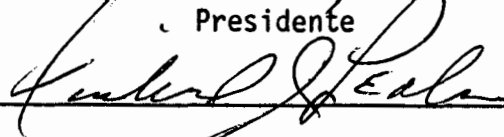

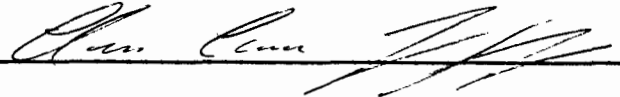


ESTUDO DA ESTABILIDADE DE CIRCUITOS RC  
VIA OTIMIZAÇÃO

Carlos Henrique da Costa Mariz

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.)

Aprovada por:

  
\_\_\_\_\_  
Presidente  
  
\_\_\_\_\_  
  
\_\_\_\_\_  
  
\_\_\_\_\_

RIO DE JANEIRO  
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL  
AGOSTO DE 1973

À Lourdinha,  
Cristiana e ele(a)...?

AGRADECIMENTOS

Ao professor e amigo Marinho, os meus agradecimentos pela excelente orientação, sugestão e dedicação a este trabalho.

Ao Magnífico Reitor da Universidade Federal de Pernambuco, professor Marcionilo de Barros Lins e ao professor Arnóbio Marque da Gama, pelo apoio que me foi dispensado.

Aos colegas e funcionários da COPPE/UFRJ, pela colaboração.

À CAPES e à Universidade Federal de Pernambuco, pelo auxílio financeiro.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é o estudo de estabilidade de redes RC não lineares. Uma rede RC é considerada assintoticamente estável quando a carga dos capacitores converge a uma carga de equilíbrio.

O estudo é desenvolvido a partir da análise do comportamento de redes resistivas. Em todo trabalho é admitida a hipótese dos resistores possuírem curvas características crescentes, com o que, formular os problemas de redes resistivas como problemas / de otimização em grafos. Técnicas de dualidade são utilizadas na dedução de alguns resultados.

Hipóteses adicionais sobre os resistores, dependentes da estrutura da rede, permitirão representar-se as soluções da rede / como soluções de um sistema de equações diferenciais onde a existência e unicidade de soluções é garantida. O método de Liapunov é o instrumento básico na análise de estabilidade deste sistema de equações.

ABSTRACT

The main goal of this work is the study of non-linear RC network stability. An RC network is considered asymptotically stable when the capacitor charges converge to equilibrium charges.

The study is developed from the analysis of the behavior of resistive networks. It is assumed that all resistors have increasing characteristics curves, from which it is possible to formulate resistive network problems as optimization problems on graphs. Duality techniques are used in the proof of certain results.

Additional hypothesis on the resistors, depending on the network structure, will permit representation of the networks solutions as solutions of a system of differential equations for which the existence and uniqueness of solutions is guaranteed. Liapunov's method is the basic tool in the stability analysis of this system of equations.

I N D I C E

|                 |  |    |
|-----------------|--|----|
| <u>CAP. I</u>   | Introdução .....   | 1  |
| <u>CAP. II</u>  | Definições e Teoremas da Teoria dos<br>Grafos .....                              | 6  |
| <u>CAP. III</u> | Redes Resistivas e Otimização  |    |
| SECÇÃO 1        | - Introdução .....   | 25 |
| SECÇÃO 2        | - Modelos de Circuitos .....   | 26 |
| SECÇÃO 3        | - Formulação do Problema de Transporte e alguns<br>Resultados Concernentes ..... | 35 |
| SECÇÃO 4        | - Redes Resistivas e o Problema<br>de Transporte .....                           | 39 |
| SECÇÃO 5        | - Existencia e Unicidade de<br>Solução do (PT) .....                             | 50 |
| SECÇÃO 6        | - Conclusão .....  | 58 |
| <u>CAP. IV</u>  | Redes RC e Otimização  |    |
| SECÇÃO 1        | - Introdução .....   | 60 |
| SECÇÃO 2        | - Dualidade, Problema de Transporte<br>e Redes RC .....                          | 61 |
| SECÇÃO 3        | - Dinamica da Rede RC .....  | 70 |
| SECÇÃO 4        | - Condições para Existencia e Unicidade<br>de Solução de (25) .....              | 76 |
| SECÇÃO 5        | - Conclusão .....  | 83 |

|                     |  |     |
|---------------------|--|-----|
| <u>CAP. V</u>       | Estabilidade   |     |
| SECÇÃO 1            | - Introdução .....   | 86  |
| SECÇÃO 2            | - Estados de Equilíbrio do<br>Sistema .....                          | 87  |
| SECÇÃO 3            | - Estabilidade Assintótica<br>Global .....                           | 89  |
| SECÇÃO 4            | - Estabilidade Assintótica em<br>Corrente e Tensão .....             | 97  |
| <u>CAP.VI</u>       | Conclusão .....  | 105 |
| <u>APENDICE A</u>   | Funções Convexas, Dualidade e Funções<br>Convexas Quase Suaves ..... | 108 |
| <u>APENDICE B</u>   | Um Teorema de Estabilidade para<br>Sistemas Autonomos .....          | 125 |
| <u>BIBLIOGRAFIA</u> | .....  | 127 |

## C A P Í T U L O I

INTRODUÇÃO.

Estudaremos uma classe de rêdes RC com resistores e capacitores não lineares, classe esta que é caracterizada pelo tipo de não linearidade permitida: resistores com curvas características crescentes ( não necessariamente estritamente) e capacitores com funções características estritamente crescentes.

O objetivo dêsse estudo é determinar condições de modo que o comportamento dessas rêdes possam ser representadas por um sistema de equações diferenciais na forma normal e a partir dêsse sistema estudar a estabilidade da rêde.

Diremos que o sistema é assintoticamente "estável" se para qualquer condição inicial a solução do sistema de equações diferenciais existe, é única em um intervalo de tempo infinito, e converge para um estado de equilíbrio do sistema.

Como no modêlo de rêdes usaremos noções de grafos, definições e resultados da teoria de grafos são apresentados



no capítulo II.

O capítulo seguinte aborda inicialmente a modelagem de rêdes resistivas e rêdes RC. Depois é formulado um problema de otimização em grafos que é relacionado ao problema de rêde resistiva. Estudamos ainda condições de existência e unicidade de solução desses problemas.

No capítulo IV iniciamos a análise de rêdes RC. Para garantirmos a representação do comportamento da rêde RC por um sistema de equações diferenciais, estudaremos dois tipos de problemas. O primeiro consiste em buscar soluções da rêde resistiva, resultante da retirada dos capacitores da rêde RC. O segundo envolve a resolução da rêde resistiva obtida pela substituição dos capacitores da rêde por fontes de tensão. Veremos que a existência e unicidade de solução desses problemas garantem a possibilidade dessa representação. O relacionamento entre estes dois problemas é feito através de técnicas de dualidade em programação convexa. Ainda neste capítulo abordamos a questão da existência e unicidade de solução da equação de estado da rêde.

Finalmente, no capítulo V apresentamos a prova da estabilidade da rêde RC.

#### Notação.

Para cada inteiro n nós denotamos por  $\mathbb{R}^n$  o espaço euclidiano n dimensional, cujos elementos são n-tu -

plas ordenadas de números reais, que nós consideramos como vetores colunas.

Se  $x \in \mathbb{R}^n$ , então para  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $x_i$  denota a  $i$ -gésima componente de  $x$ . Se  $x, y \in \mathbb{R}^n$  denotamos o produto escalar por

$$1 \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i .$$

A norma para cada  $x \in \mathbb{R}^n$  é denotada por

$$2 \quad \|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} .$$

Se  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , nós usamos a notação  $x < y$  para indicar que, para  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $x_i < y_i$ . Análogamente,  $x \leq y$  significa que, para  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $x_i \leq y_i$ .

3 Se  $a, b \in \mathbb{R}^n$  denotaremos por  $[a, b]$ ,  $(a, b]$ ,  $[a, b)$  e  $(a, b)$  os conjuntos:

$$[a, b] = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid a \leq x \leq b \}$$

$$(a, b] = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid a < x \leq b \}$$

$$[a, b) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid a \leq x < b \}$$

$$(a, b) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid a < x < b \}$$

Seja  $Z = \{ i_1, i_2, \dots, i_z \} \subset \{ 1, 2, \dots, m \}$  tal que

$i_j > i_e$  para  $j > e$ . Então se  $\varphi \in \mathbb{R}^m$ , denotamos por  $\varphi_Z$ , o seguinte vetor de  $\mathbb{R}^Z$

$$4 \quad \varphi_Z = \begin{bmatrix} \varphi_{i_1} \\ \varphi_{i_2} \\ \vdots \\ \varphi_{i_Z} \end{bmatrix}$$

Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $B \subset A$ , denotamos por  $A-B$  o conjunto:

$$5 \quad A-B = \{ x \in A \mid x \notin B \} .$$

Dados dois conjuntos  $A$  e  $B \subset \mathbb{R}^n$  denotamos o produto cartesiano por:

$$6 \quad A \times B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x \in A, y \in B \}$$

Dados  $n$  conjuntos,  $I_1, I_2, \dots, I_n$  denotamos por

$$7 \quad \prod_{i=1}^n I_i = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$$

ao produto cartesiano destes conjuntos.

Acrescentamos algumas observações sôbre as referências. Os capítulos numeramos em algarismos romanos; expres-

sões e parágrafos em algarismos arábicos. Com algarismo arábico entre parênteses indicamos uma referência a uma expressão ou parágrafo no mesmo capítulo. Para referenciar expressões em outro capítulo, colocamos a numeração do capítulo seguida da numeração da expressão (por exemplo (II-10)). As referências ao apêndice são feitas através de letras seguidas do número da expressão. Exemplo: (ver A-15).

A bibliografia é apresentada no fim do trabalho, em ordem alfabética por nome de autor. A referência bibliográfica é apresentada entre parênteses e indica a data de publicação do trabalho. Exemplo: GEOFFRION(71).

## C A P Í T U L O II

DEFINIÇÕES E TEOREMAS DA TEORIA DOS GRAFOS.Introdução.

Faremos neste capítulo um resumo da teoria dos grafos finitos, procurando nos limitar aos conceitos que, de uma forma ou de outra, empregaremos no decorrer deste trabalho. Para isto, recorreremos fundamentalmente a duas obras: a do BERGE (62) que apresenta um estudo geral de grafos, e PERSIANO (71) que se limita a alguns conceitos, porém numa formalização bastante precisa.

Definição de grafos.

Vamos começar dizendo o que entendemos por grafos simples.

1 Definição: Um grafo simples é um par ordenado  $(N, A)$ , onde  $N$  é um conjunto finito e  $A \subset N \times N$ .

Os elementos de  $N$  são os nós do grafo simples.  
E os elementos de  $A$  os ramos do mesmo.

A Definição (1) pode ser melhor interpretada mediante um exemplo.

Exemplo I: Seja um grafo simples  $G = (N, A)$  onde:

$$N = \{ a, b, c, d, e, f \}$$

$$A = \{ (a,b), (b,c), (d,c), (d,a), (d,b), (b,d), (a,c), (e,f) \}$$

Podemos representar  $G$ , por uma figura geométrica onde os nós são simbolizados por círculos e cada ramo por segmento de linha compreendido entre dois nós, conforme Figura 1.

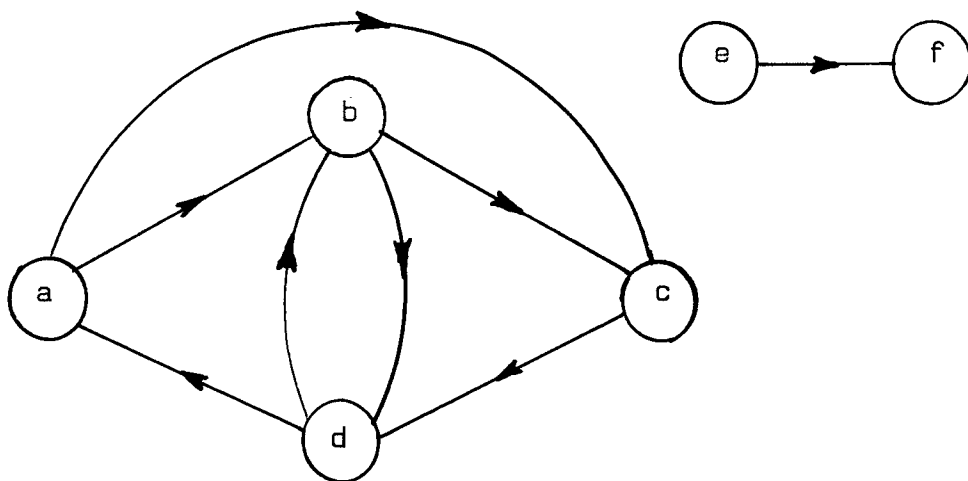


Figura 1.

As setas da figura são fundamentais porque indicam a orientação dos ramos: os ramos  $(b,d)$  e  $(d,b)$  de  $A$  são considerados ramos distintos.

Façamos agora um raciocínio inverso. Isto é: dada uma figura geométrica composta de círculos e de segmentos de linha orientados entre os círculos, estamos interessados em saber se esta figura pode ou não representar um grafo simples. Para esclarecer, tomemos um exemplo.

Exemplo II: Seja a Figura 2. Ela difere da Figura 1 por um segmento de linha orientado a mais, entre os círculos b e d. Vejamos se ela pode ou não representar um grafo simples.

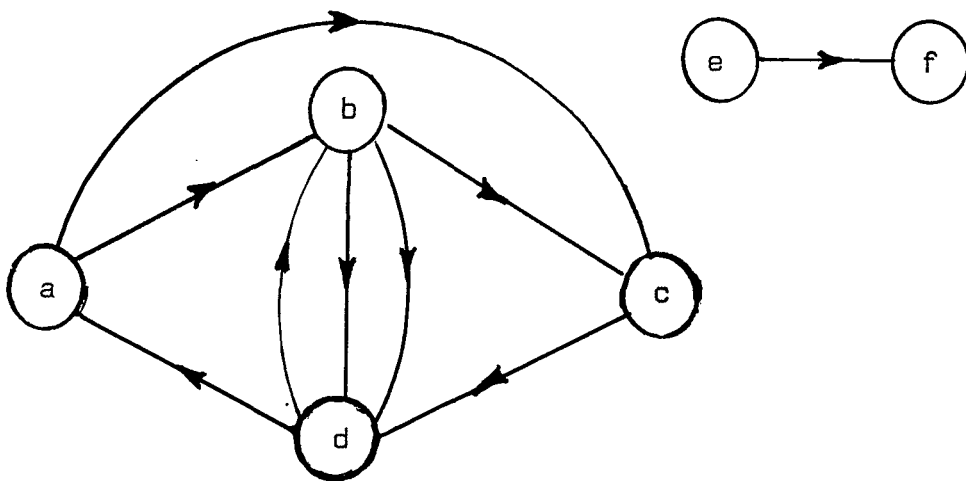


Figura 2.

Aplicando um raciocínio análogo diríamos: os segmentos de linha devem representar os ramos de um grafo simples  $G'$ , assim como os círculos, seus nós. Teríamos então:  $G' = (N', A')$  onde:

$$N' = \{ a, b, c, d, e, f \}$$

$$A' = \{ (a,b), (b,c), (d,c), (d,a), (d,b), \underline{(b,d)}, \underline{(b,d)}, (a,c), (e,f) \}$$

Tivemos que duplicar  $(b,d)$  em uma tentativa de caracterizar como ramo, o segmento de linha que acrescentamos entre  $\underline{b}$  e  $\underline{d}$ . Acontece que o conjunto  $A'$  é igual ao conjunto  $A$  do exemplo anterior, assim como o conjunto  $N'$  é igual a  $N$ . Em outras palavras: o referido segmento de linha ficou descaracterizado como um novo ramo. Portanto, a Figura 2 não representa um grafo simples.

Na modelagem de sistemas, muitas situações só podem ou devem ser representadas grãficamente por esquemas com características semelhantes ao da Figura 2. Portanto, é necessário estender o conceito de grafos de modo a abranger também êstes casos, e, desenvolver uma teoria baseada nêste conceito. Na realidade isto já foi feito sob diversas formas e por diversos autores tais como: BERGE(62), IRI(69),etc.

Um grafo como êste é dito possuir ramos múltiplos. Em nosso trabalho, salvo menção em contrário, os grafos tratados podem ter ramos múltiplos.

2        Definição: Um grafo é uma tripla ordenada  $(N,A,K)$  onde  $N$  é um conjunto finito;  $K$  é um conjunto finito, contido no conjunto dos naturais e  $A \subset N \times N \times K$ .

A Definição 2 estende a idéia de grafo simples, permitindo a existência de vários ramos unindo dois nós:  $(a,b,1), (a,b,2), \dots, (a,b,k) \in A$  são ramos distintos. /



Mantêm, por outro lado, a orientação dos ramos:

$(a,b,1)$  e  $(b,a,1) \in A$  são ramos distintos que unem os mesmos dois nós a e b com orientação inversa.

Se voltarmos agora para a figura 2 veremos que, / de acôrdo com a Definição 2, ela representa o grafo  $(N,A,K)$ , onde:

$$N = \{ a, b, c, d, e, f \}$$

$$K = \{ 1, 2 \}$$

$$A = \left\{ (a,b,1), (b,c,1), (c,d,1), (d,a,1), (a,c,1), \underline{(b,d,1)}, \right. \\ \left. \underline{(b,d,2)}, (d,b,1), (e,f,1) \right\}$$

Formalmente, grafos simples não são grafos; mas, um grafo simples  $(N',A')$ , pode ser identificado com o grafo  $(N,A,K)$  onde:

$$N = N'$$

$$K = \{ 1 \}$$

$$A = A' \times K$$

Através desta identificação consideraremos grafos simples como grafos.

Inversamente, um grafo  $G = (N,A,K)$  será dito grafo simples, e denotado por  $(N,A)$ , quando  $G$  satisfizer a:

$$(a,b,k) \in A \implies (\forall j \in K, j \neq k) (a,b,j) \notin A$$

Ou seja: quando  $G$  não possuir ramos múltiplos.

Um sub-grafo de  $G = (N, A, K)$  é um grafo  $(X, U, K)$  onde  $X \subset N$  e  $U$  é constituído de todos os ramos de  $A$  que ligam dois nós de  $X$ . Por sua vez, um grafo parcial de  $G$  é um grafo  $(N, V, K)$  onde  $V \subset A$ .

Dado um ramo  $\alpha = (\eta_1, \eta_2, j) \in A$  de um grafo  $(N, A, K)$  denominam-se  $\eta_1$  e  $\eta_2$  extremidades do ramo  $\alpha$ . Como existe uma orientação de  $\eta_1$  para  $\eta_2$ ,  $\eta_1$  é chamado extremidade inicial e  $\eta_2$  extremidade terminal.

Dado um grafo  $(N, A, K)$  chama-se ramo emergente do nó  $\eta \in N$ , a todo ramo com extremidade inicial  $\eta$ . Ao passo que, ramo imergente ao nó  $\eta$  é todo ramo com extremidade terminal  $\eta$ . O conjunto dos ramos imergentes a  $\eta \in N$  representaremos por  $\omega^-(\eta)$  e o conjunto dos ramos emergentes por  $\omega^+(\eta)$ . Ou seja:

$$3 \quad \omega^+(\eta) = \{ \alpha \in A \mid \alpha = (\eta, \gamma, k) ; \gamma \in N, k \in K \}$$

$$4 \quad \omega^-(\eta) = \{ \alpha \in A \mid \alpha = (\gamma, \eta, k) ; \gamma \in N, k \in K \}$$

Denotaremos por  $\omega(\eta)$  o conjunto:

$$5 \quad \omega(\eta) = \omega^+(\eta) \cup \omega^-(\eta)$$

Podemos generalizar êste conceito de incidência, para um sub-conjunto  $X \subset N$  definindo:

$$6 \quad \omega^+(x) = \{ (\eta, \gamma, k) \in A \mid \eta \in x, k \in K, \gamma \notin x \}$$

$$7 \quad \omega^-(x) = \{ (\eta, \gamma, k) \in A \mid \eta \notin x, k \in K, \gamma \in x \}$$

$$8 \quad \omega(x) = \omega^-(x) \cup \omega^+(x)$$

Dizemos que dois nós quaisquer  $\eta, \gamma \in N$  são nós adjacentes se  $\omega(\eta) \cap \omega(\gamma) \neq \emptyset$  e  $\alpha, \beta \in A$  são ramos adjacentes se  $\exists \eta \in N$  tal que  $\alpha \in \omega(\eta)$  e  $\beta \in \omega(\eta)$ . Dizemos também que um nó  $\eta \in N$  é adjacente ao ramo  $\alpha \in A$ , se  $\alpha \in \omega(\eta)$ .

Exemplo III : Considerando o grafo representado pela Figura 2:

$$\omega^+(b) = \{ (b,d,1), (b,d,2), (b,c,1) \}$$

$$\omega^-(b) = \{ (a,b,1), (d,b,1) \}$$

O nó a e o nó b são adjacentes, ao passo que os nós a e e não o são.

Os ramos  $(a,b,1)$  e  $(d,a,1)$  são adjacentes, mas os ramos  $(b,d,1)$  e  $(a,c,1)$  não o são.

### Cadeias e ciclos.

De agora em diante quando nos referirmos a um grafo  $G = (N, A, K)$  estaremos supondo que  $N$  possui n elementos e  $A$  m. E convencionaremos:

$$N = \{ \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n \}$$

$$A = \{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \}$$

$$K \subset \mathbb{N}$$

Sejam  $\gamma$  e  $\delta$  dois nós de  $G$ .

9 Definição: Uma família  $(\beta_i)_{i \in I}$ ,  $I = \{1, 2, \dots, q\}$  de ramos de  $A$ , é uma cadeia de  $\gamma$  a  $\delta$  se existir uma família  $(\gamma_j)_{j \in J}$ ,  $J = \{1, 2, \dots, q+1\}$  de nós de  $N$  tal que:

$$a) \gamma_1 = \gamma \quad e \quad \gamma_{q+1} = \delta$$

$$b) \beta_i \in \omega(\gamma_i) \cap \omega(\gamma_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, q$$

Os nós  $\gamma$  e  $\delta$  são ditos extremidades inicial e terminal da cadeia, respectivamente.

Um grafo  $(N, A, K)$  é dito conexo, se para cada par de nós  $\eta_i, \eta_j \in A$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$  existir uma cadeia unindo  $\eta_i$  a  $\eta_j$ .

Em nosso trabalho trataremos apenas de grafos conexos.

10 Definição: Um ciclo de um grafo  $(N, A, K)$  é uma cadeia formada por ramos distintos de  $A$  em que as extremidades inicial e terminal coincidem.

Em outros termos: uma cadeia  $(\beta_i)_{i=1, 2, \dots, q}$  do grafo  $(N, A, K)$  é um ciclo quando:

Existe uma sequência  $(\gamma_j)_{j \in J}$ ,  $J = \{1, 2, \dots, q\}$  tal que:

$$a) \beta_1 \in \omega(\gamma_1) \text{ e } \beta_q \in \omega(\gamma_1)$$

$$b) \beta_i, \beta_{i+1} \in \omega(\gamma_{i+1}) \quad i = 1, 2, \dots, q-1$$

$$c) \beta_i \neq \beta_j \quad \forall \quad i \neq j$$

11 Um ciclo é elementar quando a sequência  $(\gamma_j)_{j \in J}$  na Definição (10) é constituída de nós distintos.

Dado um ciclo  $\mathcal{C} = (\beta_j)_{j \in J}$  de um grafo  $G$  e o conjunto  $N(\mathcal{C}) = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_q\} \subset N$  de nós de  $G$  pelos quais passa o ciclo  $\mathcal{C}$  (ver 10), consideremos o vetor  $\mu \in \mathbb{R}^m$  definido por:

$$12 \quad \mu_i = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha_i = \beta_j \text{ e } \beta_j \in \omega^+(\gamma_j) \\ -1 & \text{se } \alpha_i = \beta_j \text{ e } \beta_j \in \omega(\gamma_j) \\ 0 & \text{se } \alpha_i \neq \beta_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, q \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Para algum} \\ j \in \{1, 2, \dots, q\} \end{array} \right\}$$

O ciclo  $\mathcal{C}$  fica bem caracterizado pelo vetor  $\mu \in \mathbb{R}^m$  definido em (12) pois os ramos de  $\mathcal{C}$  são distintos. Isto significa que um ciclo pode ser representado vetorialmente. De agora em diante, quando nos referenciarmos a um ciclo, usaremos indistintamente a letra  $\mu$  para designar, seja a família seja o vetor ciclo.

