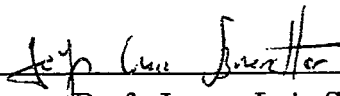


ALGORITMOS PARA A GERAÇÃO DE CLASSES DE  
EXTENSÕES DE CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS

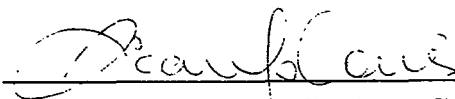
Aquiles Braga de Queiroz

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS  
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE  
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS  
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS  
EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:



Prof. Jayme Luiz Szwarcfiter, Ph.D.



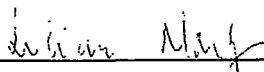
Prof. Ricardo Cordeiro Corrêa, Docteur.



Prof. Ricardo Dahab, Ph.D.



Profª. Celina Miraglia Herrera de Figueiredo, D.Sc.



Profª. Lilian Markenzon, D.Sc.



Prof. Luiz Satoru Ochi, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

MAIO DE 2005

QUEIROZ, AQUILES BRAGA DE

Algoritmos para a Geração de Classes de Extensões de Conjuntos Parcialmente Ordenados [Rio de Janeiro] 2005

VII, 87 p., 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 2005)

Tese – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Conjuntos Parcialmente Ordenados
2. Extensões de Ordenações Parciais
3. Algoritmos de Enumeração
4. Ordens de Intervalo
5. Semi-ordens
6. Teoria dos Grafos

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

*À memória de meu pai  
Prof. Paulo Ivo de Queiroz,  
e à memória de minha avó  
Maria Izabel.*

# Agradecimentos

Sou muito grato à minha mãe Iucinara da Conceição Braga de Queiroz e ao meu irmão Paulo Ivo Braga de Queiroz pelo incentivo e ajuda em todos os momentos. Muito obrigado por tudo.

Ao Prof. Jayme Luiz Szwarcfiter pela orientação singular durante o curso de doutorado no Programa de Engenharia de Sistemas e Computação da COPPE/UFRJ.

À Professora Diomara Pinto e aos amigos da Linha de Algoritmos e Combinatória, dentre os quais Márcia Rosana Cerioli, Luerbio Faria, Noemi Costa dos Santos e Paulo Eustáquio Duarte Pinto, pelo apoio dado nesses anos todos.

A todos do Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, especialmente à Maria Lúcia de Paula, Solange Santos, Cláudia Prata, Mercedes Barreto, Sueli Gonçalves e Sônia Galliano, da Secretaria do PESC .

A todas as pessoas que, de alguma forma, contribuíram para o início e/ou conclusão deste trabalho.

Ao CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico pelo suporte financeiro.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D. Sc.)

## ALGORITMOS PARA A GERAÇÃO DE CLASSES DE EXTENSÕES DE CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS

Aquiles Braga de Queiroz

Maio/2005

Orientador: Jayme Luiz Szwarcfiter

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Dado um conjunto finito  $E$ , uma ordenação parcial  $P$  em  $E$  é uma relação binária reflexiva, anti-simétrica e transitiva. Uma extensão de  $P$  é uma ordenação parcial  $Q$  em  $E$  tal que  $P \subseteq Q$ . Consideramos  $\varepsilon(P)$  o conjunto de extensões de uma ordenação parcial  $P$ . Neste trabalho, estudamos caracterizações do conjunto de extensões de uma ordenação parcial  $P$  pertencentes a determinadas classes de ordenações, assim como métodos de geração de tais extensões. As classes de extensões estudadas incluem ordenações arbóreas, ordenações fracas, ordenações intervalares e semi-ordens. São apresentados métodos de geração de tais classes de extensões, baseados em uma caracterização de  $\varepsilon(P)$  — utilizando o conceito de acréscimo lexicográfico de  $P$ . Em particular, é apresentado um método de geração de extensões intervalares de uma ordenação parcial  $P$  em tempo  $O(n^2)$  por extensão, assim como um método de geração de extensões semi-ordens de  $P$  em tempo  $O(n^3)$  por extensão.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D. Sc.)