Dado um grafo  $G = (N, A, K)$  os ciclos  $\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^r$

de  $G$  são ciclos dependentes quando:  $\exists a \neq 0, a \in \mathbb{R}^r$  tal que:

$$a_1 \mu^1 + a_2 \mu^2 + \dots + a_r \mu^r = 0 . \text{ Caso}$$

contrário êles são ditos independentes.

13 Definição: Uma base fundamental de ciclos de um grafo  $G$ , é um conjunto  $B$  de ciclos elementares independentes, tal que, qualquer ciclo de  $G$  pode ser escrito como uma combinação linear de  $B$ .

Em seguida, enunciamos um teorema que estabelece a dimensão de uma base fundamental de ciclos.

14 Teorema: Seja  $G$  um grafo conexo com  $n$  nós e  $m$  ramos. A dimensão de qualquer base de ciclos de  $G$  é:  $r(G) = m - n + 1$

Demonstração: Ver BERGE(62) pag. 126.

### Árvores e Coárvores.

15 Definição: Uma árvore é um grafo simples conexo e sem ciclos constituído de pelo menos dois nós.

Dizer que um grafo simples  $H = (X, U)$  com pelo menos dois nós é uma árvore equivale a:

a)  $H$  não possui ciclos e tem  $n - 1$  ramos.

ou

b)  $H$  é conexo e possui  $n - 1$  ramos.

ou

- c)  $H$  não possui ciclos e acrescentando-se um ramo cria-se um ciclo, e somente um.

Exemplo IV: No grafo representado pela Figura 2 o sub-grafo parcial  $H = (X, U)$  onde:

$$X = \{a, b, c, d\} \quad e$$

$$U = \{(a, b, 1), (b, c, 1), (c, d, 1)\}$$

representa uma árvore.

Uma árvore  $H$  é uma árvore de  $G$ , se  $H$  é um grafo parcial de  $G$ . Para que um grafo qualquer  $G = (N, A, K)$  admita uma árvore  $H = (N, U)$  basta que  $G$  seja conexo.

16 Teorema: Sejam um grafo conexo  $G = (N, A, K)$  e uma árvore  $(N, U)$  de  $G$ . Então para  $\alpha_i \in A - U$  o grafo  $(N, U \cup \{\alpha_i\}, K)$  possui um e somente um ciclo  $\mu^i$ . O conjunto de todos os ciclos assim obtidos forma uma base fundamental de ciclos de  $G$ .

Demonstração: Os ciclos  $\mu^i$  são independentes, pois cada um contém pelo menos um ramo que não pertence aos demais.

O número de ciclos  $\mu^i$  formados, será: número de ramos de  $A$  menos número de ramos de  $U$ . Ou seja:  
 $m - (n - 1) = m - n + 1 = r(G)$ , pois  $U$  tem  $n - 1$  ramos. De acordo com o Teorema (14) e a Definição (13) os diver -

os  $\mu^i$  formam uma base fundamental de ciclos.

17 Definição: Dado um grafo conexo  $G = (N, A, K)$ , um grafo parcial  $(N, B, K)$  de  $G$  é uma coárvore de  $G$  se  $(N, A-B, K)$  é uma árvore.

Como toda árvore  $(N, U)$  de um grafo  $G = (N, A, K)$  tem  $(n - 1)$  ramos ( $N$  tem  $n$  nós), então toda coárvore de  $G$  tem  $m - n + 1 = r(G)$  ramos. Revendo o Teorema (16), conclui-se ainda que cada ramo de uma dada coárvore de  $G$ , determina biunívocamente um ciclo de uma base fundamental de ciclos de  $G$ .

### Fluxos e Tensões.

Iniciemos êste parágrafo introduzindo o conceito de matriz de incidência. Como teremos ocasião de observar, a noção de matriz de incidência de um grafo, não exige que o mesmo seja conexo.

Seja  $G = (N, A, K)$  um grafo qualquer onde:

$$N = \{\eta_1, \eta_2 \dots \eta_n\}$$

$$K \subset N$$

$$A = \{\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_m\}$$

Construamos um vetor  $b^j \in \mathbb{R}^m$  associado a um nó  $\eta_j \in N$ , onde cada componente  $b_i^j$ ,  $i = 1, 2 \dots m$  é definida



por:

$$18 \quad b_i^j = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha_i \in \omega^+(\eta_j) \\ -1 & \text{se } \alpha_i \in \omega^-(\eta_j) \\ 0 & \text{se } \alpha_i \notin \omega(\eta_j) \end{cases}$$

Por (18), verificamos que o vetor  $b^j$  caracteriza bem o conjunto de ramos incidentes (imergentes e/ou emergentes) ao nó  $\eta_j \in N$ . Dêsse modo, o conjunto  $\omega(\eta_j)$  passa a ter uma representação vetorial. O símbolo  $\omega(\eta_j)$  será empregado, dependendo da conveniência, seja para representar o vetor  $b^j$ , seja o conjunto.

De (18), variando  $j$  de 1 a  $n$  caracterizamos a estrutura topológica do grafo  $G$ . Isto é: o conjunto de vetores  $\omega(\eta_j) \in \mathbb{R}^m$ ,  $j = 1, 2 \dots n$  define as relações de adjacências entre nós e ramos do grafo  $G$ .

A topologia de  $G$  pode ser representada por uma matriz  $M$ ,  $n \times m$ , cujos elementos  $M_{ji}$ ,  $j = 1, 2 \dots n$ ;  $i = 1, 2 \dots m$  são definidos por:

$$19 \quad M_{ji} = \omega_i(\eta_j).$$

A matriz  $M$  é a matriz de incidência do grafo  $(N, A, K)$ .

O conceito de matriz de incidência nos permite definir fluxos e tensões de um grafo, numa forma mais elegan-

te. De agora em diante a letra  $M$  será reservada para representar matriz de incidência.

20 Definição: Um vetor  $\varphi \in \mathbb{R}^m$  é um fluxo de um grafo  $(N, A, K)$  se

21  $M \varphi = 0$

Cada componente  $\varphi_i$  do vetor  $\varphi \in \mathbb{R}^m$  é chamada de fluxo do ramo  $\alpha_i$ .

Na realidade a condição (21) é semelhante a lei de Kirchhoff para correntes elétricas (ver III-6(a)). Isto é: impõe conservação de fluxo em cada nó de  $G$ . De fato, se observarmos a Definição (19) e a condição (21) concluímos:

22 
$$\sum_{\alpha_i \in W^+(\eta_j)} \varphi_i = \sum_{\alpha_k \in W^-(\eta_j)} \varphi_k \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

A equação (22) nos diz que, para cada nó  $\eta_j \in N$  de  $G$ , a soma dos fluxos nos ramos emergentes é igual a so ma dos fluxos nos ramos imergentes.

O Teorema apresentado em seguida, que nos será útil no Cap. III, estabelece uma relação entre o espaço de fluxos de um grafo e uma base fundamental de ciclos d'êste grafo.

23

Teorema: Sejam um grafo conexo  $G = (N, A, K)$  com  $\underline{m}$  ramos e  $\underline{n}$  nós e  $H = (N, B)$  uma árvore de  $G$ .

Seja  $\{\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^r\}$  a base fundamental de ciclos gerada pelos ramos de

$$A-B \triangleq \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}.$$

Todo fluxo  $\varphi \in \mathbb{R}^m$  de  $G$  é univocamente determinado por seus valores nos ramos de  $A-B$  pela expressão:

$$\varphi = \sum_{i=1}^r \varphi_i \mu^i$$

Inversamente, toda combinação linear dos ciclos  $\mu^i$  é um fluxo.

Demonstração: Ver BERGE(62) pag. 144.

Seja  $B = \{\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^r\}$  uma base fundamental de ciclos de um grafo conexo  $G$  com  $\underline{m}$  ramos e  $\underline{n}$  nós. A matriz fundamental de  $G$  gerada pela base  $B$  é a matriz,  $m \times r$ , dada por:

24

$$S = \begin{bmatrix} \mu_1^1 & \mu_1^2 & \dots & \mu_1^r \\ \mu_2^1 & \mu_2^2 & \dots & \mu_2^r \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_m^1 & \mu_m^2 & \dots & \mu_m^r \end{bmatrix}$$

Exemplo V: Seja  $G = (N, A, K)$  o grafo conexo com 5 nós e 10 ramos,  $N = \{a, b, c, d, e\}$  ;  $K = \{1, 2\}$  e

$$A = \left\{ (b, a, 1), (b, a, 2), (b, c, 1), (b, c, 2), (a, d, 1), (a, e, 1), \right. \\ \left. (d, b, 1), (d, c, 1), (c, e, 1), (e, d, 1) \right\}$$

representado pela Figura 3.

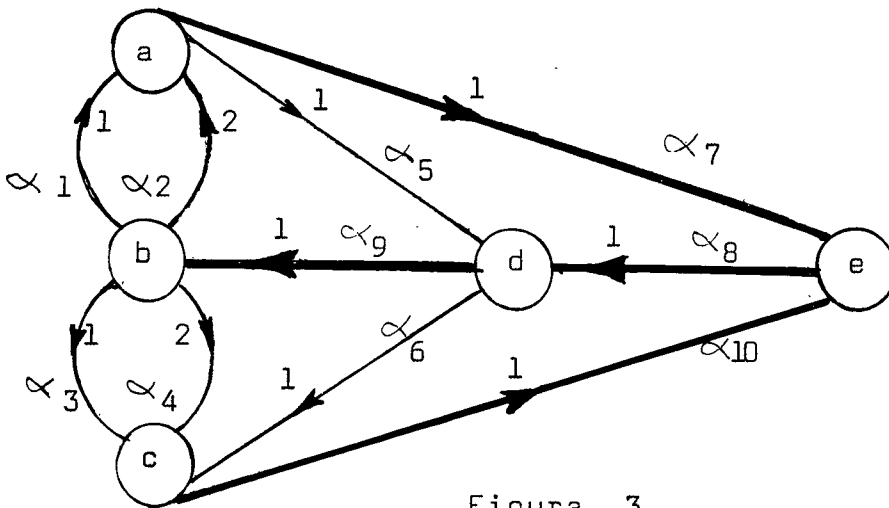


Figura 3.

Consideremos a árvore  $H = (N, B)$  onde:

$$B = \left\{ (a, e, 1), (e, d, 1), (d, b, 1), (c, e, 1) \right\}$$

Façamos:

$$\alpha_1 = (b, a, 1), \alpha_2 = (b, a, 2), \alpha_3 = (b, c, 1), \alpha_4 = (b, c, 2),$$

$$\alpha_5 = (a, d, 1), \alpha_6 = (d, c, 1).$$

$$\alpha_7 = (a, e, 1), \alpha_8 = (e, d, 1), \alpha_9 = (d, b, 1), \alpha_{10} = (c, e, 1).$$

No caso, os ramos  $\alpha_i$   $i = 1, 2 \dots 6 \in A - B$  e  $\alpha_i$   $i = 7, 8, 9, 10 \in B$ .

A matriz fundamental de  $G$  será então:

$$S = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ +1 & +1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & +1 & 0 & +1 \end{bmatrix}$$

De uma maneira geral, a lei de formação da matriz fundamental de um grafo  $G$  nos permite escrever:

$$S = \begin{bmatrix} & & & I \\ \hline M_{r+1}^1 & M_{r+1}^2 & \cdots & M_{r+1}^r \\ M_{r+2}^1 & M_{r+2}^2 & \cdots & M_{r+2}^r \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_m^1 & M_m^2 & \cdots & M_m^r \end{bmatrix}$$

Por  $I$  representamos a matriz identidade  $r \times r$ .

Pelo Teorema (23), podemos concluir que  $\varphi \in \mathbb{R}^m$  é um fluxo se e só se  $\varphi = S\bar{\varphi}$  para algum  $\bar{\varphi} \in \mathbb{R}^r$ .

26 Definição: Dado um grafo  $G$  com  $n$  nós e  $m$  ramos dizemos que o vetor  $\theta \in \mathbb{R}^m$  é uma tensão de  $G$  se

$$27 \quad \theta = -M'p$$

para algum  $p \in \mathbb{R}^n$ .

Cada componente  $\theta_i$  do vetor  $\theta \in \mathbb{R}^m$  é chamada de tensão do ramo  $\alpha_i$  de  $G$ .

Chamamos vetor potencial de  $G$ , ao vetor  $p \in \mathbb{R}^n$  da expressão (27). A componente  $p_j$  de  $p$  é dita potencial do nó  $\eta_j \in \mathbb{N}$ .

Dado um grafo  $G = (N, A, K)$  e  $\alpha_i = (\eta_t, \eta_s, k) \in A$  então de (19) e (27):

$$28 \quad \theta_i = p_s - p_t.$$

A expressão (28) nos diz que a tensão  $\theta_i$  do ramo  $\alpha_i$  de  $G$  é igual a diferença entre os potenciais dos nós  $\eta_s$  e  $\eta_t \in \mathbb{N}$ , respectivamente.

Se  $\varphi \in \mathbb{R}^m$  é um fluxo de  $G$  e  $\theta \in \mathbb{R}^m$  uma tensão podemos afirmar que:

$$29 \quad \langle \theta, \varphi \rangle = - \langle p, M\varphi \rangle = 0.$$

A condição (29) é facilmente verificada por (21) e (27).

Uma maneira equivalente de dizer que um vetor  $\theta \in \mathbb{R}^m$  é uma tensão de um grafo  $G$  é dizer que:

$$30 \quad S' \theta = 0$$

onde  $S$  é a matriz fundamental de  $G$ .

A condição (30) é uma maneira resumida de dizer que:

$$31 \quad \langle \mu, \theta \rangle = 0 \text{ para qualquer ciclo } \mu \text{ de } G.$$

A condição (31) é semelhante a lei de Kirchhoff para tensões elétricas (Ver III-6(b)). Isto é: tal como nos circuitos elétricos, a soma das tensões ao longo dos ramos de um ciclo de um grafo é zero.

Se  $(N, B)$  é uma árvore do grafo  $G$  pode-se demonstrar (ver BERGE(62) pag. 153) que existe uma matriz  $D$ ,  $m \times (n-1)$ , tal que toda tensão  $\theta$  de  $G$  pode ser representada por:

$$32 \quad \theta = D \theta_B$$

onde  $\theta_B$  é o vetor cujas componentes são tensões dos ramos da árvore  $(N, B)$ .

## C A P Í T U L O   I I I

RÊDES RESISTIVAS E OTIMIZAÇÃO.SECÇÃO 1 - INTRODUÇÃO.

Iniciamos neste capítulo o estudo de rêsdes resistivas. Problemas de rêsdes resistivas serãõ formulados como problemas em grafos: primeiramente, como um problema algébrico, e, em seguida, como um problema de otimização.

Na Secção 2, apresentamos um modêlo de rêsdes elétricas, dizendo o que entendemos por resistores e capacitores e formulamos problemas de rêsdes elétricas como problemas em grafos. Na Secção 3, apresentamos o problema de transporte que é um problema de otimização em grafos, e, mostramos na Secção 4, como um problema de rêsde resistiva, sob certas hipóteses, pode ser transformado em um problema de transporte.

A Secção 5 aborda a questão de existência e unicidade de solução de problemas de transporte, o que servirá de base para o estabelecimento de condições de existência e unicidade de solução de rêsdes resistivas.



SECÇÃO 2 - MODÉLOS DE CIRCUITOS.

Apresentaremos primordialmente nesta secção dois tipos de modelos para "dispositivos elétricos": um que chamaremos de resistor e o outro de capacitor. Em seguida introduziremos o conceito de rêde resistiva, para depois definir problema e solução de rêde resistiva. No final, definiremos rêde RC e alguns problemas correlacionados.

Antes de apresentar o conceito de resistor, vamos dizer o que entendemos por curva.

1 Definição: Uma curva é um conjunto  $C \subset \mathbb{R}^2$  com interior vazio, tal que:

$$C = f(I)$$

onde  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma função contínua e injetora e  $I$  um intervalo de  $\mathbb{R}$ .

Uma curva pode ser representada pelo desenho de uma "linha" no plano. A Definição (1) garante que esta linha é contínua e não possui laços.

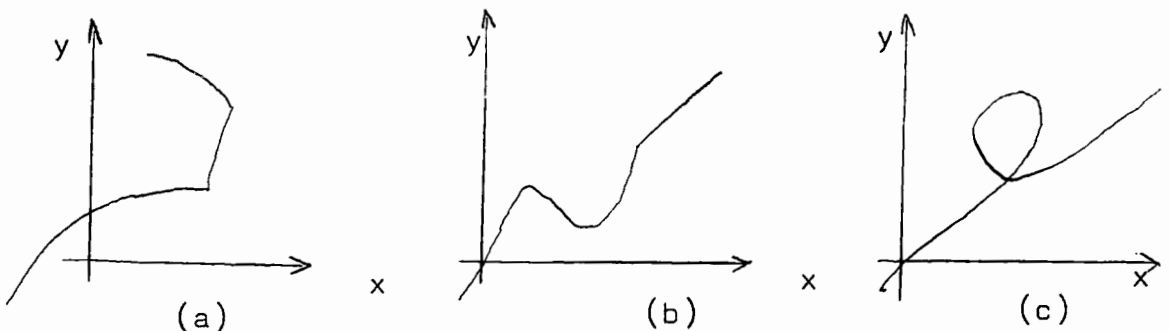


Figura 1

Por (1) as figuras 1-(a) e 1-(b) representam curvas ao passo que 1-(c) não.

2 Um resistor é uma curva em  $\mathbb{R}^2$ . Por vêzes nos referimos à curva como curva característica do resistor. Se  $(\theta, \varphi) \in C$  onde  $C$  é um resistor então  $\theta$  é uma diferença de potencial (ou tensão) do resistor e  $\varphi$  uma corrente (ou fluxo) através do resistor.

3 Uma curva  $C \subset \mathbb{R}^2$  é um resistor controlado por tensão se existir um intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  e uma função  $h: I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que se  $(\theta, \varphi) \in C$  então  $\varphi = h(\theta)$ . Análogamente,  $C \subset \mathbb{R}^2$  é um resistor controlado por corrente se existir um intervalo  $J \subset \mathbb{R}$  e uma função  $w: J \rightarrow \mathbb{R}$  tal que se  $(\theta, \varphi) \in C$  então  $\theta = w(\varphi)$ .

No caso de "circuitos elétricos", diferenças de potencial e correntes são entidades físicas. Costuma-se chamar de "resistor" ao dispositivo onde os valores de diferenças de potencial e corrente, "admissíveis simultaneamente", geram uma curva em  $\mathbb{R}^2$ . O comportamento dêste tipo de dispositivo, quando interconctado em algum circuito, pode ser perfeitamente determinado com auxílio desta curva. Ela representa um modelo para o dispositivo e é a êsse modelo que chamamos de resistor.

Devido sua importância, certos tipos de resistores tomam nomes particulares. A título de exemplo consideremos os

dois resistores abaixo, onde  $\bar{\theta}$  e  $\bar{\varphi} \in \mathbb{R}$ .

$$C_1 = \{ (\theta, \varphi) \mid \theta = \bar{\theta} \text{ e } \varphi \in \mathbb{R} \}$$

$$C_2 = \{ (\theta, \varphi) \mid \varphi = \bar{\varphi} \text{ e } \theta \in \mathbb{R} \}$$

O resistor  $C_1$  é chamado fonte de d.p. de valor  $\bar{\theta}$  e o resistor  $C_2$  fonte de corrente de valor  $\bar{\varphi}$ . Em particular  $C_1$  é um resistor controlado por corrente ao passo que  $C_2$  é controlado por tensão.

Uma vez que caracterizamos resistor, definamos rêde resistiva.

4 Uma rêde resistiva é um par  $(G, F)$  onde  $G$  é um grafo e  $F: A \rightarrow P(\mathbb{R}^2)$ , onde  $A$  é o conjunto de ramos de  $G$ , é tal que para cada  $\alpha \in A$   $F(\alpha)$  é um resistor.

Se  $A = \{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \}$  e  $C_i = F(\alpha_i)$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ , dizemos que  $C_i$  é o resistor associado ao ramo  $\alpha_i$  e  $G$  é o grafo associado à rêde  $(G, f)$ .

Portanto uma rêde resistiva é um grafo com resistores associados a seus ramos.

Quando os elementos de um circuito elétrico puderem ser modelados por resistores, a rêde resistiva será um bom modelo para êste circuito.

Seja uma rêde resistiva com um grafo associado  $G$ . Suponha que  $G$  possua  $\underline{m}$  ramos,  $\underline{n}$  nós e que  $M$  é a sua

matriz de incidência. O problema fundamental de rêsdes resis-  
tivas é formulado como:

5 (PFR) Encontrar, se existir, um par

$$(\bar{\theta}, \bar{\varphi}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \quad \text{tal que}$$

$$a) \quad M\bar{\varphi} = 0$$

$$b) \quad \bar{\theta} = -M'p \quad \text{para algum } p \in \mathbb{R}^n$$

$$c) \quad (\bar{\theta}_i, \bar{\varphi}_i) \in C_i \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Se  $(\bar{\theta}, \bar{\varphi})$  satisfaz as condições a), b), e c) então  $(\bar{\theta}, \bar{\varphi})$  é dito solução da rêsde resistiva ou solução do (PFR). Ainda nêsse caso, dizemos que  $\bar{\theta}$  é a tensão solução de (PFR) e  $\bar{\varphi}$  o fluxo (ou corrente), solução de (PFR).

O (PFR) e o problema de encontrar correntes e diferenças de potencial em um circuito elétrico, constituído por dispositivos passíveis de representação por resistores, são problemas equivalentes.

De fato, num circuito elétrico dêste tipo, estamos interessados em encontrar pares de d.p. e correntes satisfazendo cada dispositivo isoladamente e que ao mesmo tempo satisfazam as leis de interconexão abaixo.

6 a) Lei de Kirchhoff para corrente: A soma algébrica das correntes entrando em um nó é

zero em qualquer instante.

- b) Lei de Kirchhoff para d.p.: A soma algébrica das d. p. ao longo de qualquer ciclo na rêde, é zero em qualquer instante.

No (PFR) estamos interessados em encontrar pares  $(\theta_i, \varphi_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , sôbre uma curva  $C_i$  (resistor) / que satisfaçam conjuntamente as condições a) e b) de (5). Porém 5-(a) e 5-(b) são segundo (II-20 e II-31) as leis de Kirchhoff.

Vejamos agora o significado de capacitor.

7 Um capacitor é um par  $(T, g)$  onde  $T$  é um intervalo real dito intervalo de tempo e  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua, estritamente crescente. A carga do capacitor é um real.

Se a carga do capacitor fôr  $\bar{q} \in \mathbb{R}$  então a tensão do capacitor para êsse valôr de carga é  $g(\bar{q}) \in \mathbb{R}$ . A função  $g$  é dita função característica do capacitor.

Suponha que  $T = [t_0, \bar{t})$  ( $\bar{t}$  possivelmente infinito) e seja  $\varphi: [t_0, \bar{t}) \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $t_0 \leq \bar{t} \leq \bar{t}$ , uma função integrável qualquer. Então  $\varphi(t)$  para  $t_0 \leq t \leq \bar{t}$  é dito corrente do capacitor no instante  $t$  e

$$q = \int_{t_0}^t \varphi(\alpha) d\alpha + q^0$$

é a carga do capacitor no instante  $t$  devido a corrente  $\varphi$ , sendo  $q^0 \in \mathbb{R}$  a carga inicial do capacitor.

Em nosso trabalho consideraremos sòmente capacitores em que  $T = \mathbb{R}$ , e portanto, os capacitores ficarão caracterizados exclusivamente pela sua função característica.

O conceito de capacitor envolve duas variáveis a mais do que o conceito de resistor. Ou seja, a variável tempo e a variável carga do capacitor.

Estamos interessados em construir um modelo para uma classe de circuitos elétricos: aqueles "constituídos por uma interconexão" de dispositivos passíveis de serem modelados por resistores ou capacitores. A êste modelo, desenvolvido em seguida, denominamos rêde RC.

8 Consideremos um grafo  $G$  com conjunto de ramos  $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ . Sejam  $C_i \in \mathbb{R}^2$  para  $i = 1, 2, \dots, k$ ,  $k < m$  resistores e  $\mathcal{C}_j = (\mathbb{R}, g_j)$   $j = k+1, \dots, m$  capacitores. Denominamos rêde RC a uma tripla da forma

$$(G, (C_i)_{i=1,2,\dots,k}, (\mathcal{C}_j)_{j=k+1,\dots,m}) .$$

Nêsse caso  $G$  é o grafo associado à rêde RC;  $C_i$  é o resistor associado ao ramo  $\alpha_i$  e  $\mathcal{C}_j$  o capacitor associado ao ramo  $\alpha_j$ .

Os ramos  $\alpha_i$  de  $G$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , aos quais estão associados resistores, chamamos de ramos resistivos. Os

demais ramos de  $G$  são chamados ramos capacitivos.

Rêde RC é um modelo constituído por um grafo onde a cada ramo está associado um capacitor ou um resistor. No caso de representar um circuito elétrico,  $G$  é que caracteriza a interconexão dos dispositivos do circuito.

Suponha que o grafo associado à rêde RC possui  $m$  ramos,  $n$  nós e que  $M$  é sua matriz de incidência.

$$\text{Seja } Z = \left\{ i \in \mathbb{N} \mid \alpha_i \text{ é um ramo capacitivo} \right\}$$

e

$$E = \left\{ i \in \mathbb{N} \mid \alpha_i \text{ é um ramo resistivo} \right\}$$

Sejam  $\mathcal{C} = [t_0, \bar{t})$  ( $\bar{t}$  possivelmente infinito) um intervalo de tempo e  $q^0 \in \mathbb{R}^z$  onde  $z$  é o número de ramos capacitivos do grafo  $G$ . O problema que enunciamos em seguida é o Problema fundamental de rêdes RC.

9 (PFRC) Encontrar, se existir, funções

$\theta: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\varphi: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $q: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^z$  onde  $\varphi$  é integrável em qualquer compacto contido em  $\mathcal{C}$ , tais que :

$$a) q_i(t) = \int_{t_0}^t \varphi_i(\alpha) d\alpha + q_i^0 \quad i \in Z$$

$$b) (\theta_i(t), \varphi_i(t)) \in C_i \quad i \in E$$

$$c) \theta_i(t) = g_i(q_i(t)) \quad i \in Z$$

$$d) M\varphi(t) = 0$$

$$e) \theta(t) = -M' p \quad \text{para algum } p \in \mathbb{R}^n .$$

Nêsse caso  $(\Theta, \varphi, q)$  é dito solução da rêde RC, no intervalo  $\mathcal{G}$ , com carga inicial  $q^0$ .

Nem sempre é possível colocar o (PFRC) no formato de um sistema de equações diferenciais. No entanto nós só estudaremos os casos onde isto é possível, garantindo assim, a existência de uma função  $H: \mathbb{R}^Z \rightarrow \mathbb{R}^Z$  tal que  $\frac{dq(t)}{dt} = H(q(t))$ .

Pelo símbolo  $\frac{dq(t)}{dt} = H(q(t))$  estamos representando a seguinte equação integral:

$$q(t) = \int_{t_0}^t H(q(\alpha)) d\alpha + q^0.$$

Outro problema de interêsse relacionado à rêde RC, e chamado problema de ponto de equilíbrio para rêdes RC, é o seguinte:

10 (PRCE) Encontrar  $(\bar{\Theta}, \bar{\varphi}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  tal que

$$a) \bar{\varphi}_i = 0 \quad \forall i \in Z$$

$$b) (\bar{\Theta}_i, \bar{\varphi}_i) \in C_i \quad i \in E$$

$$c) M \bar{\varphi} = 0$$

$$d) \bar{\Theta} = -M' \bar{p} \quad \text{para algum } \bar{p} \in \mathbb{R}^n.$$

Os vetores  $\bar{\Theta}, \bar{\varphi} \in \mathbb{R}^m$  tais que,  $(\bar{\Theta}, \bar{\varphi})$  resolve o (PRCE), são chamados respectivamente, de tensões e fluxos



de equilíbrio. E os valores  $\bar{q}_i$ ,  $i \in Z$ , de carga nos capacitores tais que  $\bar{\theta}_i = g_i(\bar{q}_i)$ , são chamados cargas de equilíbrio. O vetor  $\bar{q} \in \mathbb{R}^Z$  com componentes  $\bar{q}_i$ ,  $i \in Z$  é dito estado de equilíbrio da rede RC.

Note-se que a condição (a) do (PRCE) é equivalente a:

$$(\theta_i, \varphi_i) \in C_i, \quad i \in Z \quad \text{onde}$$

$$C_i = \left\{ (\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi = 0 \right\}$$

ou seja,  $C_i$  é a curva característica de uma fonte de corrente com valor nulo. A condição (c), por outro lado, exige apenas que  $\bar{\varphi}$  e  $\bar{\theta} \in \mathbb{R}^m$  sejam, respectivamente, fluxo e tensão de  $G$ .

Com essas observações, o (PRCE) passa a ser identificado como um problema fundamental de redes elétricas resistivas (PFR) (5), gerado a partir da rede RC, onde os capacitores foram substituídos por fontes de corrente com valores nulos (circuito aberto). Neste caso, podemos lançar mão das técnicas de resolução de redes resistivas, com o objetivo de determinar os pontos de equilíbrio de uma rede RC.

Na Seção 4 apresentaremos uma técnica para resolver o problema fundamental de uma rede resistiva, usando otimização. Veremos que esta técnica só poderá ser usada caso as curvas características dos resistores sejam crescentes, e, admitindo que esta hipótese seja verificada, nós transforma-

remos o (PRCE) (10) em um problema de otimização (ver Exemplo II).

Apresentaremos agora as definições de estabilidade de redes RC que usaremos no trabalho.

11 Uma rede RC é assintoticamente estável em  $\mathcal{C} = [t_0, +\infty)$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ , se para qualquer carga inicial  $q_i^0$ ,  $i \in Z$ , tivermos:

a) Existir solução  $(\theta, \varphi, q)$  do (PFRC) com  $q: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^Z$  único.

b) A função  $q$  é limitada e satisfaz  $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = \bar{q}$  onde  $\bar{q}$  é um estado de equilíbrio da rede.

Uma rede RC é assintoticamente estável em tensão e corrente se:

a) A rede é assintoticamente estável.

b) Para qualquer carga inicial  $q_i^0$ ,  $i \in Z$ , a rede possui solução única em  $\mathcal{C} = [t_0, +\infty)$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ .

c) A solução  $(\theta, \varphi, q)$  é limitada e satisfaz a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \bar{\theta}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \bar{\varphi}$$

onde  $(\bar{\theta}, \bar{\varphi})$  é um ponto de equilíbrio da rede RC.

### SECÇÃO 3 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE TRANSPORTE E ALGUNS RESULTADOS CONCERNENTES.

Como teremos ocasião de estudar na próxima secção, o problema fundamental de redes resistivas (7) com

curvas características crescentes, pode ser formulado por meio de um problema de transporte. Será sob esta formulação que desenvolveremos todo nosso trabalho.

O problema de transporte é um problema de otimização em grafos. Existem vários d'êste tipo e cada um sendo caracterizado pela estrutura particular do grafo, tipos de restrições impostas ao fluxo, ou pelo tipo de funcional objetiva. O problema de transporte que apresentaremos a seguir, é suficientemente geral para englobar grande parte d'êsses problemas.

12 Seja um grafo conexo  $G = (N, A, K)$  onde

$$N = \{n_1, n_2, \dots, n_n\} \quad e \quad A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$$

tendo  $M$  por matriz de incidência. A cada ramo  $\alpha_i \in A$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , façamos corresponder uma função convexa  $f_i : I_i \rightarrow \mathbb{R}$  onde  $I_i$  é um intervalo fechado.

O problema de transporte é definido como:

13 (PT) 
$$\text{Min} \sum_{i=1}^m f_i(\varphi_i)$$

sujeito a:  $\varphi \in X$  onde

14 
$$X = \{ \varphi \in \mathbb{R}^m \mid \varphi_i \in I_i, i = 1, 2, \dots, m, \text{ e } M\varphi = 0 \}$$

O (PT) definido em (13) é um problema de otimização com função objetivo e conjunto de restrições  $X \subset \mathbb{R}^m$  convexos. Ou seja, o (PT) é um problema convexo. Cada função  $f_i$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ , é chamada função custo e fornece o valôr do "custo" devido a passagem de um fluxo  $\varphi_i$  no ramo  $\alpha_i \in A$ . A palavra custo aqui empregada tem um sentido mais amplo que o

usual. Não está necessariamente ligada a preço podendo significar energia, tempo, etc.

Dizer que um fluxo  $\varphi \in \mathbb{R}^m$  é viável para (PT), é dizer que  $\varphi \in X$ . Enfim, o problema de transporte consiste em encontrar um fluxo viável com custo total mínimo.

Nem sempre existirá um fluxo viável para (PT). O teorema devido a HOFFMAN(60) que apresentaremos a seguir, dá condições de necessidade e suficiência para existência de um fluxo viável para (PT).

15 Teorema: Dados  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ ,  $a_i \leq b_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  com  $I_i = [a_i, b_i]$ , o conjunto  $X$  definido em (14) é não vazio se e somente se para todo  $Q \subset N$ ,  $N$  o conjunto de nós de  $G$ , tivermos:

$$16 \quad \sum_{\alpha_i \in \omega^+(Q)} b_i \geq \sum_{\alpha_k \in \bar{\omega}(Q)} a_k \quad e$$

$$17 \quad \sum_{\alpha_i \in \bar{\omega}(Q)} b_i \geq \sum_{\alpha_k \in \omega^+(Q)} a_k$$

Demonstração: Ver BERGE(62) pag. 159.

A condição (16) do Teorema nos diz que a máxima quantidade de fluxo que pode sair de  $Q$  é maior ou igual a mínima quantidade de fluxo que pode entrar em  $Q$ . E a condição (17) que a máxima quantidade de fluxo que pode entrar em  $Q$  é maior ou igual a mínima quantidade de fluxo que pode sair de  $Q$ . Entendemos por quantidade de fluxo a soma dos valores de fluxos nos ramos de  $\omega^+(Q)$  (II-6) ou  $\bar{\omega}(Q)$  (II-7).

Podemos formular um outro problema de otimização no grafo  $G$ , conhecido como problema de potencial, semelhante ao (PT), que trata com tensões em vez de fluxos de  $G$ . É conveniente enunciar-lo aqui, uma vez que este problema surge como uma alternativa para a resolução de uma classe de problemas de rede elétrica.

18 Associemos a cada ramo  $\alpha_i \in A$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , do grafo  $G$  uma função convexa  $h_i : J_i \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $J_i$  é um intervalo fechado. O problema de potencial é definido como:

$$19 \quad (PP) \quad \text{Min} \quad \sum_{i=1}^m h_i(\theta)$$

sujeito a:

$$\theta \in Y$$

onde

$$20 \quad Y = \left\{ \theta \in \mathbb{R}^m \mid \theta_i \in J_i, i=1, 2, \dots, m \text{ e } (\exists p \in \mathbb{R}^n) \mid \theta = -M'p \right\}$$

Um vetor  $\theta \in \mathbb{R}^m$  é uma tensão viável para (PP) se  $\theta \in Y$ . Análogamente ao teorema (15) o teorema seguinte fornece condições que garantem a existência de uma tensão viável para (PP).

21 Teorema: Dados  $c_i, d_i \in \mathbb{R}$ ,  $c_i \leq d_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , com  $J_i = [c_i, d_i]$  o conjunto  $Y$  definido em

(20) é não vazio se e somente se para todo ciclo elementar (II-11)  $\mu$  de  $G$  tivermos:

$$22 \quad \sum_{\alpha_i \in \mu^-} d_i \geq \sum_{\alpha_i \in \mu^+} c_i \quad e$$

$$23 \quad \sum_{\alpha_i \in \mu^+} d_i \geq \sum_{\alpha_i \in \mu^-} c_i$$

Demonstração: Ver BERGE(62) pag. 157.

#### SECÇÃO 4 - RÉDES RESISTIVAS E O PROBLEMA DE TRANSPORTE.

24 Quando da formulação do problema fundamental de  $\hat{r}_e$  de resistiva (5) não fizemos hipóteses sobre as curvas características dos resistores. Nesta secção, mostraremos, sob a hipótese de que as curvas características são crescentes, que aquêl problema pode ser formulado como um problema de transporte ou um problema de potencial.

Precisemos o conceito de curva crescente.

25 Definição: Uma curva  $C \subset \mathbb{R}^2$  é uma curva crescente quando:

$$a) (\forall (x^1, y^1), (x^2, y^2) \in C) (x^1 - x^2)(y^1 - y^2) \geq 0$$

e

$$b) (\forall \alpha \in \mathbb{R}) (\exists (x, y) \in C) x + y = \alpha$$

A condição (a) significa que a curva não possui

inclinação negativa: a "resistência dinâmica" de um resistor com curva "característica crescente" é não-negativa. A condição (b) exige que qualquer reta com inclinação de  $135^\circ$  corte a curva em um único ponto. Neste caso, se a projeção vertical da curva for limitada superiormente (inferiormente) então a projeção horizontal da curva será ilimitada superiormente (inferiormente).

A Figura 2 abaixo representa várias curvas. Note-se que 2-(a), 2-(b), 2(c) e 2-(d) representam curvas crescentes, ao passo que 2-(e) e 2-(f) não representam, porque não satisfazem (25-(b)).

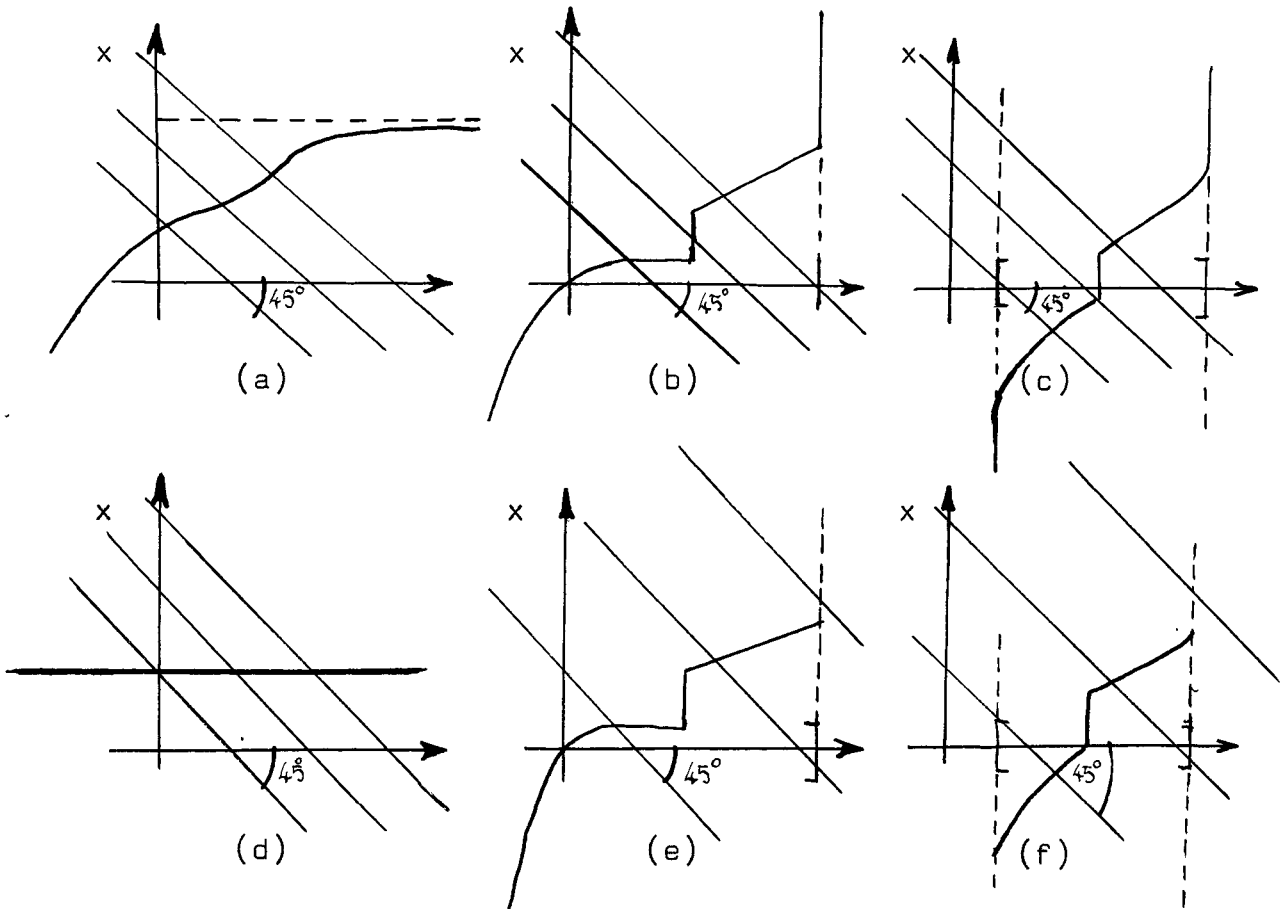


Figura 2.

Dada uma curva  $C \subset \mathbb{R}^2$  denominamos projeção horizontal de C ao conjunto:

$$26 \quad PH(C) \triangleq \{x \in \mathbb{R} \mid (\exists y \in \mathbb{R}) (x, y) \in C\}$$

e projeção vertical de C ao conjunto:

$$27 \quad PV(C) \triangleq \{y \in \mathbb{R} \mid (\exists x \in \mathbb{R}) (x, y) \in C\}$$

Como a função que define uma curva é contínua então as projeções de uma curva são intervalos reais.

Dada uma curva  $C \subset \mathbb{R}^2$  e um ponto  $x \in \mathbb{R}$  a imagem vertical de x através de C é o conjunto:

$$IV(x) \triangleq \{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in C\}$$

enquanto imagem horizontal de y através de C é o conjunto:

$$IH(y) \triangleq \{x \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in C\}$$

Note-se que se C é uma curva crescente, então  $IV(x)$  e  $IH(x)$  são intervalos fechados.

Mostraremos em seguida que a toda curva crescente em  $\mathbb{R}^2$  podemos associar unívocamente, a menos de uma constante, uma função convexa de  $PV(C)$  em  $\mathbb{R}$  e outra de  $PH(C)$  em  $\mathbb{R}$ .



Dada uma curva crescente  $C \subset \mathbb{R}^2$  (ver Figura 3) com projeções  $J = PH(C)$  e  $I = PV(C)$ , consideremos duas funções quaisquer

$$\Theta : I \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \Phi : J \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tais que:}$$

$$28 \quad \Theta(\varphi) \in IH(\varphi) \quad \text{e} \quad \Phi(\theta) \in IV(\theta)$$

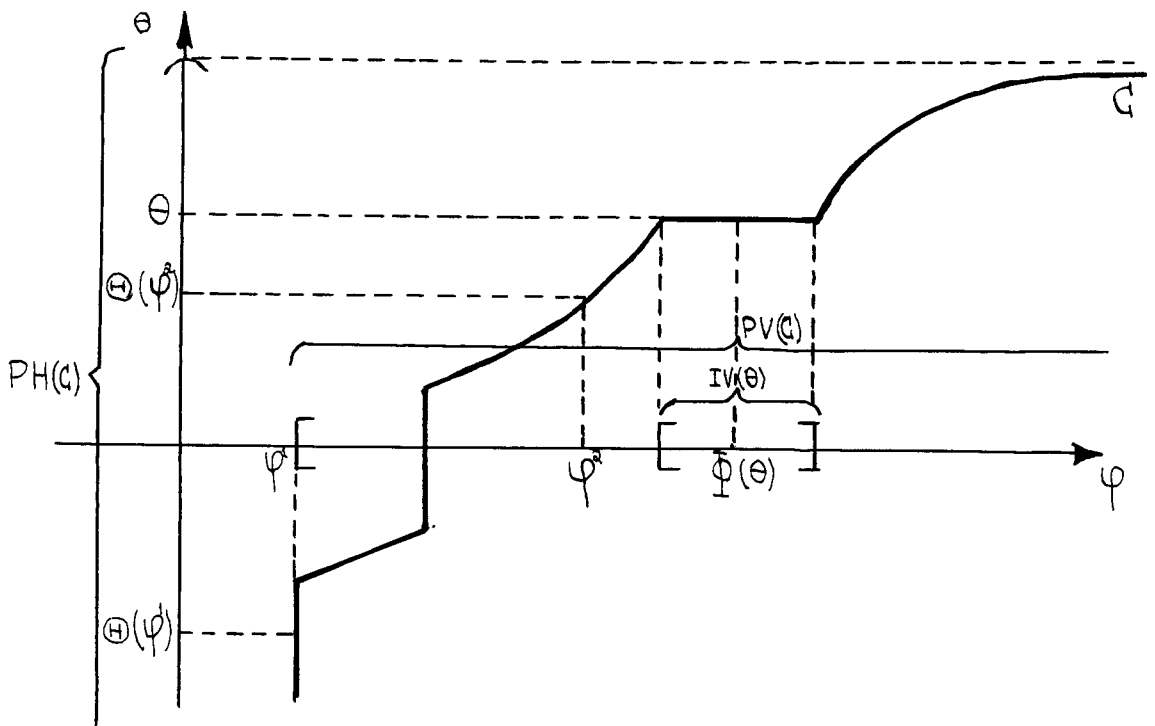


Figura 3.

Evidentemente, as funções  $\Theta$  e  $\Phi$  são crescentes e pode-se demonstrar que são contínuas, exceto em um subconjunto enumerável de seus domínios, sendo portanto integráveis (Ver ROCKAFELLAR(70) secção 24).

Sejam  $\bar{\varphi} \in I$  e  $\bar{\theta} \in J$ , definamos:

$$29 \quad f(\varphi) \triangleq \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Theta(\varphi) \, d\varphi \quad (\forall \varphi \in I)$$

$$30 \quad h(\theta) \triangleq \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Phi(\theta) \, d\theta \quad (\forall \theta \in J)$$

Pode-se demonstrar que as funções  $f$  e  $h$  definidos acima, são convexas, contínuas e subdiferenciáveis em seus respectivos domínios (ver ROCKAFELLAR(70)). Além disso, as subdiferenciais (A-7) de  $f$  e  $h$  são dadas por:

$$\partial f(\varphi) = I_H(\varphi) \quad \forall \varphi \in I$$

$$\partial h(\theta) = I_V(\theta) \quad \forall \theta \in J$$

Para esclarecer melhor tomemos um exemplo.

31 Exemplo I: Sejam as curvas crescentes representadas pela Figura 4. Determinemos aplicando (29) as respectivas funções convexas.

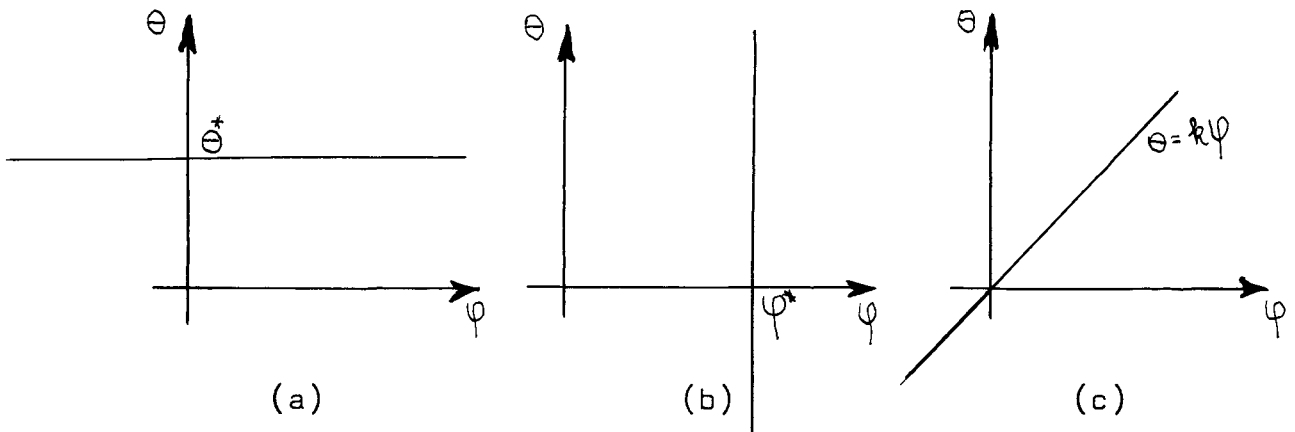


Figura 4.

A Figura 4-(a) representa uma fonte de d.p. de valor  $\Theta^*$ , a Figura 4-(b) uma fonte de corrente de valor  $\varphi^*$  e a Figura 4-(c) um resistor linear.

Para a fonte de d.p. temos:

$$IH(\varphi) = \{ \Theta^* \} \quad \forall \varphi \in \mathbb{R} \quad \text{logo}$$

$$32 \quad \Theta(\varphi) = \Theta^* \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}$$

Para a fonte de corrente

$$IH(\varphi^*) = \mathbb{R} \quad \text{então, podemos tomar}$$

$$33 \quad \Theta(\varphi^*) = \Theta \quad \text{onde } \Theta \text{ é um real fixo qualquer.}$$

E para o resistor linear

$$IH(\varphi) = \{ k\varphi \} \quad \forall \varphi \in \mathbb{R} \quad \text{logo}$$

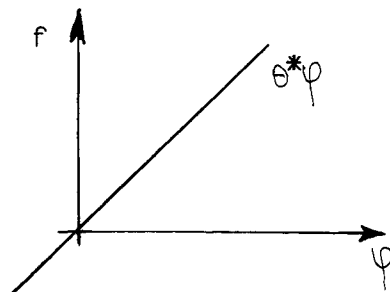
$$34 \quad \Theta(\varphi) = k\varphi \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}$$

De posse de (32), (33) e (34) e aplicando (29), teremos:

35 Fonte de d.p.

$$\text{Tomando } \bar{\varphi} = 0$$

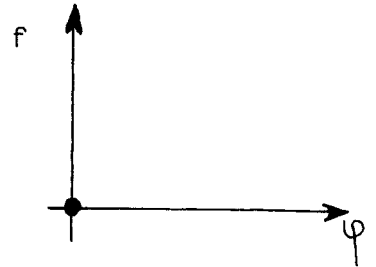
$$f(\varphi) \triangleq \int_0^{\varphi} \Theta^* d\varphi = \Theta^* \varphi$$



36 Fonte de corrente

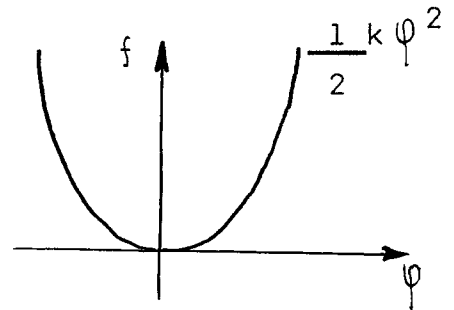
$$\text{Tomando } \bar{\varphi} = \varphi^*$$

$$f(\varphi) \triangleq \int_{\varphi^*}^{\varphi^*} \theta d\varphi = 0$$

37 Resistor linear

$$\text{Tomando } \bar{\varphi} = 0$$

$$f(\varphi) \triangleq \int_0^{\varphi} k \varphi d\varphi = \frac{1}{2} k \varphi^2$$



Note-se que as funções obtidas em (35), (36) e (37) são funções convexas.

As funções  $f$  e  $h$  não são independentes e se  $I$  e  $J$  são intervalos fechados, então:

$$f(\varphi) + h(\theta) \leq \theta \varphi \quad \forall \theta \in J \quad \forall \varphi \in I$$

$$f(\varphi) + h(\theta) = \theta \varphi \quad \text{se } \theta \in IH(\varphi) \text{ ou } \varphi \in IV(\theta)$$

e

$$f(\varphi) = \sup \{ \theta \varphi - h(\theta) \mid \theta \in J \} \quad \varphi \in I$$

$$h(\theta) = \sup \{ \theta \varphi - f(\varphi) \mid \varphi \in I \} \quad \theta \in J$$

Ver IRI(69) pag. 22.

Observe-se que as funções  $f$  e  $h$  definidas em (25) e (26) independem das funções  $\Theta$  e  $\Phi$  desde que estas satisfaçam a (24). De fato,  $f$  e  $h$  dependem sòmente da curva  $C$  e dos pontos  $\bar{\varphi}$  e  $\bar{\theta}$  escolhidos arbitrariamente. Se em (25) utilizarmos outro ponto  $\varphi^* \in I$  em lugar de  $\bar{\varphi}$  a nova função será igual a anterior a menos de uma constante. Nêsse sentido as funções  $f$  e  $h$  são univocamente determinadas por  $C$ .

Em seguida, formularemos o problema de rêde resistiva (5) como um problema de transporte.

Seja agora, uma rêde resistiva qualquer com resistores possuindo curvas características crescentes com projeções verticais fechadas. Seja  $G$  um grafo associado a esta rêde possuindo  $m$  ramos. Tomemos cada curva característica  $C_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , e determinemos as respectivas funções / convexas  $f_i: I_i \rightarrow \mathbb{R}$  conforme (29). Como já vimos, o domínio  $I_i$  de cada uma destas funções  $f_i$  são as projeções verticais das respectivas curvas características.

38 Chamamos de problema de transporte associado a rêde (PTA), ao problema de transporte (13) onde as  $f_i, i=1, 2, \dots, m$ , são as funções convexas obtidas acima e  $M$  é a matriz de incidência do grafo  $G$  associado à rêde.

Note-se que:

39 
$$\theta_i \in \partial f_i(\varphi_i) \iff (\theta_i, \varphi_i) \in C_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

A título de exemplo tomemos o problema de ponto de equilíbrio (PRCE) e vejamos como se constroi o problema de transporte associado.

40 Exemplo II: Seja o (PRCE) da r $\hat{e}$ de RC dado em (10). Como j $\acute{a}$  vimos,  $\hat{e}$ ste problema pode ser encarado como um problema de r $\hat{e}$ de resistiva onde os capacitores s $\tilde{a}$ o substituídos por fontes de corrente com val $\hat{o}$ r nulo. Admitindo que na respectiva r $\hat{e}$ de RC todos os resistores possuam curvas característic $\acute{a}$ s crescentes, com projeções verticais fechadas e, levando em conta que fontes de corrente satisfazem esta / condiç $\tilde{a}$ o, poderemos ent $\tilde{a}$ o construir um problema de transporte associado. Passemos a construí-lo.

Os ramos capacitivos de  $G$  foram substituídos por fontes de corrente com val $\hat{o}$ r nulo, e, de ac $\hat{o}$ rdo com (36) teremos:

$\Psi : I_i \rightarrow \mathbb{R}$  é a funç $\tilde{a}$ o que:

41  $\Psi(0) = 0$  ,  $I_i = \{0\}$  ,  $\forall i \in Z$  (9)

e para os demais resistores teremos:

42  $f_i : I_i \rightarrow \mathbb{R}$  ,  $i \in E$  , definida pela integral(29)

De posse de (41) e (42) e revendo a formulaç $\tilde{a}$ o do problema de transporte (13), o problema de transporte associado fica:

$$43 \quad (\text{PTA-PRCE}) \quad \text{Min} \sum_{i \in E} f_i(\varphi_i) + 0$$

sujeito a:

$$\varphi_i = 0 \quad \forall i \in Z$$

e

$$\varphi \in X \quad \text{onde}$$

$$44 \quad X = \left\{ \varphi \in \mathbb{R}^m \mid \varphi_i \in I_i, \forall i \in E, \text{ e } M\varphi = 0 \right\}$$

Com o Exemplo II, vimos como se constroi um problema de transporte associado à uma rêde resistiva. Êste exemplo nos será útil na secção 2 do capítulo IV onde lançaremos mão do (PTA-PRCE), que encarado como um problema primal nos permitirá, usando dualidade, tirar algumas conclusões úteis para a análise de rêdes RC.

O teorema que apresentamos em seguida permite estabelecer a equivalência entre o problema de transporte associado a uma rêde resistiva, com curvas características crescentes, e o problema fundamental desta rêde. Êste teorema é apresentado em BERGE(62) pag. 165.

45 Teorema: Suponhamos que o PT(13) é estável. Um fluxo  $\bar{\varphi} \in X$  é uma solução de (PT) se e somente se existir uma tensão  $\bar{\theta} \in \mathbb{R}^m$  satisfazendo:

$$46 \quad \bar{\theta}_i \in \partial f_i(\bar{\varphi}_i) \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Demonstração: Ver PERSIANO(71) pag. 20.

O conceito de estabilidade para problemas de otimização se encontra em (A-17).

O (PTA)(38) é um problema de transporte com funções custo subdiferenciáveis (por construção) e com todos os vínculos lineares. Portanto, de acordo com o Teorema (A-21), a existência de solução do (PTA) implica em estabilidade. Logo, pelo Teorema (45) e por (39), todo fluxo solução do problema fundamental de uma rede resistiva, com curvas características crescentes e projeções verticais fechadas, é solução do problema de transporte associado e vice-versa.

A uma rede resistiva com curvas características/crescentes e projeções horizontais fechadas podemos associar um problema de potencial associado (PPA) com funções custo obtidas conforme (30). Pode-se demonstrar por meio de um teorema apresentado em BERGE(62) pag. 167 (semelhante ao 45), que: toda solução do problema de potencial associado a uma rede resistiva é uma tensão solução do problema fundamental desta rede e vice-versa. Apesar desta nova equivalência formar mais uma alternativa para o estudo das redes elétricas, nós não a utilizaremos em nosso estudo.

Na seção seguinte daremos condições que garantem a existência e unicidade de solução de (PT). Estabeleceremos daí, condições que garantem a existência e unicidade de solução de redes elétricas resistivas possuindo curvas caracterís



ticas crescentes com projeções verticais fechadas.

SECÇÃO 5 - EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO DO (PT).

De acôrdo com o Teorema (45) a existência de solução do problema de transporte associado à rêde, implica em existência de solução do problema fundamental desta rêde e vice-versa. No entanto, êste teorema não nos fornece os meios de garantir existência e unicidade de solução. Trabalharemos aqui no sentido de fornecer condições que garantam existência e unicidade de solução de (PT).

Primeiramente apresentemos um teorema de unicidade.

47 Teorema: Seja  $G$  o grafo sôbre o qual o (PT)(13) foi definido. Suponhamos que exista uma coárvore  $H = (N, B)$  de  $G$  tal que as funções  $f_i$  associadas aos ramos  $\alpha_i \in B$ , sejam estritamente convexas. A solução do (PT) (caso exista) será então única.

Demonstração: Ver BERGE(62) pag.169.

Com o Teorema (47), e admitindo existência de solução, podemos garantir a unicidade do fluxo solução de (PT). Aplicando o Teorema (45), temos unicidade de solução de um

problema de transporte associado a uma rêde se e s omente se existir um único fluxo soluço do problema fundamental desta rêde.

Pela constru o de (PTA)(38), a uma curva caract erística estritamente crescente corresponderá uma fun o estritamente convexa. Uma curva característica   dita estritamente crescente quando   uma curva crescente sem "patamares horizontais". Um resistor que possua curva característica / estritamente crescente   um resistor controlado por tensão. Teremos portanto, unicidade de fluxo soluço do problema fundamental de uma rêde resistiva com curvas características / crescentes, quando:

48           Existir uma coárvore do grafo associado a rêde onde todos os resistores associados a ramos desta coárvore forem controlados por tensão.

O Teorema (47) garante unicidade de soluço do (PT) pressupondo, no entanto, a existência de soluço. O teorema que apresentaremos a seguir, fornece condi es que garantem a existência de soluço de (PT). Para demonstrá-lo utilizaremos o conceito de fun o convexa "quase suave" (ver A-39).

49           Teorema: Consideremos o PT(13) com fun es custo subdiferenciáveis, correspondente a um grafo  $G = (N, A, K)$  com  $n$  nós e  $m$  ramos. Suponhamos

que exista uma coárvore  $H$  de  $G$  tal que as funções custo associadas a ramos de  $H$  sejam funções convexas quase suaves. Então existe solução do (PT) se e somente se  $X \neq \emptyset$  ou seja o (PT) é viável.

Demonstração: ( $\Leftarrow$ ) Neste sentido a demonstração é evidente. Se existe  $\bar{\psi} \in \mathbb{R}^m$  solução do (PT)  $\Rightarrow \bar{\psi} \in X$ . Logo  $X$  é não vazio.

$$(\Rightarrow) \quad X \neq \emptyset.$$

Primeiramente reformularemos o (PT), colocando-o numa forma mais conveniente.

Seja  $(N,B)$  a árvore de  $G$  correspondente a coárvore  $H$ . Definamos os conjuntos:

$$\text{CoA} \triangleq \left\{ i \in \mathbb{N} \mid \alpha_i \in A-B \right\}$$

e

$$\text{Ar} \triangleq \left\{ i \in \mathbb{N} \mid \alpha_i \in B \right\}$$

O conjunto  $\text{CoA}$  é o conjunto dos índices que caracterizam os ramos da coárvore  $H$  e  $\text{Ar}$  o conjunto dos índices que caracterizam os ramos de  $G$  na árvore  $(N,B)$ .

Seja  $S$  a matriz fundamental de  $G$  construída a partir da coárvore  $H$  (ver II-24). Sendo  $\underline{r}$  a dimensão da

base de ciclos de  $G$ , um fluxo  $\varphi \in \mathbb{R}^m$  de  $G$  pode ser representado por:

$$50 \quad \varphi = Sp$$

onde  $p = \varphi_{\text{CoA}}$  é um vetor de  $\mathbb{R}^r$ .

Chamemos de  $S_i$  a  $i$ -ésima linha da matriz  $S$ .

Uma componente  $\varphi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , de um fluxo  $\varphi$  de  $G$  pode ser expressa como:

$$51 \quad \varphi_i = \langle S_i, p \rangle$$

Devido a (50) e (51) temos:  $S_i = e^i$  para  $i \in \text{CoA}$  onde  $e^i \in \mathbb{R}^r$ , é o  $i$ -ésimo vetor da base canônica de  $\mathbb{R}^r$ .

Com a observação acima e por (50) e (51), o (PT) (13) pode ser reescrito como:

$$52 \quad (\text{PTM}) \quad \text{Min} \sum_{i \in \text{Ar}} f_i(\langle S_i, p \rangle) + \sum_{i \in \text{CoA}} f_i(p_i)$$

sujeito a  $p \in X_M$

onde

$$53 \quad X_M = \left\{ p \in \mathbb{R}^r \mid \langle S_i, p \rangle \in I_i, \forall i = 1, 2, \dots, m \right\}$$

O (PTM) e o (PT) são problemas equivalentes:

$\bar{p} = \bar{\psi}_{CoA} \in \mathbb{R}^r$  é solução de (PTM) se e somente se  
 $\bar{\psi} = S \bar{\psi}_{CoA} \in \mathbb{R}^m$  é solução de (PT); e os conjuntos  $X$   
 (14) e  $X_M$  (52) são tais que:  $X = \emptyset \iff X_M = \emptyset$ . Note-se  
 ainda que:  $I_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  é um intervalo fechado (ver-  
 12) o que implica  $X_M$  ser fechado.

Como estamos supondo  $X \neq \emptyset$  então  $X_M \neq \emptyset$ . De-  
 finamos as funções  $F: X_M \rightarrow \mathbb{R}$  e  $G: I \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$54 \quad F(p) \triangleq \sum_{i \in Ar} f_i (\langle S_i, p \rangle)$$

e

$$55 \quad G(p) \triangleq \sum_{i \in CoA} f_i (p_i)$$

onde  $I = \bigcap_{i \in CoA} I_i$ . Note-se que  $X_M \subset I$

De posse de (54) e (55) o (PTM) fica reduzido a:

$$56 \quad (PTM) \quad \min_{p \in X_M} F(p) + G(p).$$

Mostraremos que o (PTM) possui um ponto de míni  
mo. As funções  $F$  e  $G$ , definidas em (54) e (55), são con  
vexas e subdiferenciáveis em seus domínios. Temos:

$$\partial G(p) = \bigcap_{i \in CoA} \partial f_i (p_i)$$

e como  $f_i$ , para  $i \in \text{CoA}$ , é por hipótese quase suave então:

$$\begin{aligned} \bigcup_{p \in I} \partial G(p) &= \bigcup_{p \in I} \bigcap_{i \in \text{CoA}} \partial f_i(p_i) \\ &= \bigcap_{i \in \text{CoA}} \bigcup_{p \in I} \partial f_i(p_i) = \mathbb{R}^r \end{aligned}$$

provando que  $G$  é quase suave em  $I$ .

Então pelo Teorema (A-47),  $F + G$  é quase suave em  $X_M$ . Logo, pelo Lema (A-41),  $F + G$  possui ponto de mínimo em  $X_M$ , provando a tese. (C.Q.D)

O Teorema (49) fornece condições que garantem a existência de solução de um problema de transporte com funções custo subdiferenciáveis. No (PTA) as funções custo são subdiferenciáveis. Portanto, se o problema de transporte associado a uma rede satisfizer as hipóteses do Teorema (49), a existência de solução será garantida. Logo, pelo Teorema (45) garantimos a existência de solução do problema fundamental da rede.

Revolvendo a construção do (PTA) (38) e com as condições de existência de solução do Teorema (48) podemos afirmar que o problema fundamental de uma rede resistiva possui solução se:

- 57
- i) as curvas características forem crescentes e possuírem projeções verticais fechadas.
  - ii) Existir uma corrente viável na rede (fluxo  $v_i$

- ável para o problema de transporte associado).
- iii) Existir uma coárvore  $H$  do grafo associado a rêde onde os resistores associados a ramos de  $H$  são "resistores suaves".

58 Chamamos de resistor suave, a todo resistor que possui uma curva característica crescente onde a projeção vertical é fechada e a projeção horizontal é a reta real. Isto é: qualquer d.p. aplicada aos terminais de um resistor suave fará circular uma corrente. Note-se que uma fonte de corrente constante é um resistor suave.

A condição (57-(i)) permite a construção do problema de transporte associado a rêde. A condição (ii) garante a viabilidade deste problema. E a condição (iii) implica que as funções convexas associadas aos ramos de  $H$ , sejam funções convexas suaves.

Uma rêde resistiva que além de satisfazer (57) satisfizer também a condição de unicidade (49), terá garantida a existência de pelo menos um par  $(\Theta, \varphi)$  (tensão, fluxo), com  $\varphi$  único, solução do problema fundamental.

O teorema devido a IRI(69) que enunciamos em seguida, fornece outras condições para garantia de existência de solução de um (PTA). Este teorema relaxa, sob certos aspectos, as hipóteses do Teorema (49) e restringe sobre outros

59 Teorema: Consideremos o (PTA) (38) corresponden

te ao grafo associado à r $\hat{e}$ de G. Suponhamos que as projeções verticais e horizontais das curvas características dos resistores sejam intervalos fechados. Ent $\hat{a}$ o existir $\hat{a}$   $\bar{\varphi} \in \mathbb{R}^m$  solu $\hat{c}$ o do (PTA) se e s $\hat{o}$ mente se:

- i) Existir um fluxo vi $\hat{a}$ vel para G.
- ii) Existir uma tens $\hat{a}$ o vi $\hat{a}$ vel para G.

Demonstra $\hat{c}$ o: Ver IRI(69) pag. 100.

O Teorema (59) garante exist $\hat{e}$ ncia de solu $\hat{c}$ o do (PTA) sem necessitar da hip $\hat{o}$ tese de fun $\hat{c}$ o convexa quase suave usada no Teorema (49). Por outro lado, imp $\hat{o}$ e que t $\hat{o}$ das as curvas caracter $\hat{i}$ sticas tenham proje $\hat{c}$ oes horizontais fechadas, eliminando assim a possibilidade de curvas caracter $\hat{i}$ sticas / com ass $\hat{i}$ ntotas horizontais, permitido no Teorema (49). Juntos,  $\hat{e}$ sses dois teoremas ampliam as condi $\hat{c}$ oes de exist $\hat{e}$ ncia de (PT).

Uma r $\hat{e}$ de resistiva constitu $\hat{i}$ da por fontes de d.p. e diodos ideais, satisfaz as hip $\hat{o}$ teses do Teorema (59) e portanto podemos verificar tamb $\hat{e}$ m a exist $\hat{e}$ ncia de solu $\hat{c}$ o do problema fundamental d $\hat{e}$ ste tipo de r $\hat{e}$ de. Isto n $\hat{a}$ o seria permitido, caso nos limit $\hat{a}$ ssemos apenas  $\hat{a}$ s condi $\hat{c}$ oes do Teorema (49) expressas em (57), pois fontes de d.p. e diodos ideais n $\hat{a}$ o s $\hat{a}$ o resistores suaves, tornando imposs $\hat{i}$ vel a verifica $\hat{c}$ o da condi $\hat{c}$ o (57-(iii)).



SECÇÃO 6 - CONCLUSÃO.

O estudo que fizemos neste capítulo, tratando problemas de rêdes resistivas como problemas de transporte, permitiu encontrar condições que garantem existência de tensão e fluxo (com unicidade de fluxo) solução do problema fundamental de uma classe de rêdes resistivas. Podemos garantir também a unicidade da tensão, por meio de um teorema análogo ao (47) apresentado também em BERGE(62) pag.169, bastando que:

60           Exista uma árvore do grafo associado a rêde onde todos os resistores associados a ramos desta árvore sejam resistores controlados por corrente.

Juntando as condições de existência (57) com as condições de unicidade de fluxo (48) e tensão (60), determinamos uma classe de rêde onde existe sempre um único par  $(\bar{\theta}, \bar{\psi})$  solução do problema fundamental.

Diversos autores vêm se dedicando últimamente ao estudo de rêdes resistivas não lineares. O objetivo desses estudos é em particular, a procura de condições que garantam existência e unicidade de solução do problema fundamental, e algoritmos para encontrá-la.

No que diz respeito a rêdes resistivas com curvas características crescentes, o que foi obtido até pouco tempo com relação a existência e unicidade, pode ser considerado como uma generalização dos trabalhos de DUFFIN

(47) sôbre o assunto. SANDBERG E WILLSON(72) apresentam con<sub>u</sub>dições menos restritivas, porém sem englobar totalmente as já obtidas por DESOER E KATZENELSON(65). As condições obtidas aqui (existência e unicidade de solução do (PFR)), permitem a presença de resistores não controlados além de incluir as condições dadas por Desoer e Katzenelson, e de certa forma, as de Sandberg e Willson .

## C A P Í T U L O I V

RÊDES RC E OTIMIZAÇÃO.SECÇÃO 1 - INTRODUÇÃO.

Vimos no capítulo anterior que os problemas de "ponto de equilíbrio" de uma classe de rêsdes RC podiam ser tratados como problemas de transporte. Desenvolveremos agora baseando-nos nesta identificação, um estudo sôbre esta classe de rêsdes RC.

Na Secção 2, estudaremos certos detalhes dessa classe de rêsdes RC, que serão fundamentais para a elaboração do modelo dinâmico (Secção-3) e para o estudo da estabilidade, assunto do capítulo seguinte.

O modelo dinâmico será caracterizado por um sistema de equações diferenciais, na forma normal, tendo como variáveis de estado, cargas de capacitores.

Na Secção 4 abordaremos a questão de existência e unicidade de solução dêsse sistema de equações diferenciais.

## SECÇÃO 2 - DUALIDADE, PROBLEMA DE TRANSPORTE E RÊDES RC.

Nesta secção, estudaremos dois problemas de otimização, com formato de problemas de transporte, associados a uma rêde RC. Através dêsse estudo, obteremos uma série de propriedades de uma classe de rêdes RC, que permitirão nas secções seguintes, obtermos o modelo dinâmico da rêde, e condições para a existência de solução do sistema dinâmico resultante.

O primeiro dêsse problemas está associado a busca de fluxos (correntes) de equilíbrio da rêde; enquanto o segundo fornece, como solução, a "resposta" da rêde, em termos de fluxo, aos valôres de carga dos capacitores. Os dois problemas serão interrelacionados através de resultados de dualidade GEOFFRION(71).

Em todo o capítulo, consideraremos uma rêde RC, modelada por um grafo  $G$  com  $n$  nós e  $m$  ramos. Denotaremos por  $Z$  o conjunto dos índices  $i$  dos ramos capacitivos  $\alpha_i$  de  $G$ . E denotaremos por  $E$  o respectivo conjunto dos ramos resistivos. Supomos haver "z" capacitores e "e" ramos resistivos. A hipótese abaixo será suposta válida em todo o restante do trabalho:

- 1 (H1) Todos os resistores da rêde possuem curvas características crescentes com projeções verticais fechadas.

Um dos problemas importantes na análise de rêsdes RC é a determinação das correntes e diferenças de potenciais de equilíbrio, problema que enunciamos em (III-10) sob o nome (PRCE). Em (III-40), vimos que, sob a (H1), o (PRCE) / podia ser transformado em um problema de transporte, que re produzimos abaixo para facilitar a consulta:

$$2 \quad (\text{PTA-PRCE}) \quad \text{Min} \sum_{i \in E} f_i(\varphi_i)$$

sujeito a

$$\varphi_i = 0 \quad \forall i \in Z$$

$$\varphi \in X$$

onde

$$3 \quad X = \left\{ \varphi \in \mathbb{R}^m \mid \varphi_i \in I_i, i \in E \text{ e } M\varphi = 0 \right\}$$

Lembramos que nêsse problema  $M$  representa a matriz de incidência de  $G$ ,  $I_i$  são as projeções verticais das curvas características dos resistores, e  $f_i$  as funções convexas associadas aos resistores da rêsde.

Todo vetor  $\bar{\varphi} \in \mathbb{R}^m$ , solução de (PTA-PRCE) será um fluxo de equilíbrio da rêsde RC. Como o estudo de estabilidade da rêsde perde o sentido caso (2) não tenha solução, iremos limitar nosso estudo a rêsdes em que as condições de existência do Teorema (III-49) são satisfeitas. Aquelas con

dições, aplicadas ao (PTA-PRCE), resultam nas condições abaixo que admitiremos como hipótese:

4 (H2) O conjunto  $X$  é não vazio e existe  $\varphi \in X$  com  $\varphi_Z = 0$

(H3) Existe uma coárvore de  $G$  constituída exclusivamente de ramos associados a resistores suaves ou capacitores.

A equivalência entre (H2)-(H3) e as condições do Teorema (III-49) fica evidenciada por: a) fontes ideais de corrente são resistores suaves e b)- o (PRCE) é equivalente ao problema de buscar soluções da rêde na qual capacitores / são substituídos por fontes de corrente (de valor nulo).

Um segundo problema de interêsse é o problema de determinar o valôr instantâneo da corrente na rêde RC, a partir dos valôres instantâneos das diferenças de potencial presentes nos capacitores. Em outros têrmos: dados os valôres das diferenças de potencial nos capacitores encontrar as correntes na rêde. Mas êste problema equivale a buscar as soluções de uma rêde resistiva: a rêde obtida pela substituição dos capacitores por fontes de tensão com os valôres da d.p. dos capacitores. Construamos o problema de transporte associado a esta última rêde resistiva.

Seja  $\theta_i$  o valôr da dif. de pot. no ramo capacitivo  $\alpha_i$  de  $G$ . Então, a função convexa associada a êsse ra

mo será  $f_i(\varphi_i) = \theta_i \times \varphi_i (i \in Z)$ . Nos ramos resistivos as funções convexas são  $f_i$ ,  $i \in E$ . Então, o problema de transporte associado fica:

$$5 \quad (PTA-P\Theta_Z) \quad \text{Min} \quad \sum_{i \in E} f_i(\varphi_i) + \sum_{i \in Z} \theta_i \times \varphi_i$$

sujeito a  $\varphi \in X$

Portanto, se  $\Theta_Z \in \mathbb{R}^Z$  é o valôr da dif. de pot. nos capacitores, e  $\bar{\varphi}$  é uma solução de  $(PTA-P\Theta_Z)$  então  $\bar{\varphi}$  é o valôr do fluxo na rêde devido a  $\Theta_Z$ .

Para garantirmos que a rêde possui solução para qualquer valôr de d.p. nos capacitores, admitiremos que as condições de existência do Teorema (III-49) são verificadas por  $(PTA-P\Theta_Z)$  para quaisquer valôres de  $\Theta_Z$ . Ou seja, vamos supor que a rêde satisfaz as hipóteses (H1), (H2) e

6 (H4) Existe uma coárvore de  $G$  constituída exclusivamente de ramos associados a resistores suaves.

Observe-se que por (H4) a coárvore não pode conter ramos capacitivos. Isto se deve ao fato de que, em  $(PTA-P\Theta_Z)$ , os ramos capacitivos estarem associados a fontes de d.p. que não são resistores suaves.

Outra observação: a hipótese (H4) impede que tenhamos na rêde um ciclo constituído exclusivamente de capaci

tores. Se tal ciclo existisse então, evidentemente, as componentes de  $\Theta_Z$  não seriam independentes.

Uma terceira observação: a hipótese (H4) implica em (H3). Portanto, (H2) e (H4) não só implicam na existência de solução de  $(PTA-P\Theta_Z)$  como de  $(PTA-PRCE)$ . Portanto a hipótese (H3) pode ser abandonada e adotaremos somente a (H4).

A condição abaixo exprime uma forma alternativa de enunciarmos (H4):

- 7 (H4a) Existe uma árvore de  $G$  contendo todos os ramos capacitivos e todos os ramos associados a resistores não suaves.

Embora, sob as hipóteses expostas, o  $(PTA-P\Theta_Z)$  tenha solução, nada pode ser dito da unicidade dessa solução. Portanto, as d.p. nos capacitores não necessariamente determinam a corrente na rede.

O Teorema (III-47) nos fornece meios de garantir a unicidade de solução de  $(PTA-P\Theta_Z)$ . Para tanto, basta que a rede satisfaça a:

- 8 (H5) Existe uma coárvore de  $G$  constituída unicamente de ramos associados a resistores controlados por tensão.

Garantida a existência e unicidade de solução de  $(PTA-P\Theta_Z)$  para cada  $\Theta_Z \in \mathbb{R}^Z$ , podemos definir a função



$\Phi: \mathbb{R}^z \rightarrow \mathbb{R}^z$  que associa a cada  $\bar{\theta}_z \in \mathbb{R}^z$  o vetor  $\bar{\psi}_z = \Phi(\bar{\theta}_z)$  que é a parte correspondente aos ramos capacitivos da solução  $\bar{\psi}$  de (PTA- $P\theta_z$ ) com  $\theta_z = \bar{\theta}_z$ . A função representa a "resposta" da parte resistiva da rede RC às variações de d.p. nos capacitores. Através dessa função deduziremos na secção seguinte a equação de estado da rede.

Agora, usaremos alguns resultados de dualidade (ver apêndice A) com o que obteremos relações entre os problemas (PTA-PRCE), (PTA- $P\theta_z$ ) e a função  $\Phi$ .

Retomemos o (PTA-PRCE) que será considerado problema primal. Dualizemos este problema em relação a restrição  $\psi_z = 0$ . O dual será, portanto,

$$9 \quad (\text{DTA-PRCE}) \quad \text{Max} \quad W(\theta_z) \\ \theta_z \in \mathbb{R}^z$$

onde  $W: \mathbb{R}^z \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por:

$$10 \quad W(\theta_z) = \text{Inf} \left\{ \sum_{i \in E} f_i(\psi_i) + \sum_{i \in Z} \theta_i \psi_i \mid \psi \in X \right\}$$

Observe-se que o valor da função  $W$  em  $\theta_z \in \mathbb{R}^z$  é exatamente o valor do problema (PTA- $P\theta_z$ ). Como pelas hipóteses supostas, este problema possui solução, então o ínfimo pode ser substituído por mínimo em (10). O lema que se segue caracteriza  $W$  como uma função diferenciável e  $\Phi$  como sua diferencial.

11 Lema Suponha que a rêde RC satisfaz as hipóteses (H1),(H2),(H4) e (H5). Então:

a)  $W$  é diferenciável

$$b) \Phi(\theta_Z) = \nabla W(\theta_Z) \quad \forall \theta_Z \in \mathbb{R}^Z$$

c)  $\bar{\theta}_Z$  é solu ao de (DTA-PRCE) se e só se

$$\Phi(\bar{\theta}_Z) = 0$$

Demonstra o:

A condiçao c) é consequência imediata de a) e b) pois  $W$  é côncava (ver A-14). Como as hipóteses (H1),(H2),(H4) e (H5) implicam na existência e unicidade de solu ao do mínimo em (10), então, pelo Teorema (A-30) decorre a diferenciabilidade de  $W$ . Ainda por êsse teorema conclui-se que se  $\bar{\varphi}$  é solu ao de (PTA- $P\theta_Z$ ) então

$$\bar{\varphi}_Z = \nabla W(\bar{\theta}_Z)$$

o que, pela definiçao de  $\Phi$ , implica em b). (C.Q.D)

Os resultados do Lema (11) facilitarão a obten ao de diversos resultados na elaboraçao e análise do modelo dinâmico da rêde e no estudo de sua estabilidade. Uma aplicaçao do Lema (11) é feita na demonstraçao do teorema abaixo.

12 Teorema: Suponha que a rêde satisfaz as hipóteses (H1),(H2),(H4) e (H5). Se  $\bar{\theta}_Z \in \mathbb{R}^Z$  é solu ao de (DTA-PRCE) então a solu ao  $\bar{\varphi}$  de (PTA- $P\theta_Z$ ) com

$\theta_Z = \bar{\theta}_Z$  é solução de (PTA-PRCE) ou seja, é um fluxo de equilíbrio.

Demonstração:

Seja  $\bar{\theta}_Z$  solução do dual e  $\bar{\varphi}$  a única solução de (PTA- $\theta_Z$ ) com  $\theta_Z = \bar{\theta}_Z$ . Então,  $\bar{\varphi} \in X$  e pelo Lema (11)

$$13 \quad \bar{\varphi}_Z = 0$$

Logo,  $\bar{\varphi}$  é viável para (PTA-PRCE).

Como  $\bar{\varphi}$  resolve (PTA- $\theta_Z$ ):  $\forall \varphi \in X$

$$14 \quad \sum_{i \in E} f_i(\bar{\varphi}_i) + \langle \bar{\theta}_Z, \bar{\varphi}_Z \rangle \leq \sum_{i \in E} f_i(\varphi_i) + \langle \bar{\theta}_Z, \varphi_Z \rangle$$

e em particular para  $\varphi \in X$ , com  $\varphi_Z = 0$  (ou seja,  $\varphi$  viável para (PTA-PRCE))

de (13) e (14) resulta:

$$\sum_{i \in E} f_i(\bar{\varphi}_i) \leq \sum_{i \in E} f_i(\varphi_i)$$

provando a otimalidade de  $\bar{\varphi}$  (C.Q.D.).

O Teorema (12) embora caracterize as soluções do dual (DTA-PRCE) não garante que este último problema possua solução. O teorema seguinte assegura essa existência sem hipóteses adicionais.

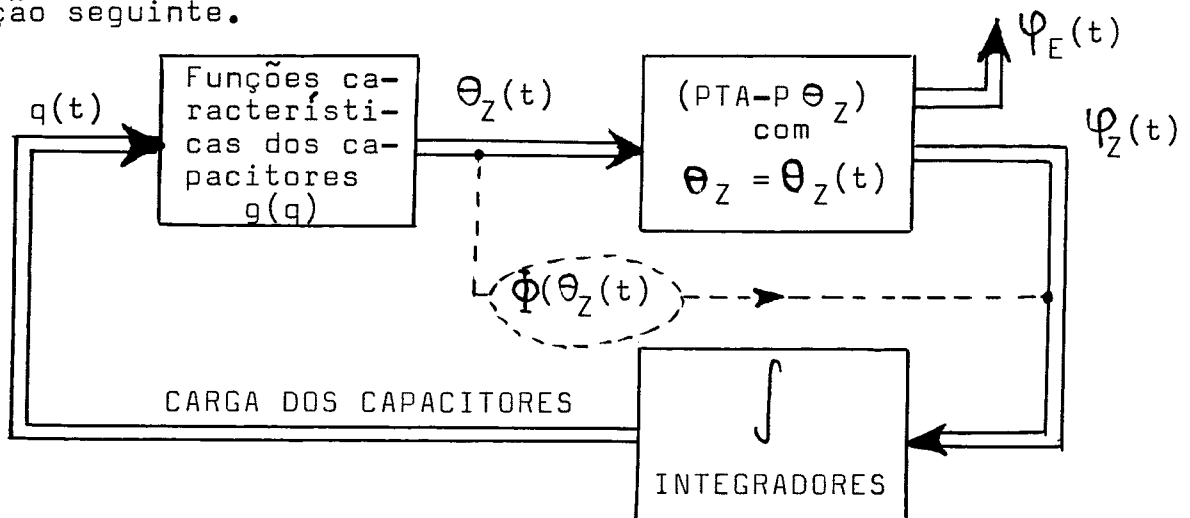
15 Teorema: Suponha que as hipóteses do Teorema(12) são verificadas. Então, o (DTA-PRCE) possui solução

Demonstração:

Por construção, as funções  $f_i$ ,  $i \in E$  são subdiferenciáveis. Como  $X$  é um politopo e a restrição  $\varphi_Z = 0$  é linear, pelo Teorema (A-21) o (PTA-PRCE) é um problema estável. Logo, pelo Teorema de dualidade (A-19) o dual possui solução (C.Q.D).

Os resultados que obtivemos nesta seção tiveram como objetivo aproveitar certas "ferramentas" da otimização para analisar rêsdes RC. O que fizemos foi, de certa forma, uma análise do comportamento estático: demos condições para se determinar fluxos a partir do conhecimento das tensões nos ramos capacitivos. Porém nada foi feito no sentido de determinar como estas tensões variam no tempo.

O esquema que apresentamos abaixo, dá uma idéia do comportamento geral de uma rêsde RC que satisfaz as hipóteses mencionadas nesta seção, e sugere como determinar o comportamento de  $\theta_Z$  ao longo do tempo. Gostaríamos de ressaltar que o estudo detalhado deste assunto será objeto da seção seguinte.



Este esquema poderá ser usado inclusive como ponto de partida para uma simulação analógica ou digital de uma rede RC satisfazendo as hipóteses (H1),(H2),(H4a) e (H5).

### SECÇÃO 3 - DINÂMICA DA REDE RC.

Nesta secção, representaremos o comportamento dinâmico das redes RC por um sistema de equações diferenciais na forma normal. As hipóteses (H1),(H2),(H4a) e (H5) serão admitidas aqui e caracterizam a classe das redes RC cujo modelo dinâmico desenvolveremos. Para esta classe, a modelagem seguirá um procedimento único. O modelo obtido se prestará de imediato, para que alguns conceitos de dualidade sejam úteis na determinação de certas características da rede, fundamentais para o estudo da estabilidade.

No que concerne a interpretação física das redes RC, o trabalho de CHUA(69) nos fornece alguns resultados e definições.

Um sistema de equações diferenciais está na forma normal quando é descrito por equações do tipo:

$$\begin{array}{l}
 \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t)
 \end{array}$$

16

ou seja

- i) No lado esquerdo das equações só aparecem derivadas de primeira ordem das variáveis de estado  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , com respeito ao tempo.
- ii) Nenhum termo de derivadas com respeito ao tempo aparece no lado direito das equações.
- iii) As variáveis dependentes coincidem com as variáveis de estado que aparecem do lado esquerdo.

É sob esta forma que estamos interessados em representar o comportamento dinâmico da r $\hat{e}$ de RC. As fontes de d.p e corrente presentes na nossa classe de r $\hat{e}$ des, são fontes ideais e os componentes possuem características invariantes no tempo. Isto faz com que o comportamento dinâmico da r $\hat{e}$ de RC possa ser representado por um sistema de equações diferenciais do tipo (17), também na forma normal onde a variável independente t, não apareça explicitamente no membro direito das equações.

$$\begin{array}{l}
 \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)
 \end{array}$$

17

O sistema (17) é dito sistema autônomo e a r $\hat{e}$ de RC correspondente é uma r $\hat{e}$ de autônoma.

A ordem de complexidade de uma rêde elétrica dinâmica é definida como sendo o número máximo de condi oes iniciais independentes que podem ser especificadas em têrmos das variáveis elétricas da rêde. Pela ordem de complexidade, sabemos o número de variáveis de estado necessário para a representa ao da dinâmica da rêde por um sistema de equa oes diferenciais na forma normal.

Numa rêde RC, a ordem de complexidade   determinada inspecionando-se o número máximo de condi oes iniciais que podem ser arbitradas independentemente, para as d.p. ou para as cargas, dos capacitores existentes na rêde. A independência entre as condi oes iniciais está relacionada, no caso, com a presença ou ausência de ciclos de capacitores ou capacitores e fontes de tensão na rêde.

Em face da hipótese (H4a) estar sendo admitida garantimos que a classe de rêde abordada não possui ciclos de capacitores ou capacitores e fontes de tensão. Portanto, o número máximo de condi oes iniciais independentes será de imediato, igual ao número de capacitores existentes na rêde. Logo, a ordem de complexidade da rêde será dada pelo número de capacitores na mesma.

Os resultados acima podem ser encontrados em CHUA (69) cap. XIII.

Vamos considerar r edes RC com z capacitores e um grafo associado G com m ramos dos quais z s o capa-

citivos e  $e$  resistivos. Utilizaremos como variáveis de estado os valores  $q_i$ ,  $i \in Z$ , correspondentes as cargas elétricas dos capacitores.

Procurar um modelo dinâmico para a rede por meio de um sistema de equações diferenciais na forma normal, equivale a procurar uma função  $H: \mathbb{R}^Z \rightarrow \mathbb{R}^Z$  tal que:

$$18 \quad \frac{dq}{dt} = H(q).$$

Nós sabemos que os fluxos (correntes) nos ramos capacitivos estão relacionados com as cargas dos capacitores em um instante de tempo  $t$  pela expressão  $\frac{dq_i(t)}{dt} = \varphi_i(t)$ ,  $i \in Z$ ,

ou seja:

$$19 \quad \frac{dq}{dt} = \varphi_Z.$$

Vimos, na Secção 2, que existe uma função  $\Phi: \mathbb{R}^Z \rightarrow \mathbb{R}^Z$  que associa  $\varphi_Z$  a cada valôr de  $\theta_Z$ . Então por (19) podemos escrever:

$$20 \quad \frac{dq}{dt} = \Phi(\theta_Z).$$

A existência da função  $\Phi$  nos permite garantir a existência da função  $H$ . Pois, como as d.p. e cargas dos ca-



pacitores estão relacionadas por funções características do tipo  $\Theta_i = g_i(q_i)$ ,  $i \in Z$ , podemos definir uma função  $g: \mathbb{R}^Z \rightarrow \mathbb{R}^Z$  tal que:

$$21 \quad g(q) = \Theta_Z$$

e substituí-la em (20) de modo a obter:

$$22 \quad \frac{dq}{dt} = \Phi(g(q)).$$

Comparando (22) com (18) obteremos:

$$23 \quad H(q) = \bar{\Phi}(g(q)).$$

Feitas estas observações fica evidenciada a importância da hipótese (H5) que garante a existência da função  $\bar{\Phi}$ .

As hipóteses que estamos admitindo aqui nos permitem usar o Lema (11) da secção anterior. Pela condição (6) deste lema e lembrando que  $\Theta_Z = g(q)$  podemos expressar (23) por:

$$24 \quad H(q) = \nabla W(g(q)).$$

Com (24) a dinâmica da rede fica representada pelo seguinte sistema de equações diferenciais:

$$25 \quad \frac{dq}{dt} = \nabla W(g(q)).$$

Nós vamos estudar na secção seguinte quais as condições que garantem existência e unicidade de solução de (25) em pelo menos um intervalo de tempo finito, para qualquer condição inicial  $q^0 \in \mathbb{R}^z$ . De qualquer forma, já podemos vislumbrar aqui, a existência de solução de (25), por meio do lema que apresentamos em seguida.

26      Lema:    A função  $H: \mathbb{R}^z \rightarrow \mathbb{R}^z$  onde  $H(q) = \nabla W(g(q))$  é contínua em  $\mathbb{R}^z$ .

Demonstração:

A função  $H$  é a composta de duas funções  $\nabla W$  e  $g$ . Por definição  $g$  é contínua, logo, basta mostrar que  $\nabla W$  é contínua para concluir sobre a continuidade da  $H$ .

Já vimos que  $W$  é uma função côncava e diferenciável em  $\mathbb{R}^z$ , logo possui derivadas primeiras contínuas e por conseguinte  $\nabla W$  é contínua em  $\mathbb{R}^z$ . (C.Q.D)

Com o Lema (26) garantimos a continuidade em  $\mathbb{R}^z$  da função  $H$ . E podemos dizer que em qualquer compacto de  $\mathbb{R}^z$  a função  $H$  é contínua. Esta observação junto ao teorema de existência de solução (ver 'NEMYTSKII(60) pag. 3) nos permite concluir que em qualquer ponto do  $\mathbb{R}^z$  passará, em um instante  $t_0$ , uma solução de (25).

Este resultado, apesar de concluir sobre a existência de solução de (25) nada informa sobre a unicidade de

solução. Além da existência, a unicidade de solução se torna importante para nós, uma vez que estamos interessados em dar condições de modo a garantir a estabilidade assintótica global de rêsdes RC cujo comportamento dinâmico é descrito por (25).

A secção seguinte abordará êste assunto, fornecendo condições necessárias para unicidade de solução.

Nós representaremos por  $q(\cdot; q^0; t_0)$  uma solução de (25) que passe por  $q^0$  no instante  $t_0$  e cuja existência está garantida no intervalo de tempo  $[t_0, T]$ .

#### SECÇÃO 4 - CONDIÇÕES PARA EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO DE (25).

Existem várias maneiras para se estudar a existência e unicidade de solução de um sistema de equações diferenciais. Nem sempre é fácil concluir-se a êsse respeito ou dar condições de modo a garantir existência e unicidade. Em nosso caso tratamos com sistemas autônomos o que facilita bastante essa tarefa.

O procedimento que vamos desenvolver aqui, consta em dar algumas condições sôbre certos elementos da rêsde de modo a garantir que o membro direito de (25) satisfaça as condições de Lipschitz em todo  $\mathbb{R}^2$ . Dêste resultado concluiremos sôbre a unicidade de solução usando um teorema de NEMYTSKII (60).

Como já vimos, o membro direito de (25) é uma função  $H$  composta de outras duas  $\nabla W$  e  $g$ . Caso  $\nabla W$  e  $g$  sejam Lipschitzianas, a composta  $H$  será também. Nós vamos / lançar mão deste fato de modo a garantir que  $H$  é Lipschitziana. Para isto vamos supor que a função  $g$  seja Lipschitziana e encontraremos uma condição que, se verificada pela rede RC, garantirá que a  $\Phi$  satisfaz Lipschitz.

A condição é a seguinte:

- 27 (H6) Existe uma coárvore de  $G$  onde aos ramos estão associadas curvas características de resistores satisfazendo a:

$$\exists k > 0 \quad \text{tal que: } \forall i \in T$$

$$(\forall (\theta_i^1, \varphi_i^1) \in C_i) \quad \text{e} \quad (\forall (\theta_i^2, \varphi_i^2) \in C_i)$$

$$\|\theta_i^1 - \theta_i^2\| \geq k |\varphi_i^1 - \varphi_i^2|$$

Os diversos  $C_i$  representam curvas características de resistores e  $T$  o conjunto de índices que caracterizam os ramos da coárvore.

A hipótese (H6) é uma maneira de dizer que as curvas características associadas aos ramos da coárvore considerada, possuem em toda sua extensão inclinações maiores que zero.

O teorema seguinte comprova que sob (H6), a  $\Phi$  é Lipschitziana.

28 Teorema: Seja uma r $\hat{e}$ de RC e G o grafo associado com m ramos sendo z capacitivos e e resistivos. Vamos admitir que as hip $\acute{o}$ teses (H1)-(1), (H2)-(4), (H4a)-(7), (H5)-(8) e (H6) s $\acute{o}$  satisf $\acute{e}$ itas. N $\acute{e}$ ste caso a fun $\tilde{c}$ o $\tilde{a}$   $\Phi : \mathbb{R}^z \rightarrow \mathbb{R}^z$ ,  
 $\Phi(\theta_z) = \nabla w(\theta_z) \forall \theta_z \in \mathbb{R}^z$ ,  $\acute{e}$  Lipschitziana em  $\mathbb{R}^z$ .  
 Ou seja, existe  $K > 0$  tal que:

$$\forall \theta_z^1, \theta_z^2 \in \mathbb{R}^z \quad \|\Phi(\theta_z^1) - \Phi(\theta_z^2)\| \leq K \|\theta_z^1 - \theta_z^2\|$$

Demonstra $\tilde{c}$ o $\tilde{a}$ :

Seja B o conjunto de ramos da co $\acute{a}$ rvore de G que satisfaz (H6) e:

$$T \triangleq \{ i \in N \mid \alpha_i \in B \}$$

29

$$U \triangleq \{ i \in N \mid \alpha_i \notin B \}$$

Lembremos que Z e E s $\acute{o}$  os conjuntos de  $\acute{i}$ ndices que caracterizam respectivamente os ramos capacitivos e os ramos resistivos de G. Observe-se que por (H6)  $Z \subset U$  e  $T \subset E$ .

Antes de tudo observemos que existe uma constante positiva L tal que:

$$30 \quad \|\varphi\| \leq L \|\varphi_T\|$$

para todo fluxo  $\varphi \in \mathbb{R}^m$  de G e onde  $\varphi_T$  representa o vetor de fluxos na co $\acute{a}$ rvore caracterizada pelos ramos B. De fato,

se  $\varphi$  é um fluxo de  $G$  então de (II-23) podemos concluir:

$$\varphi = S' \varphi_T$$

onde  $S'$  é uma matriz fundamental (II-24) de  $G$ . Então vale a expressão (30) tomando-se

$$L = \|S'\| \triangleq \sup \left\{ \frac{S' \varphi_T}{\|\varphi_T\|} \mid \varphi_T \in \mathbb{R}^{|T|}, \varphi_T \neq 0 \right\}$$

Provemos agora que  $\Phi$  é Lipschitziana. Sejam

$$\theta_Z^1, \theta_Z^2 \in \mathbb{R}^Z \quad \text{e} \quad \varphi_Z^1 = \Phi(\theta_Z^1) \quad \varphi_Z^2 = \Phi(\theta_Z^2). \quad \text{Se } \varphi_Z^1 = \varphi_Z^2$$

nada há a provar uma vez que teríamos:

$$\|\Phi(\theta_Z^1) - \Phi(\theta_Z^2)\| = 0 \leq K \|\theta_Z^1 - \theta_Z^2\| \quad \text{para qualquer } K > 0. \quad \text{Suponhamos que } \varphi_Z^1 \neq \varphi_Z^2.$$

Em (II-29) vimos que toda tensão  $\theta$  e todo fluxo  $\varphi$  de  $G$  satisfazem a  $\langle \theta, \varphi \rangle = 0$  e portanto

$$0 = \langle \theta^1 - \theta^2, \varphi^1 - \varphi^2 \rangle = \langle \theta_Z^1 - \theta_Z^2, \varphi_Z^1 - \varphi_Z^2 \rangle + \langle \theta_E^1 - \theta_E^2, \varphi_E^1 - \varphi_E^2 \rangle$$

onde  $\theta^i$  e  $\varphi^i$  são, respectivamente, a tensão e fluxo no grafo quando os capacitores têm diferenças de potencial  $\theta_Z^i$ .

Portanto,

$$31 \quad \langle \theta_Z^1 - \theta_Z^2, \varphi_Z^2 - \varphi_Z^1 \rangle = \langle \theta_E^1 - \theta_E^2, \varphi_E^1 - \varphi_E^2 \rangle$$

Como as curvas características de resistores são crescentes temos:

$$32 \quad (\theta_i^1 - \theta_i^2) (\varphi_i^1 - \varphi_i^2) \geq 0 \quad \forall i \in E$$

Então, temos:

$$\begin{aligned} \|\theta_Z^1 - \theta_Z^2\| \|\varphi_Z^1 - \varphi_Z^2\| &\geq \langle \theta_Z^1 - \theta_Z^2, \varphi_Z^2 - \varphi_Z^1 \rangle \quad (\text{Cauchy - Schwartz}) \\ &= \langle \theta_E^1 - \theta_E^2, \varphi_E^1 - \varphi_E^2 \rangle \quad (\text{por (31)}) \\ &\geq \langle \theta_T^1 - \theta_T^2, \varphi_T^1 - \varphi_T^2 \rangle \quad (\text{de } T \subset E \text{ e de (32)}) \\ &= \sum_{i \in T} |\theta_i^1 - \theta_i^2| |\varphi_i^1 - \varphi_i^2| \quad (\text{por (32)}) \\ &\geq \sum_{i \in T} K \times |\varphi_i^1 - \varphi_i^2|^2 \quad (\text{por (H6)}) \\ &= K \|\varphi_T^1 - \varphi_T^2\|^2 \\ &\geq \frac{K}{L^2} \|\varphi^1 - \varphi^2\|^2 \quad (\text{por (30)}) \\ &\geq \frac{K}{L^2} \|\varphi_Z^1 - \varphi_Z^2\|^2 \quad (\text{pois } Z \subset \{1, 2, \dots, m\}) \end{aligned}$$

Logo,

$$\|\theta_Z^1 - \theta_Z^2\| \|\varphi_Z^1 - \varphi_Z^2\| \geq \frac{K}{L^2} \|\varphi_Z^1 - \varphi_Z^2\|^2$$

o que, devido a  $\|\varphi_Z^1 - \varphi_Z^2\| \neq 0$ , implica em:

$$\|\varphi_Z^1 - \varphi_Z^2\| \leq \frac{L^2}{K} \|\theta_Z^1 - \theta_Z^2\|$$

provando que  $\Phi$  é Lipschitziana. (C.Q.D)

Com a demonstração do Teorema (28) fica evidencia

do que sob as condições da hipótese (H6) a função  $\nabla W$  é Lipschitziana em  $\mathbb{R}^z$ . Como já havíamos comentado, nos limitaremos à rêsdes RC cujas funções características dos capacitores são funções Lipschitzianas. Nêstes têrmos fica garantida que o membro direito

$$H(q) = \nabla W(g(q))$$

do sistema de equações diferenciais (25) é Lipschitziana em  $\mathbb{R}^z$ . Dêste fato e pelo teorema apresentado em NEMYTSKII(60) pag. 13, concluimos finalmente que o sistema de equações diferenciais (25) possui solução única  $q(\cdot; q^0, t_0)$  em  $[t_0, T]$  para qualquer condição inicial  $q^0 \in \mathbb{R}^z$ .

Com o lema abaixo, veremos que a Hipótese (H6) engloba as Hipóteses (H4a) e (H5).

33      Lema: Um resistor com curva característica crescente  $C$ , com projeção vertical fechada, que satisfaz a:  $|\theta_1 - \theta_2| \geq k |\varphi_1 - \varphi_2|$ ,  $k > 0$ ,  $\forall (\theta_1, \varphi_1), (\theta_2, \varphi_2) \in C$  é um resistor suave controlado por tensão.

Demonstração:

Mostremos inicialmente que o resistor é controlado por tensão.

Sejam  $(\theta_1, \varphi_1)$  e  $(\theta_2, \varphi_2) \in C$ . Da hipótese temos

34       $|\theta_1 - \theta_2| \geq k |\varphi_1 - \varphi_2| \quad k > 0.$



Multipliquemos ambos os lados de (34) por  $|\varphi_1 - \varphi_2|$

$$35 \quad |\theta_1 - \theta_2| \times |\varphi_1 - \varphi_2| \geq k |\varphi_1 - \varphi_2|^2.$$

Como a  $C$  é crescente podemos escrever

$$36 \quad (\theta_1 - \theta_2) \times (\varphi_1 - \varphi_2) \geq k(\varphi_1 - \varphi_2)^2$$

Como  $k$  é positivo vem:

$$(\theta_1 - \theta_2) \times (\varphi_1 - \varphi_2) > 0 \text{ se } \varphi_1 \neq \varphi_2$$

ou seja a  $C$  é estritamente crescente. Logo, representa um resistor controlado por tensão.

Fixemos agora um par  $(\bar{\theta}, \bar{\varphi}) \in C$ . Pela hipótese do lema podemos escrever:

$$37 \quad |\theta - \bar{\theta}| \geq k |\varphi - \bar{\varphi}| \quad \forall (\theta, \varphi) \in C.$$

Fazendo uma mudança de coordenadas com relação ao ponto  $(\bar{\theta}, \bar{\varphi}) \in C$ , a expressão (37) passa a ser escrita como:

$$38 \quad |\theta| \geq k |\varphi| \quad \forall (\theta, \varphi) \in C'$$

onde  $C'$  é a representação de  $C$  no novo sistema de coordenadas.

A curva  $C'$  é crescente logo:

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}) (\exists (\theta, \varphi) \in C') \text{ tal que:}$$

$$39 \quad \theta + \varphi = \alpha$$

E como  $C'$  passa pela origem então

$$40 \quad (\theta \leq 0) \iff (\varphi \leq 0) \quad \forall (\theta, \varphi) \in C'.$$

Por (40), podemos reescrever (39) como:

$$41 \quad |\theta| + |\varphi| = |\alpha|$$

De (38) e (41)

$$|\theta| + \frac{|\theta|}{k} \geq |\alpha|$$

ou seja

$$\|\theta\| \geq \frac{k}{k+1} |\alpha|$$

Resumindo teremos:

$$42 \quad (\forall \beta \in \mathbb{R}) (\exists (\theta, \varphi) \in C') |\theta| \geq |\beta|$$

onde  $|\beta| = \frac{k}{k+1} |\alpha|$

Vê-se facilmente por (42) que a projeção horizontal de  $C$  é a reta real. Por hipótese, a projeção vertical de  $C$  é fechada. Logo,  $C$  representa um resistor suave. (C.Q.D.).

Com a demonstração deste lema, podemos verificar facilmente que a Hipótese (H6), usada para garantir Lipschitz, implica em (H4a) e (H5).

## SECÇÃO 5 - CONCLUSÃO.

O estudo que acabamos de desenvolver, delimitou uma

classe de r edes RC que possui solução única, em pelo menos um intervalo de tempo finito, sob quaisquer valores de cargas nos capacitores.

Essa classe ficou caracterizada por um conjunto de hipóteses que apresentaremos agora numa forma resumida.

Seja uma rêde RC onde o grafo associado  $G=(N,A,K)$  possui m ramos dos quais e s o resistivos e z capacitivos. Lembremos que E e Z são os conjuntos de índices que caracterizam, respectivamente, os ramos resistivos e os ramos capacitivos de  $G$ . Esta rêde pertence a referida classe se:

- 43
- i) todos os resistores possuem curvas características crescentes  $C_i$ ,  $i \in E$ , com projeções verticais  $I_i$  fechadas.
  - ii) as funções características dos capacitores  $g_i$ ,  $i \in Z$ , forem funções Lipschitzianas.
  - iii) o conjunto  $X$  dado por:

$$X = \left\{ \varphi \in \mathbb{R}^m \mid \varphi_i \in I_i, \quad i \in E; \varphi_i = 0, \quad i \in Z; M\varphi = 0 \right\}$$

onde  $M$    a matriz de incidência de  $G$ , f r não vazio.

- iv) existir uma coárvore  $(C,B)$  de  $G$  satisfazendo

$$\exists k > 0 \quad \text{tal que: } \forall i \in T$$

$$(\forall (\theta_i^1, \varphi_i^1) \in C_i) \text{ e } (\forall (\theta_i^2, \varphi_i^2) \in C_i)$$

$$|\theta_i^2 - \theta_i^1| \geq k |\varphi_i^2 - \varphi_i^1|$$

$$\text{onde } T = \{ i \in \mathbb{N} \mid \alpha_i \in B \} .$$

No capítulo seguinte, onde faremos um estudo da estabilidade dessa classe de rêdes, veremos que existe solução única mesmo num intervalo infinito de tempo.

## C A P Í T U L O    V

ESTABILIDADESECCÃO 1 - INTRODUÇÃO.

Estabelecemos no capítulo anterior o modelo dinâmico para uma classe de rêdes RC. O modelo foi apresentado na forma de um sistema de equações diferenciais tendo como variáveis de estado as cargas dos capacitores.

Faremos agora um estudo da estabilidade das soluções desse sistema de equações diferenciais com respeito aos estados de equilíbrio. E admitindo que as hipóteses (IV-43) são verificadas, concluiremos que o sistema é assintoticamente estável globalmente, no sentido que passamos a expor.

1            Consideremos o sistema

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

onde  $x$  é um vetor do  $\mathbb{R}^n$  e  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função contínua. Admitamos que  $f$  satisfaz alguma condição que garanta

unicidade de solução de (1). O sistema (1) é dito assintoticamente estável globalmente se para qualquer  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  a solução  $x(\cdot; x^0, t_0) : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  é limitada e satisfaz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t; x^0, t_0) \in E$$

onde  $E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0 \right\}$ .

## SECÇÃO 2 - ESTADOS DE EQUILÍBRIO DO SISTEMA.

Como vimos em (IV-25) o modelo dinâmico da classe estudada de rêdes RC é dado pelo seguinte sistema de equações diferenciais:

$$2 \quad \frac{dq}{dt} = \nabla W(g(q)).$$

onde  $q \in \mathbb{R}^Z$  é o vetor de carga dos capacitores.

Os estados de equilíbrio de (2) são os valores de  $q$  solução da equação

$$3 \quad \nabla W(g(q)) = 0$$

Ao conjunto de soluções de (3) dado por

$$4 \quad \mathcal{L} = \left\{ q \in \mathbb{R}^Z \mid \nabla W(g(q)) = 0 \right\}$$

chamamos de conjunto de equilíbrio.

O conjunto  $\mathcal{N}$  assume aqui uma forma particular .  
 O lema que apresentamos em seguida esclarece melhor. Na sua  
 formulação usamos o conjunto de soluções do dual (DTA-PRCE)  
 (IV-9).

Seja o conjunto

$$5 \quad \Delta = \left\{ \bar{\theta}_z \in \mathbb{R}^z \mid w(\bar{\theta}_z) = \max w(\theta_z) \right\}$$

que é o conjunto de soluções do dual.

6 Lema: Seja uma rêde RC satisfazendo as hipóte-  
 ses dadas em (IV-43). O conjunto de equilíbrio  
 $\mathcal{N}$  é não vazio e está relacionado ao conjunto de  
 soluções do dual  $\Delta$  por:  $\mathcal{N} = g^{-1}(\Delta)$ .

Demonstração:

Pelo Lema (IV-11) podemos escrever:

$$7 \quad \Delta = \left\{ \bar{\theta}_z \in \mathbb{R}^z \mid \nabla w(\bar{\theta}_z) = 0 \right\}$$

Da definição de  $\mathcal{N}$  (4) e de (7) vem:

$$8 \quad \bar{q} \in \mathcal{N} \iff g(\bar{q}) \in \Delta$$

donde se conclui  $\mathcal{N} = g^{-1}(\Delta)$ .

Como  $g$  é uma função bijetora e  $\Delta$  é não vazio  
 pelo teorema (IV-15), logo  $\mathcal{N}$  é não vazio, (C.Q.D).

Com a demonstração do lema acima garantimos a exis

tência de estados de equilíbrio de (2) e visualizamos uma nova maneira de encarar o conjunto de equilíbrio. Observe-se que o conjunto  $\Omega$  não é necessariamente um conjunto enumerável.

O conjunto de soluções do dual  $\Delta$  é um conjunto convexo pois seus elementos são pontos de máximo de uma função côncava. Logo  $\Delta$  será um conjunto enumerável se e só se o dual possuir solução única. Como nada está garantido sobre a unicidade de solução do dual,  $\Delta$  pode ser um conjunto não enumerável.

Pelo Lema (6), o conjunto de equilíbrio  $\Omega$  pode ser determinado pela imagem inversa de  $\Delta$  através da  $g$ . Cada componente  $g_i$  de  $g$  é uma função de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  bijetora e estritamente crescente. Logo se  $\Delta$  é não enumerável  $\Omega = g^{-1}(\Delta)$  é também não enumerável.

Uma vez que caracterizamos os estados de equilíbrio de (2), podemos iniciar o estudo da estabilidade.

### SEÇÃO 3 - ESTABILIDADE ASSINTÓTICA GLOBAL

Concluiremos sobre a estabilidade assintótica global de (2), usando as idéias desenvolvidas em LASALLE(67) onde é apresentado um teorema de "estabilidade", que é uma extensão do teorema de Liapunov.

Iniciaremos construindo uma função de Liapunov segundo Lasalle (ver B-6), mostrando em seguida que as solu-



ções de (2) são limitadas e prolongáveis para todo  $t \geq t_0$ . Por último mostraremos que (2) é assintoticamente estável globalmente.

### Função de Liapunov segundo Lasalle

Construamos uma função de Liapunov para o sistema

Seja  $g_i$ ,  $i \in Z$ , a função característica do capacitor correspondente ao ramo capacitivo  $\alpha_i$  ( $Z$  representa o conjunto de índices dos ramos capacitivos).

Seja  $G_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida como

$$9 \quad G_i(q_i) \triangleq \int_0^{q_i} g_i(x_i) dx_i \quad i \in Z$$

Note-se que a função  $G_i$ , acima definida, é estritamente convexa; e diferenciável:  $g_i$  é contínua, por hipótese; e  $\frac{dG_i(q_i)}{dq_i} = g_i(q_i)$ .

Seja  $G: \mathbb{R}^Z \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$10 \quad G(q) \triangleq \sum_{i \in Z} G_i(q_i)$$

A  $G$  assim definida é uma função estritamente convexa e diferenciável em  $\mathbb{R}^Z$  com  $\nabla G(q) = g(q)$ .

De posse de (10) definamos uma nova função. Seja

$\bar{q} \in \Omega$  um estado de equilíbrio qualquer de (2) e seja  $V_{\bar{q}}: \mathbb{R}^Z \rightarrow \mathbb{R}$  a função

$$11 \quad V_{\bar{q}}(q) = G(q) - \langle g(\bar{q}), q \rangle$$

O que vamos mostrar é que  $V_{\bar{q}}$  é uma função de Liapunov segundo Lasalle em  $\mathbb{R}^Z$  para (2).

Primeiramente observemos que  $V_{\bar{q}}$  é uma função estritamente convexa e diferenciável: é definida como uma soma de uma função estritamente convexa e diferenciável e de uma função linear. Logo  $V_{\bar{q}}$  é continuamente diferenciável. Com esta conclusão fica satisfeita a primeira condição de função de Liapunov segundo Lasalle. Com o teorema seguinte veremos que a segunda condição é também satisfeita.

Definamos a função  $\dot{V}_{\bar{q}}: \mathbb{R}^Z \rightarrow \mathbb{R}$  onde:

$$12 \quad \dot{V}_{\bar{q}}(q) = \langle \nabla V_{\bar{q}}(q), \nabla W(g(q)) \rangle = \langle g(q) - g(\bar{q}), \nabla W(g(q)) \rangle$$

13 Teorema: Para todo  $q \in \mathbb{R}^Z$  e  $\bar{q} \in \Omega$

$$\dot{V}_{\bar{q}}(q) = \langle g(q) - g(\bar{q}), \nabla W(g(q)) \rangle \leq 0$$

ocorrendo a igualdade se e só se  $q \in \Omega$

Demonstração:

Como  $W$  é uma função côncava e diferenciável,

$\nabla W(g(q))$  é o único supergradiente (A-5) no ponto  $g(q)$ .

E podemos escrever:

$$W(g(\bar{q})) \leq W(g(q)) + \langle \nabla W(g(q)), (g(\bar{q}) - g(q)) \rangle$$

ou seja

$$14 \quad \langle \nabla W(g(q)), (g(q) - g(\bar{q})) \rangle \leq W(g(q)) - W(g(\bar{q}))$$

Como  $\bar{q} \in \mathcal{N}$  então  $g(\bar{q}) \in \Delta$  por (8). Logo  $g(\bar{q})$  é ponto de máximo da  $W$  e vale:

$$15 \quad W(g(q)) - W(g(\bar{q})) \leq 0$$

De (14) e (15) vem

$$16 \quad \langle \nabla W(g(q)), (g(q) - g(\bar{q})) \rangle \leq 0$$

provando uma parte do teorema.

Se  $q \in \mathcal{N}$  então  $g(q) \in \Delta$  por (8), o que implica  $\nabla W(g(q)) = 0$ . Logo

$$q \in \mathcal{N} \implies \langle \nabla W(g(q)), (g(q) - g(\bar{q})) \rangle = 0$$

Se  $\langle \nabla W(g(q)), (g(q) - g(\bar{q})) \rangle = 0$  então por (14)  $W(g(q)) \geq W(g(\bar{q}))$ . Como  $g(\bar{q})$  é ponto de máximo da  $W$  então  $g(q)$  também é ponto de máximo. Ou seja:  $g(q) \in \Delta$  o que implica, por (8),  $q \in \mathcal{N}$  concluindo-se a demonstração (C.Q.D.).

Este teorema além de concluir que a  $V_{\bar{q}}$  é uma função de Liapunov segundo Lasalle em  $\mathbb{R}^2$  para (2) vai nos ser útil na conclusão sobre a estabilidade assintótica / global.

Passemos agora ao estudo da prolongabilidade das soluções de (2).

### Prolongabilidade das soluções

Mostraremos em seguida que toda solução de (2) é limitada. Dêste fato concluiremos que as soluções de (2) podem ser estendidas ao intervalo  $[t_0 ; +\infty)$ .

Antes apresentemos um lema.

17 Lema: Se  $\bar{q} \in \Omega$  é um estado de equilíbrio de (2) e  $V_{\bar{q}}$  a função definida em (11) então:

$$\nabla V_{\bar{q}}(q) = 0 \quad \text{se e só se} \quad q = \bar{q}$$

e  $\bar{q}$  é o único ponto de mínimo da  $V_{\bar{q}}$ .

### Demonstração:

O gradiente da  $V_{\bar{q}}$  no ponto  $q \in \mathbb{R}^2$  é dado por:

18 
$$\nabla V_{\bar{q}}(q) = \nabla G(q) - g(\bar{q}) = g(q) - g(\bar{q})$$

Por (18) e por  $g$  ser bijetora vem

$$19 \quad \nabla V_{\bar{q}}(q) = 0 \iff g(q) = g(\bar{q}) \iff q = \bar{q}$$

provando a primeira parte.

Da convexidade estrita da  $V_{\bar{q}}$  e de (19)  $\bar{q}$  é o único ponto de mínimo da  $V_{\bar{q}}$ .

20 Teorema: Para todo  $q^0 \in \mathbb{R}^z$  a solução  $q(\cdot; q^0; t_0)$ , definida em  $[t_0, T]$ , de (2) é limitada.

Demonstração:

Dado  $q^0 \in \mathbb{R}^z$  seja  $C_0 \subset \mathbb{R}^z$  o conjunto:

$$21 \quad C_0 = \left\{ q \in \mathbb{R}^z \mid V_{\bar{q}}(q) \leq V_{\bar{q}}(q^0) \right\}$$

O conjunto  $C_0$  é compacto pois  $V_{\bar{q}}$  é quase suave (ver Lema A-41). De fato

$$\nabla V_{\bar{q}}(\cdot) = g(\cdot) - g(\bar{q})$$

é uma função bijetora em  $\mathbb{R}^z$ .

Mostremos que a solução de (2),  $q(\cdot; q^0; t_0): [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^z$  permanece em  $C_0$ .

Pelo Teorema (13)  $\dot{V}_{\bar{q}}(q(t; q^0; t_0)) \leq 0, \forall t \in [t_0, T]$ . Ou seja a  $V_{\bar{q}}(q(\cdot; q^0; t_0))$  é decrescente em  $[t_0, T]$ . Logo

$$22 \quad V_{\bar{q}}(q(t; q^0; t_0)) \leq V_{\bar{q}}(q^0) \quad t_0 \leq t \leq T.$$

De (21) e (22) conclui-se

$$23 \quad q(t; q^0; t_0) \in C_0 \quad \forall \quad t \in [t_0, T]$$

E como  $C_0$  é compacto então  $q(\cdot; q^0; t_0)$  é limitada.  
(C.Q.D)

Com a demonstração do teorema acima garantimos que dada uma solução de (2) existe um compacto no qual ela permanece. Conforme teorema apresentado em NEMYTSKII(60) pag. 8 isto é suficiente para garantir a prolongabilidade das soluções de (2) em um intervalo infinito de tempo. Com isso podemos dizer que:

dado  $q^0 \in \mathbb{R}^z$ , existe uma única solução  $q(\cdot; q^0; t_0)$  de (2) definida para todo  $t \in [t_0; +\infty)$ .

### Estabilidade assintótica global

De acôrdo com a Definição (1), para concluirmos sobre a estabilidade assintótica global de (2) basta demonstrar que:  $\forall q^0 \in \mathbb{R}^z$ ,  $q(\cdot; q^0; t_0)$  satisfaz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t; q^0; t_0) \in \Omega$$

Demonstremos isso. Seja o conjunto

$$24 \quad E = \left\{ q \in \mathbb{R}^z \mid \dot{V}_{\bar{q}}(q) = 0 \right\}.$$

Pelo Teorema (13)  $E = \Omega$ . Como  $\Omega$  é um conjunto invariante

do sistema (2) (ver B-5), aplicando o teorema de Lasalle (ver B-8), concluímos que toda solução de (2) se aproxima de  $\Omega$ . Ou seja: dada uma solução  $q(\cdot; q^0; t_0)$  de (2),, existe uma sequência  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$  em  $\mathbb{R}$  tendendo a infinito tal que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} q(t_k; q^0; t_0) = q^* \in \Omega.$$

Consideremos a função  $V_q^*$  e mostremos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_q^*(q(t; q^0, t_0)) = V_q^*(q^*).$$

Seja  $\varepsilon > 0$  e  $\alpha > V_q^*(q^*)$  com  $C_\alpha \subset \overline{B_\varepsilon(q^*)}$  (ver teorema A-52). Da continuidade da  $V_q^*$  podemos dizer que:

$$25 \quad \lim_{k \rightarrow \infty} V_q^*(q(t_k; q^0; t_0)) = V_q^*(q^*)$$

De (25) e da definição de  $\alpha$  podemos dizer que:  
( $\exists N > 0$ ) tal que

$$26 \quad V_q^*(q(t_N; q^0; t_0)) \leq \alpha.$$

Como a  $V_q^*(q(\cdot; q^0, t_0))$  é decrescente vem:

$$(\forall t \geq t_N) \quad V_q^*(q(t; q^0; t_0)) \leq V_q^*(q(t_N; q^0; t_0)) \leq \alpha$$

isto é  $q(t; q^0; t_0) \in C_\alpha \subset \overline{B_\varepsilon(q^*)}$ . Ou seja, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $t_N > t_0$  tal que

$$q(t; q^0, t_0) \in \overline{B_\varepsilon(q^*)} \quad \forall t \geq t_N$$

o que prova que o sistema (2) é assintoticamente estável globalmente.

#### SECÇÃO 4 - ESTABILIDADE ASSINTÓTICA EM CORRENTE E TENSÃO .

Na secção anterior ficou provado que toda rêde RC que satisfaz as hipóteses (IV-43) é assintoticamente estável globalmente. Contudo, nada ficou estabelecido a respeito da estabilidade assintótica em corrente e tensão (Ver III-11). Ou seja, se  $q^0 \in \mathbb{R}^Z$  é um estado inicial da rêde e  $(\theta, \varphi, q)$  é uma solução da mesma com essa carga inicial então:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t; q^0, t_0) \in \Omega$$

mas ainda não podemos afirmar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\theta(t), \varphi(t)) = (\bar{\theta}, \bar{\varphi})$$

onde  $(\bar{\theta}, \bar{\varphi})$  é um ponto de equilíbrio da rêde (III-10).

Veremos em seguida que, mesmo sem hipóteses adicionais, podemos garantir que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \bar{\varphi}$$

onde  $\bar{\varphi}$  é um fluxo de equilíbrio da rêde. Na demonstração



dêsse resultado faremos uso da função  $\psi: \mathbb{R}^z \rightarrow \mathbb{R}^z$  que associa a cada  $\theta_z \in \mathbb{R}^z$  a única solução  $\varphi = \psi(\theta_z)$  do problema (PTA - P  $\theta_z$ ) (IV-5). Esta função fica bem definida, pois sob as hipóteses (IV-43), êste problema possui solução única.

27 Teorema: Suponha que sejam verificadas as hipóteses (IV-43) pela rêde RC. Seja  $q^0 \in \mathbb{R}^z$  um estado inicial qualquer e  $t^0 \in \mathbb{R}$  um instante inicial. Se  $(\theta, \varphi, q)$  é uma solução da rêde RC em  $(t_0, +\infty)$  com essas condições iniciais, então

$$28 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \bar{\varphi}$$

onde  $\bar{\varphi}$  é o fluxo de equilíbrio da rêde.

Demonstração: Pela unicidade de solução do problema (PTA-P  $\theta_z$ ) e pelo teorema (A-30) a função  $\psi$ , acima definida, é contínua em todo  $\mathbb{R}^z$ .

Se  $(\theta, \varphi, q)$  é uma solução da rêde, temos:

$$\varphi(t) = \psi(\theta_z(t))$$

e como  $\theta_z(t) = g(q(t))$

então:

$$29 \quad \varphi(t) = \psi(g(q(t)))$$

o que prova a unicidade de  $\varphi$ , pois  $q$  é único.

Pela estabilidade assintótica da rêde temos:

$$30 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = q^*$$

e pelo Lema (6) conclui-se que  $g(q^*)$  é solução do dual. Então, pelo teorema (IV-12)

$$31 \quad \Psi(g(q^*)) = \bar{\varphi}$$

onde  $\bar{\varphi}$  é o fluxo de equilíbrio da rêde.

Portanto, pela continuidade de  $\Psi$ ,  $g$  e de (29)-(31) resulta

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(g(q(t))) = \bar{\varphi}$$

provando o resultado. (C.Q.D.)

A garantia de convergência da carga e do fluxo na rêde não é suficiente para provar que a tensão na rêde converge. No entanto, se a tensão convergir, pode-se demonstrar que o limite é uma tensão de equilíbrio.

32 Corolário: Suponhamos que a rêde RC satisfaz as hipóteses (IV-43).

Seja  $(\theta, \varphi, q)$  uma solução qualquer da rêde no intervalo  $[t_0, +\infty)$ , com carga inicial  $q^0 \in \mathbb{R}^z$ . Se  $\bar{\theta} \in \mathbb{R}^m$  e  $\theta$  satisfazem a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \bar{\theta}$$

então  $\bar{\theta}$  é uma tensão de equilíbrio da rêde.

Demonstração: Se  $(\theta, \varphi, q)$  e  $\bar{\theta} \in \mathbb{R}^m$  satisfazem as hipóteses do corolário, então, para cada  $t \geq t_0$ , temos:

$$(\theta_i(t), \varphi_i(t)) \in C_i \quad i \in E$$

$$33 \quad S' \Theta(t) = 0$$

pois  $(\theta, \varphi, q)$  é solução da rêde RC.

Como  $C_i$  é fechado, para  $i \in E$ , resulta:

$$34 \quad (\bar{\theta}_i, \bar{\varphi}_i) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\theta_i(t), \varphi_i(t)) \in C_i$$

enquanto (33) implica em

$$35 \quad S' \bar{\Theta} = \lim_{t \rightarrow \infty} S' \Theta(t) = 0$$

Mas, pelo teorema (27)  $\bar{\varphi}$  é um fluxo de equilíbrio então (34) e (35) implicam em que  $\bar{\theta}$  é uma tensão de equilíbrio. (C.Q.D.)

As hipóteses (IV-43) são insuficientes para obtermos unicidade e convergência das soluções da rêde. A inclusão de uma nova hipótese resultará, através do teorema seguinte, na estabilidade assintótica em tensão e corrente da rêde (ver III-11).

36 Teorema: Suponhamos que a rêde RC satisfaz as hipóteses (IV-43) e a hipótese adicional:

37 existe uma árvore do grafo associado constituída exclusivamente de ramos associados a resistores controlados por corrente ou a capacitores. Então, a rêde RC é assintoticamente estável em corrente e tensão.

Demonstração: Pelo corolário (32) e teorema (27), basta mostrarmos que a solução é única e  $\Theta$  é convergente.

Mostraremos, sob a hipótese adicional, que existe uma função contínua  $T: \mathbb{R}^Z \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que

$$\theta(t) = T(q(t)) \quad \forall t \geq t_0$$

para qualquer solução  $(\theta, \varphi, q)$  da rede em  $[t_0, +\infty)$ . Com isso fica provada a unicidade de solução da rede pois, pelo teorema (20),  $q$  é único e pelo teorema (27),  $\varphi$  é único. Resulta também a convergência de  $\theta$  pois  $q$  é convergente e  $T$  contínua.

Seja  $(N, B)$  uma árvore onde vale a hipótese (38) e definamos os conjuntos

$$E_B = \{ i \in E \mid \alpha_i \in B \}$$

$$Z_B = \{ i \in Z \mid \alpha_i \in B \}$$

Seja  $(\theta, \varphi, q)$  uma solução da rede em um intervalo  $[t_0, +\infty)$  com carga inicial  $q^0 \in \mathbb{R}^Z$ .

Como os resistores associados a  $\alpha_i, i \in E_B$  são, por hipótese, controlados por corrente, existem funções contínuas  $h_i: I_i \rightarrow \mathbb{R}, i \in E_B$  tais que:

$$\theta_i(t) = h_i(\varphi_i(t)) \quad \forall t \geq t_0$$

$$\forall i \in E_B$$

De (29) temos que

$$\varphi(t) = \psi(g(q(t))) \quad \forall t \geq t_0$$

onde  $\psi(g(\cdot))$  é contínua. Logo,

$$\theta_i(t) = h_i(\psi_i(g(q(t))))$$

$$\forall t \geq t_0$$

$$i \in E_B$$

sendo  $h_i \cdot \psi_i \cdot g$  uma função contínua.

Por outro lado, nos ramos capacitivos da árvore vale:

$$39 \quad \theta_i(t) = g_i(q_i(t)) \quad \begin{array}{l} \forall i \in Z_B \\ \forall t \geq t_0 \end{array}$$

Mas, devido a (II-32) existe uma matriz  $D$ ,  $m \times n-1$ , tal que

$$40 \quad \theta(t) = D \theta_A(t) \quad \forall t \geq t_0$$

onde  $A = Z_B \cup E_B$ . Logo, de (38), (39) e (40) concluímos a existência da função contínua  $T$ . (C.Q.D.)

A hipótese adicional (37) que nos permitiu garantir a estabilidade assintótica em tensão e corrente da rede, não implica necessariamente na existência de um único estado de equilíbrio, nem mesmo na compacidade do conjunto de equilíbrio  $\Omega$ . O exemplo abaixo esclarece este fato.

Seja  $(G; C_1, C_2; \mathcal{C}_1)$  uma rede RC onde:

$$G = (N, A) \text{ com}$$

$$N = \{a, b, c\}$$

$$A = \{(a, b), (c, b), (c, a)\}$$

$$C_1 = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta = \varphi\}$$

$$C_2 = \{(\theta, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta \leq 0\} \cup \{(0, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi \geq 0\}$$

$$\mathcal{C}_1 = (\mathbb{R}, g) \text{ com } \theta = g(q) = q$$

A figura (1), que representa o grafo  $G$  com os resistores  $C_1$  e  $C_2$  e o capacitor  $\mathcal{C}_1$  associados a seus ramos, ilustra a respectiva rede RC.

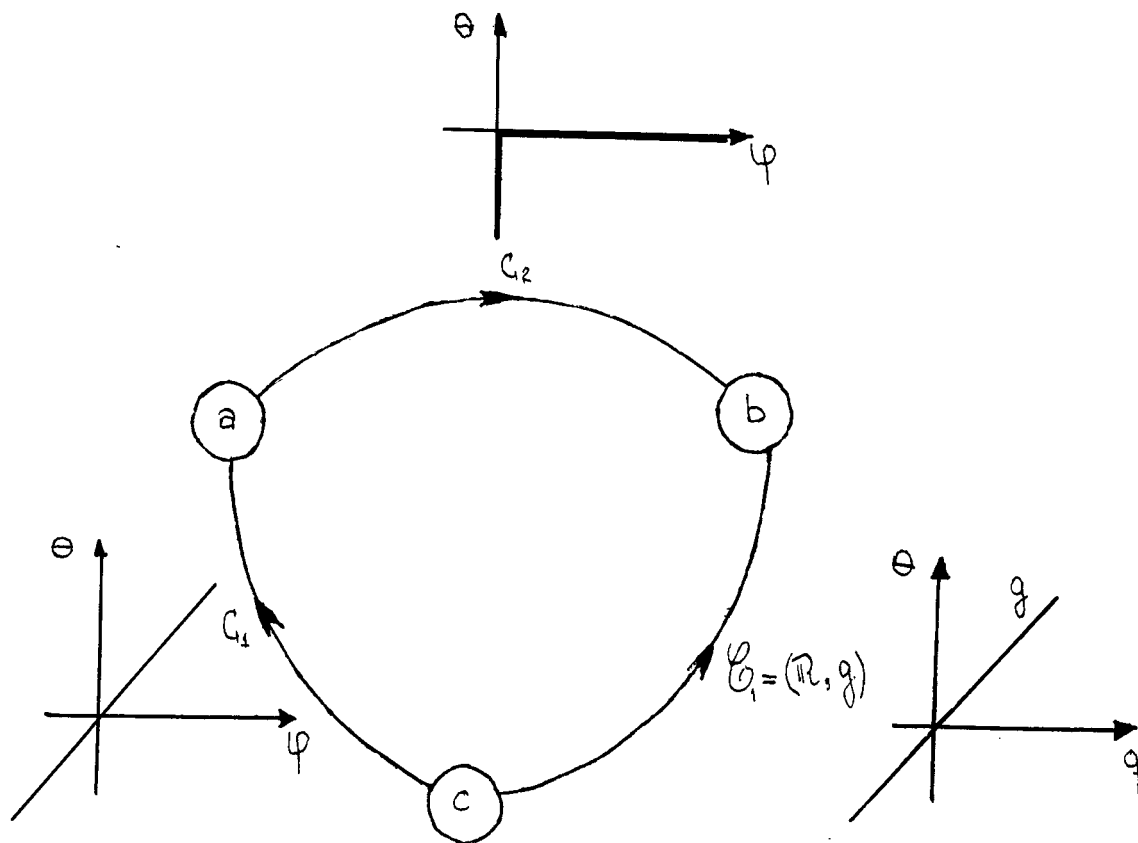


Figura 1

Esta rêde RC pode servir de modelo para o circuito elétrico representado na figura (2).

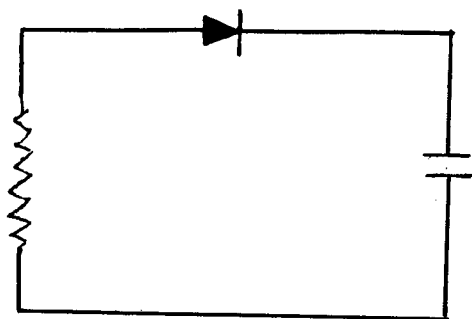


Figura 2

Observemos que a rêde satisfaz as hipóteses (IV-43): a hipótese sôbre coárvore   verificada na coárvore  $(U, V)$  onde  $U = \{a, c\}$  e  $V = \{(c, a)\}$

Por outro lado, a  rvore  $(N, W)$  onde  $W = \{(c, a), (c, b)\}$  satisfaz a hipótese adicional (37). Logo, a respectiva rêde RC é assintóticamente estável em tensão e corrente.

Note-se que o conjunto de estados de equilíbrio é dado por:

$$\Omega = \{q \in \mathbb{R} \mid q \geq 0\}$$

o conjunto de tensões de equilíbrio por

$$\Omega^* = \{\theta \in \mathbb{R} \mid \theta \geq 0\}$$

e o conjunto de fluxos de equilíbrio por

$$\hat{\Omega} = \{0\}$$

Note-se também que apesar de  $\Omega$  e  $\Omega^*$  serem conjuntos não limitados,  $q(\cdot)$  e  $\theta(\cdot)$  convergem para 0 quando as condi es iniciais são tomadas em  $(-\infty, 0]$ .

## C A P Í T U L O V I

CONCLUSÃO.

Podemos resumir o estudo realizado nos capítulos anteriores no seguinte teorema:

Teorema: Suponha que a rêde RC satisfaça as seguintes hipóteses:

- a) todos os resistores possuem curvas características crescentes  $C_i$ ,  $i \in E$ , com projeções verticais  $I_i$  fechadas.
- b) as funções características dos capacitores  $g_i$ ,  $i \in Z$ , são funções Lipschitzianas, e estritamente crescentes.
- c) o conjunto  $X$  dado por:

$$X = \{ \varphi \in \mathbb{R}^m \mid \varphi_i \in I_i, i \in E; \varphi_i = 0, i \in Z; M\varphi = 0 \}$$

onde  $M$  é a matriz de incidência, é não vazio.

- d) existe uma coárvore  $(C, B)$  de  $G$  satisfazendo:

$$\begin{aligned} & \exists k > 0 \text{ tal que } \forall i \in T \\ & (\forall (\theta_i^1, \varphi_i^1) \in C_i) \cdot (\forall (\theta_i^2, \varphi_i^2) \in C_i) \\ & \quad |\theta_i^2 - \theta_i^1| \geq k |\varphi_i^2 - \varphi_i^1| \end{aligned}$$

onde  $T = \{ i \in N \mid \alpha_i \in B \}$



Então, para qualquer valor de carga inicial  $q^0 \in \mathbb{R}^z$  e instante inicial  $t_0$  existem  $q: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $\varphi: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\mathcal{C} = [t_0, +\infty)$ , únicas e existe  $\theta: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que  $(\theta, \varphi, q)$  é solução da rêde RC. Além disso,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = \bar{q}$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \bar{\varphi}$$

onde  $\bar{q}$  e  $\bar{\varphi}$  são, respectivamente, um estado e um fluxo de equilíbrio.

Se, em adição, existir uma árvore do grafo associado constituída exclusivamente de ramos associados a resistores controlados por corrente ou a capacitores, então a rêde é assintoticamente estável em corrente e tensão.

Apesar de termos limitado o nosso trabalho ao estudo de rêdes RC, resultados análogos poderiam ser obtidos para rêdes RL. Isto poderia ser conseguido, por um desenvolvimento similar, partindo-se do problema de potencial associado em lugar do problema de transporte.

Observamos que seria de interêsse uma interpretação "física" do significado das funções  $f_i$  (associadas aos resistores) e da função  $W$ , função objetiva do dual, para o caso de circuitos elétricos.

Outra função que merece interpretação é a função

de Liapunov  $V_{\bar{q}}$ . Chamamos a atenção para o fato das duas primeiras funções terem dimensão de "potência", enquanto a última tem dimensão de "energia".

Algumas generalizações possíveis sugerem propostas para pesquisas futuras. Dentre elas citamos a análise da estabilidade de rêsdes RLC, relaxamento da hipótese de que as curvas características dos resistores sejam crescentes e o estudo de rêsdes com "elementos multipolares".

A P Ê N D I C E AFUNÇÕES CONVEXAS, DUALIDADE E FUNÇÕES CONVEXAS QUASE SUAVES.

Nêste apêndice apresentamos os principais resultados de funções convexas e de dualidade em problemas convexas de otimização usados em nosso estudo.

Os resultados sôbre subgradientes e subdiferenciais podem ser encontrados em ROCKAFELLAR(70) e uma parcela dos resultados de dualidade em GEOFFRION(71). Os resultados sôbre a diferenciabilidade da função objetivo do dual e os resultados de função convexa quase suave são devidos a PERSIANO(73).

Funções convexas

Sejam  $X \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto convexo e  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ .

1 Definição: A função  $f$  é convexa em  $X$  se

$$(\forall x^1, x^2 \in X) (\forall \lambda \in [0, 1]) \\ f((1 - \lambda) x^1 + \lambda x^2) \leq (1 - \lambda) f(x^1) + \lambda f(x^2)$$

2 Definição: A função  $f$  é estritamente convexa em  $X$  se

$$(\forall x^1, x^2 \in X) (\forall \lambda \in (0, 1))$$

$$f((1 - \lambda)x^1 + \lambda x^2) < (1 - \lambda)f(x^1) + \lambda f(x^2).$$

3 A função  $f$  é côncava (estritamente côncava) se  $-f$  é convexa (estritamente convexa).

### Subgradientes e Subdiferenciais.

Sejam  $X \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto convexo e  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função convexa.

4 Definição: Um vetor  $\gamma \in \mathbb{R}^n$  é subgradiente de  $f$  em  $x^* \in X$  se e só se

$$f(x) \geq f(x^*) + \langle \gamma, (x - x^*) \rangle \quad \forall x \in X$$

Se  $g$  é uma função côncava em  $X$  define-se:

5 Definição: Um vetor  $\gamma \in \mathbb{R}^n$  é supergradiente de  $g$  em  $\bar{x} \in X$  se e só se

$$g(x) \leq g(\bar{x}) + \langle \gamma, (x - \bar{x}) \rangle \quad \forall x \in X.$$

O conceito de subgradiente de uma função convexa (supergradiente de uma função côncava) é uma extensão do con

ceito de gradiente. Se  $f$  é diferenciável em  $x^* \in X$  ( $g$  diferenciável em  $\bar{x} \in X$ ) então o gradiente  $\nabla f(x^*)$  (gradiente  $\nabla g(\bar{x})$ ) é o único subgradiente de  $f$  em  $x^*$  (único supergradiente de  $g$  em  $\bar{x}$ ).

O conjunto de subgradientes em um ponto de uma função convexa  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo, toma uma forma particular. Se  $f$  possui derivada à direita  $f^+(x)$  e derivada à esquerda  $f^-(x)$  em  $x \in I$  então o conjunto de subgradientes de  $f$  em  $x$  é dado por:

$$6 \quad \partial f(x) \triangleq [f^-(x), f^+(x)]$$

Se  $f$  não possui derivada à direita nem à esquerda em  $x \in I$ , então  $f$  não tem subgradientes em  $x$  e  $\partial f(x) = \emptyset$ .

7 Definição: Sejam  $X \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto convexo e  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função convexa. A subdiferencial de  $f$ , denotada  $\partial f$ , é a aplicação de  $X$  em  $P(\mathbb{R}^n)$  que a cada  $x \in X$  associa o conjunto de subgradientes de  $f$  em  $x$ .

A subdiferencial de  $f$  em  $x^* \in X$  é o conjunto

$$8 \quad \partial f(x^*) = \left\{ \gamma \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq f(x^*) + \langle \gamma, (x - x^*) \rangle \forall x \in X \right\}$$

A função  $f$  é dita subdiferenciável em  $x \in X$  se

$$\partial f(x) \neq \emptyset$$

9 Um mapeamento ponto conjunto  $S: X \rightarrow P(\mathbb{R}^n)$ ,  $X \subset \mathbb{R}^n$ , é crescente se:

$$(\forall x^1, x^2 \in X) \quad \forall \gamma^1 \in S(x^1), \forall \gamma^2 \in S(x^2)$$

$$\langle \gamma^1 - \gamma^2, x^1 - x^2 \rangle \geq 0$$

10 Pode-se demonstrar que a subdiferencial de uma função convexa é um mapeamento ponto conjunto crescente.

Os resultados relativos a subgradientes e subdiferenciais podem ser encontrados em ROCKAFELLAR(70).

### Dualidade em programação não linear.

A forma canônica do problema primal é:

$$11 \quad (P) \quad \begin{array}{l} \text{Min} \quad f(x) \\ x \in X \end{array}$$

$$\text{Sujeito a: } g(x) \leq 0$$

onde  $g(x) \triangleq (g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x))'$ ,  $g_i: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ ,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Em (P),  $X$  é convexo e não vazio e todas as funções envolvidas são convexas em  $X$ .

O dual de (P) com respeito ao vínculo  $g$  é:

$$12 \quad (D) \quad \begin{array}{l} \text{Max} \quad W(u) \\ u \geq 0 \end{array}$$

onde  $W: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função definida como:

$$13 \quad W(u) = \inf_{x \in X} (f(x) + \langle u, g(x) \rangle).$$

14 Conforme GEOFFRION(71) pag.2 a  $W$  é uma função côncava.

O vetor  $u \in \mathbb{R}^m$  é a variável dual de (P).

15 Definição: O valor ótimo de (P) é o ínfimo do conjunto  $\{ f(x) \mid x \in X, g(x) \leq 0 \}$ . O valor ótimo de (D) é:

$$\sup \left\{ \inf_{x \in X} f(x) + \langle u, g(x) \rangle \mid u \in \mathbb{R}^m, u \geq 0 \right\}.$$

Convencionamos que:  $\inf \emptyset = +\infty$  e  $\sup \emptyset = -\infty$ .

Dessa forma, (P) e (D) admitem, sempre, valores ótimos.

16 Definição: A função perturbação associada a (P) é a função  $v: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$v(y) = \inf \left\{ f(x) \mid x \in X, g(x) \leq y \right\}$$

O vetor  $y \in \mathbb{R}^m$  é chamado vetor perturbação.

Observe-se que  $v(0)$  é o valor ótimo de (P).

17 Definição: O problema (P) é estável se e só se  $v(0)$  for finito e existir  $L \in \mathbb{R}$ ,  $L > 0$  tal que:

$$18 \quad \frac{v(0) - v(y)}{\|y\|} \leq L \quad (\forall y \in \mathbb{R}^m, y \neq 0)$$

A condição (18) é equivalente a existência de sub gradiente de  $v$  em  $y = 0$ .

Em seguida apresentamos uma condição do teorema de dualidade de GEOFFRION(71), que utilizamos na secção 2 do capítulo IV.

19        Teorema:    Se o problema primal (P) é estável então o dual (D) admite solução.

Vamos apresentar agora um teorema de estabilidade, para uma classe de problemas de otimização, que nos permitirá concluir sobre a estabilidade do problema de transporte.

Consideremos o problema:

$$20 \quad \begin{array}{l} \text{Min} \quad f(x) \\ x \in X \end{array}$$

$$\text{sujeito a} \quad g(x) = Mx - a \leq 0$$

onde  $X \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto convexo poliédrico,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função convexa,  $M$  uma matriz  $m \times n$  e  $a \in \mathbb{R}^m$ .

21        Teorema:    Se  $f$  é subdiferenciável em  $X$  e o problema (20) admite solução, então (20) é estável.

Demonstração:

Ver PERSIANO(71) pag. 120.



Note-se que o problema de transporte definido em (III-13) é um problema de otimização do tipo (20).

Em seguida faremos um estudo sôbre a diferenciabilidade da função  $W$ , definida em (13).

### Diferenciabilidade da função $W$

22        Lema:    Se  $\bar{x} \in X$  é tal que

$$W(\bar{u}) = f(\bar{x}) + \langle \bar{u}, g(\bar{x}) \rangle \quad \text{então } g(\bar{x}) \in \partial W(\bar{u}).$$

Ou seja:  $g(\bar{x})$  é um supergradiente da  $W$  no ponto  $u = \bar{u}$ .

#### Demonstração:

Da definição da  $W$  (13) tem-se:

23                     $W(u) \leq f(x) + \langle u, g(x) \rangle \quad \forall x \in X$

Da hipótese do lema vem:

24                     $W(\bar{u}) = f(\bar{x}) + \langle \bar{u}, g(\bar{x}) \rangle$

Como  $\bar{x} \in X$  e de (23) vem

25                     $W(u) \leq f(\bar{x}) + \langle u, g(\bar{x}) \rangle$

Subtraindo (24) de (25) fica:

$$W(u) - W(\bar{u}) \leq \langle g(\bar{x}), u - \bar{u} \rangle \quad \text{ou seja}$$

$$26 \quad W(u) \leq W(\bar{u}) + \langle g(\bar{x}), u - \bar{u} \rangle$$

O que prova que  $g(\bar{x})$  é supergradiente da  $W$  em  $u = \bar{u}$ .  
(C.Q.D.).

Com o lema e teorema seguintes, devido a PERSIANO (73), teremos condições que garantem a diferenciabilidade da função  $W$ . Para demonstrá-los usou-se o conceito de mapeamento ponto conjunto decrescente.

Um mapeamento ponto conjunto  $S: X \rightarrow P(\mathbb{R}^n)$ ,  $X \subset \mathbb{R}^n$ , é decrescente quando  $-S$  é crescente (ver (9)).

27 Lema: Suponha que  $S: X \rightarrow P(\mathbb{R}^n)$  é um mapeamento decrescente e  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$  satisfaz a

$$f(x) \in S(x)$$

Se  $f$  é contínua em  $\bar{x} \in X$  então  $S(\bar{x})$  é um conjunto unitário.

Demonstração:

Por absurdo, suponha que  $\gamma \in S(\bar{x})$  mas  $\gamma \neq f(\bar{x})$ .

Sem perda de generalidade suponhamos

$$28 \quad \gamma_1 \neq f_1(\bar{x})$$

Seja

$$x^k = \bar{x} - \frac{(\gamma_1 - f_1(\bar{x}))}{k} e^1$$

onde  $e^1$  é o primeiro vetor da base canônica de  $\mathbb{R}^n$ .

Então,  $x^k$  converge a  $\bar{x}$  e por continuidade de

$f$  em  $\bar{x}$  temos:

$$29 \quad \lim_{k \in \mathbb{N}} f(x^k) = f(\bar{x})$$

Como  $S$  é decrescente, temos  $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 0 &\geq \langle x^k - \bar{x}, f(x^k) - \gamma \rangle \\ &= \frac{1}{k} \langle (f_1(\bar{x}) - \gamma_1) e^1, f(x^k) - \gamma \rangle \\ &= \frac{1}{k} (f_1(\bar{x}) - \gamma_1) (f_1(x^k) - \gamma_1) \end{aligned}$$

o que devido a (29) implica em

$$0 \geq (f_1(\bar{x}) - \gamma_1)^2$$

o que contradiz (28) provando o lema. (C.Q.D)

30 Teorema: Suponha que, no problema (P), as funções  $f$  e  $g$  são convexas e contínuas em  $X \subset \mathbb{R}^n$ , conjunto convexo e fechado. Suponha que para cada  $u \geq 0$  exista  $x \in X$  tal que

$$31 \quad W(u) = f(x) + \langle u, g(x) \rangle$$

e seja  $\varphi = \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função que associa a cada  $u \geq 0$  uma solução  $\varphi(u)$  de (31). Se para algum  $\bar{u} > 0$  existe um único  $\bar{x} \in X$  satisfazendo (31), então  $W$  é diferenciável em  $\bar{u}$ , vale:

$$\nabla W(\bar{u}) = g(\bar{x})$$

e  $\varphi$  é contínua em  $\bar{u}$ .

Demonstração: Do Lema (22) temos que

$$g(x(\bar{u})) \in \partial W(\bar{u})$$

Como  $W$  é côncava basta mostrarmos que  $\partial W(\bar{u})$  é unitário.

Seja  $\varphi: \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função que associa a cada  $u \gg 0$  uma solução  $\varphi(u)$  de (31). Como  $g$  é contínua em  $\bar{x} = \varphi(\bar{u})$  e  $\partial W$  é decrescente, pelo lema anterior, temos que  $\partial W(\bar{u})$  é unitário se  $\varphi$  for contínua em  $\bar{u}$ . Provemos isto.

Seja  $u^k \in \mathbb{R}_+^m$  uma sequência de vetores positivos convergentes a  $\bar{u}$ . Como  $W$  é côncava e  $\bar{u} > 0$  então  $W$  é contínua em  $\bar{u}$  e

$$32 \quad \lim_{k \in \mathbb{N}} W(u^k) = W(\bar{u})$$

Seja  $x^k = \varphi(u^k)$ . Provemos que  $x^k$  converge a  $\bar{x}$ . Tomando uma subsequência se necessário, suponhamos, por absurdo, que existe  $\varepsilon > 0$  tal que

$$33 \quad x^k \notin \overline{B_\varepsilon(\bar{x})}$$

Seja  $y^k \in X$  uma combinação convexa de  $\bar{x}$  e  $x^k$  tal que

$$34 \quad \|\bar{x} - y^k\| = \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Então, temos

$$y^k = \lambda^k \bar{x} + (1 - \lambda^k) x^k \quad \text{com } \lambda^k \in (0, 1) \text{ e}$$

como  $f$  e  $g$  são convexas:

$$35 \quad f(y^k) + \langle u^k, g(y^k) \rangle \leq \lambda^k (f(\bar{x}) + \langle u^k, g(\bar{x}) \rangle) + (1 - \lambda^k) (f(x^k) + \langle u^k, g(x^k) \rangle)$$

Mas por definição de  $\varphi$  e  $(x^k)$  temos que

$$W(u^k) = f(x^k) + \langle u^k, g(x^k) \rangle \leq f(\bar{x}) + \langle u^k, g(\bar{x}) \rangle$$

Substituindo esta desigualdade em (35) resulta:

$$36 \quad f(y^k) + \langle u^k, g(y^k) \rangle \leq f(\bar{x}) + \langle u^k, g(\bar{x}) \rangle$$

Mas como  $(y^k)$  está em um compacto de (34) tomando uma subsequência, se necessário, temos que existe  $\bar{y} \in X$  com

$$37 \quad \|\bar{x} - \bar{y}\| = \varepsilon$$

e

$$38 \quad \lim y^k = \bar{y}$$

Então, tomando o limite de (36), por continuidade de  $f$  e  $g$ , resulta

$$f(\bar{y}) + \langle \bar{u}, g(\bar{y}) \rangle \leq f(\bar{x}) + \langle \bar{u}, g(\bar{x}) \rangle$$

o que devido a (37) contradiz a hipótese de  $\bar{x}$  ser único. Logo  $x^k$  converge a  $\bar{x}$  e  $\varphi$  é contínua. (C.Q.D.).

Vamos introduzir agora o conceito de função convexa quase suave.

### Função convexa quase suave.

Vamos utilizar o conceito de função convexa quase

suave para demonstrar, numa forma mais compacta, o teorema de existência de solução de (PT) (III-49).

39 Definição: Uma função convexa quase suave é uma função  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  convexa e subdiferenciável em  $X \subset \mathbb{R}^n$  convexo, que satisfaz a condição:

$$40 \quad \bigcup_{x \in X} \partial f(x) = \mathbb{R}^n.$$

Em particular, se  $f$  é definida em um intervalo  $I$  da reta, a condição (40) implica que

$$\partial f(\cdot) = \{ (\gamma, x) \mid x \in I, \gamma \in \partial f(x) \}$$

é uma curva crescente com projeção horizontal igual a  $\mathbb{R}$ .

41 Lema: Se  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  é quase suave em  $X \subset \mathbb{R}^n$  convexo, fechado, então:

$f$  possui mínimo em  $X$

$$\text{e } C_\alpha = \{ x \in X \mid f(x) \leq \alpha \}$$

é compacto para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Demonstração:

$f$  possui mínimo em  $X$  pois pela definição de função convexa suave (39) tem-se:

$$\exists \bar{x} \in X \quad \text{tal que} \quad 0 \in \partial f(\bar{x})$$

o que significa que a  $f$  admite um hiperplano suporte horizontal em  $\bar{x}$  ou seja, que a  $f$  possui mínimo em  $X$ .

Observemos agora que o conjunto  $C_\alpha$  é fechado pois a  $f$  é contínua (subdiferenciável) e  $X$  é fechado. É também convexo pois  $C_\alpha$  é um conjunto de nível de uma função convexa.

Suponhamos que para algum  $\alpha \in \mathbb{R}$   $C_\alpha$  seja não limitado. Então como  $C_\alpha$  é convexo, existem  $\bar{x} \in X$  e  $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$42 \quad \bar{x} + \lambda \bar{y} \in C_\alpha \quad \forall \lambda \geq 0$$

Como  $f$  é quase suave então existirá um  $x^*$  tal que  $\bar{y} \in \partial f(x^*)$ , isto é:

$$43 \quad f(x) \geq f(x^*) + \langle \bar{y}, x - x^* \rangle \quad \forall x \in X$$

Por (42) podemos dizer que  $\forall \lambda > 0$

$$44 \quad \alpha \geq f(\bar{x} + \lambda \bar{y})$$

Por (43)

$$f(\bar{x} + \lambda \bar{y}) \geq f(x^*) + \langle \bar{y}, \bar{x} + \lambda \bar{y} - x^* \rangle$$

ou

$$45 \quad f(\bar{x} + \lambda \bar{y}) \geq f(x^*) + \langle \bar{y}, \bar{x} - x^* \rangle + \lambda \|\bar{y}\|^2$$

Comparando (44) e (45) vem:  $\forall \lambda > 0$

$$46 \quad \alpha \geq \lambda \|\bar{y}\|^2 + (f(x^*) + \langle \bar{y}, \bar{x} - x^* \rangle)$$

o que é um absurdo uma vez que o membro direito da inequação (46) pode se tornar tão grande quanto desejamos, bastando para isto aumentar  $\lambda$ . Logo  $C_\alpha$  é limitado. Como  $C_\alpha$  é fechado então  $C_\alpha$  é compacto. (C.Q.D.).

47 Teorema: Sejam  $Y \subset X \subset \mathbb{R}^n$  convexos, fechados,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  quase suave em  $X$ , e  $g: Y \rightarrow \mathbb{R}$  convexa e subdiferenciável em  $Y$ . Então,  $f + g$  é quase suave em  $Y$ .

Demonstração:

Para mostrarmos que  $f + g$  é quase suave basta mostrarmos que dado  $y \in \mathbb{R}^n$  existe  $\tilde{x} \in Y$  tal que

$$y \in \partial(f + g)(\tilde{x}).$$

Mostraremos que  $f(\cdot) + g(\cdot) - \langle y, \cdot \rangle$  é minimizada em  $Y$  ficando demonstrada a tese, pois daí:

$$f(x) + g(x) \geq f(\tilde{x}) + g(\tilde{x}) + \langle y, \tilde{x} - x \rangle \quad \forall x \in Y$$

onde  $\tilde{x}$  é ponto de mínimo da  $f(\cdot) + g(\cdot) - \langle y, \cdot \rangle$  em  $Y$ , o que significa conforme definição de subgradiente (4) que  $y$  é subgradiente da  $f + g$  em  $\tilde{x}$  isto é:  $y \in \partial(f + g)(\tilde{x})$ .

Seja  $x^* \in Y$  e  $\gamma \in \partial g(x^*)$ . Então

$$48 \quad g(x) \geq g(x^*) + \langle \gamma, x - x^* \rangle \quad \forall x \in Y$$



De (48) podemos dizer que:

$$49 \quad f(x) + g(x) - \langle y, x \rangle \geq f(x) + g(x^*) + \langle \gamma, x - x^* \rangle - \langle y, x \rangle$$

Seja  $h: X \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$50 \quad h(x) = f(x) + g(x^*) + \langle \gamma, x - x^* \rangle - \langle y, x \rangle$$

A função  $h$  definida acima representa o membro direito da inequação (49). Ela é subdiferenciável com subdiferencial

$$51 \quad \partial h(x) = \partial f(x) + \{ \gamma - y \}$$

Como  $f$  é quase suave em  $X$  então por (51)  $h$  é quase suave em  $X$ .

Consideremos agora o conjunto:

$$C = \left\{ x \in Y \mid f(x) + g(x) - \langle y, x \rangle \leq \alpha \right\}$$

Devido a (49) este conjunto estará contido em:

$$C_\alpha = \left\{ x \in X \mid h(x) \leq \alpha \right\}$$

que pelo Lema (51) é compacto.

O conjunto  $C$  é fechado pois  $Y$  é fechado e  $f(\cdot) + g(\cdot) - \langle y, \cdot \rangle$  é contínua e está contido num compacto, logo, é compacto.

Como  $C$  é compacto e a função  $f(\cdot) + g(\cdot) - \langle y, \cdot \rangle$  é contínua então esta função admite um ponto de mínimo em  $Y$ , provando o teorema. (C.Q.D).

Um Teorema para funções estritamente convexas.

52 Teorema: Seja  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função estritamente convexa tendo  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  por ponto de mínimo. Então, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\alpha > V(\bar{x})$  tal que

$$C_\alpha = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq \alpha \} \subset \overline{B_\varepsilon(\bar{x})}$$

onde

$$\overline{B_\varepsilon(\bar{x})} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - \bar{x}\| \leq \varepsilon \}$$

Demonstração: Sejam  $\varepsilon > 0$  e

53 
$$\alpha \triangleq \text{Min} \{ V(x) \mid \|x - \bar{x}\| = \varepsilon \}$$

Como  $V$  é contínua e o conjunto

$$A = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - \bar{x}\| = \varepsilon \}$$

é compacto, o mínimo existe em (53) ou seja, existe  $\tilde{x} \in A$  tal que

$$\alpha = V(\tilde{x})$$

Além disso,  $\alpha > V(\bar{x})$  pois  $\bar{x}$  é ponto de mínimo de  $V$ ; como  $\bar{x} \notin A$  resulta  $\tilde{x} \neq \bar{x}$  e da convexidade estrita de  $V$ , conclui-se:

54 
$$\alpha > V(\bar{x})$$

Mostremos que  $C_\alpha \subset \overline{B_\varepsilon(\bar{x})}$ . De fato, se  $\hat{x} \in C_\alpha$  mas  $\|\bar{x} - \hat{x}\| > \varepsilon$  então existe  $\lambda \in (0, 1)$  tal que

$$\|\bar{x} - (\lambda \bar{x} + (1 - \lambda) \hat{x})\| = \varepsilon$$

ou seja  $y = \lambda \bar{x} + (1 - \lambda) \hat{x} \in A$ . Contudo, da convexidade estrita de  $V$  e de  $\bar{x}, \hat{x} \in C_\alpha$  resulta:

$$\begin{aligned} v(y) &< \lambda v(\bar{x}) + (1 - \lambda) v(\hat{x}) \\ &\leq \lambda \alpha + (1 - \lambda) \alpha = \alpha \end{aligned}$$

o que contradiz (53). Logo,  $\hat{x} \in \overline{B_\varepsilon(\bar{x})}$  provando o teorema.

A P Ê N D I C E B

UM TEOREMA DE ESTABILIDADE PARA SISTEMAS AUTÔNOMOS .

O teorema, devido a LASALLE(67), que apresentamos aqui, permite obter informações sôbre a estabilidade de sistemas autônomos, com um conjunto não necessariamente enumerável de pontos de equilíbrio.

Consideremos o sistema autônomo

$$1 \quad \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t))$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\forall t \geq 0$ , e  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função contínua satisfazendo alguma condição que garanta unicidade de solução de (1).

Para cada  $x \in \mathbb{R}^n$  e para cada conjunto fechado  $E \subset \mathbb{R}^n$  a distância de  $x$  a  $E$  é definida como

$$2 \quad d(x, E) = \min \left\{ \|x - y\| \ ; \ y \in E \right\}$$

Se  $x(t)$  é uma solução de (1) diz-se que  $x(t)$  se aproxima de  $E$  ( $x(t) \rightarrow E$ ) quando  $t$  tende a infinito se:

$$3 \quad d(x(t), E) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad t \rightarrow \infty$$

A condição (3) é equivalente a dizer que existe uma sequência  $t_k$  tendendo a infinito com  $k$  tal que:

$$4 \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x(t_k) \in E \quad \text{se } x(\cdot) \text{ é limitada}$$

5 Um conjunto  $M$  é dito conjunto invariante do sistema (1), se toda solução de (1) partindo em  $M$  permanece em  $M$  para todo  $t$ .

6 Uma função  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , continuamente diferenciável (classe  $C^{(1)}$ ) é uma função de Liapunov para o sistema (1) em  $G \subset \mathbb{R}^n$  se a função  $\dot{V}(\cdot) = \langle \nabla V(\cdot), f(\cdot) \rangle$  não muda de sinal em  $G$ .

Definamos o conjunto

$$7 \quad E = \left\{ x \in \bar{G} \mid \dot{V}(x) = 0 \right\}$$

onde  $\bar{G}$  é a aderência de  $G$ . Seja  $M$  o maior conjunto invariante contido em  $E$ . O teorema fundamental para sistemas autônomos é o seguinte:

8 Teorema: Se  $V$  é uma função de Liapunov em  $G$  para (1), então toda solução  $x(t)$  que permanece em  $G$  para todo  $t > 0$  ou se aproxima de  $M$  ou diverge quando  $t \rightarrow \infty$ .

B I B L I O G R A F I A

- BERGE, C. et GHOUILA-HOURI, Programmes, Jeux et Reseaux de Transport, Paris, Dunod, 1962.
- CHUA, L. O., Nonlinear Network Theory, McGraw-Hill, 1969.
- DESOER, C. A. and KATZENELSON, J., "Nonlinear RLC Networks", Bell System Technical Journal, Vol. 44, No 1, January 1965.
- DUFFIN, R. J., "Nonlinear Networks", Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 53, 1947, pag. 963.
- GEOFFRION, A. M., "Duality in Nonlinear Programming : a Simplified Applications-Oriented Development", SIAM Review Vol. 13, No 1, January 1971.
- HOFFMAN, A. J., "Some Recent Applications to Extremal Combinatorial Analysis ", Proc. Symposia on Applied Math., Vol. 10, 1960.
- IRI, M., Network Flow, Transportation and Scheduling : Theory and Algorithms, Academic Press, New York and London 1969.
- LASALLE, J. P., "An Invariance Principle in Theory of Stability," HALLE, J. K. and LASSALLE J. P., Differential Equations and Dynamical Systems, New York, Academic Press, 1967, pag. 277

- NEMYTSKII, V. and STEPANOV., Qualitative Theory of Differential Equations, Princeton University Press, 1960.
- PERSIANO, R. C. M., "Estudo de alguns Problemas de Transporte em Redes com Fluxo Dinamico", Tese de Mestrado, COPPE, 1971
- PERSIANO, R. C. M., "Comunicação Particular", 1973.
- ROCKAFELLAR, R. T., Convex Analysis, Princeton University Press, 1970.
- SANDBERG, I. W. and Willson, A. N., "Existence and Uniqueness of Solutions for the Equations of Nonlinear DC Networks", SIAM J. Appl. Math., Vol. 22, march 1972, pag. 173.