## ALGORITHMS FOR GENERATING EXTENSION CLASSES OF PARTIALLY ORDERED SETS

Aquiles Braga de Queiroz

May/2005

Thesis Supervisor: Jayme Luiz Szwarcfiter

Department: Computing and Systems Engineering

Given a finite set  $E$ , a partial order  $P$  on  $E$  is a reflexive, anti-symmetric and transitive binary relation. An extension of  $P$  is a partial order  $Q$  on  $E$  such that  $P \subseteq Q$ . Let  $\varepsilon(P)$  be the set of extensions of a partial order  $P$ . In this work, we study characterizations of the set of extensions of a partial order  $P$  belonging to certain classes of orders, as well as methods for generating such extensions. The classes studied include forest orders, weak orders, interval orders and semi-orders. Methods based on a characterization of  $\varepsilon(P)$  for generating such extensions are presented — using the concept of lexicographic augmentation of  $P$ . The method presented for generating interval extensions of a partial order  $P$  requires  $O(n^2)$  time per extension, whereas the method presented for generating semi-order extensions of  $P$  requires  $O(n^3)$  time per extension.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Conjuntos Parcialmente Ordenados</b>	<b>5</b>
2.1	Definições e Principais Resultados . . . . .	5
2.2	Reticulados e Classes de Ordens . . . . .	10
2.3	Geração de Extensões Lineares . . . . .	18
2.4	Geração de Ideais . . . . .	22
2.5	Geração de Extensões . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Extensões Arbóreas</b>	<b>43</b>
3.1	Caracterização de Extensões Arbóreas . . . . .	43
3.2	Geração de Extensões . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Extensões Ordens-Fracas</b>	<b>53</b>
4.1	Caracterização de Extensões Ordens-Fracas . . . . .	53
4.2	Geração de Extensões . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Extensões Intervalares</b>	<b>60</b>
5.1	Caracterização de Extensões Intervalares . . . . .	60
5.2	Geração de Extensões . . . . .	61
<b>6</b>	<b>Extensões Semi-ordens</b>	<b>69</b>
6.1	Caracterização de Extensões Semi-ordens . . . . .	69
6.2	Geração de Ideais Comuns . . . . .	71
6.3	Geração de Extensões . . . . .	73
<b>7</b>	<b>Conclusões</b>	<b>79</b>
	<b>Referências</b>	<b>81</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Caracterizações de conjuntos de extensões de uma ordenação parcial  $P$  em um conjunto  $E$  através de bijeções relacionando-os a subestruturas obtidas de  $P$  têm sido apresentadas por diversos autores. Em [3] Baldy, Morvan e Thierry apresentaram uma correspondência 1–1 entre o conjunto de todas as extensões da ordenação parcial  $P$  e o conjunto de todos os subreticulados do reticulado ideal de  $P$  que são cadeia-maximais, no sentido de que toda cadeia maximal no subreticulado também é uma cadeia maximal no reticulado. Por [3], esta correspondência generaliza um resultado devido a Bonnet e Pouzet [7] o qual estabelece uma bijeção entre extensões lineares de uma ordenação parcial e cadeias maximais de seu reticulado ideal. Além deste resultado, em [3] é caracterizado o conjunto de extensões de  $P$  definidas por estruturas convexas proibidas. Como consequência, temos uma caracterização para o conjunto de extensões intervalares de  $P$  — assim como para o conjunto de extensões com largura limitada. Em [16] Felsner, Gustedt e Morvan apresentaram resultados sobre bijeções entre famílias de cadeias em reticulados associados a  $P$  e famílias de ordens de intervalo definidas no conjunto base  $E$ . Dentre tais resultados, está uma nova demonstração para a bijeção apresentada por Habib, Morvan, Pouzet e Rampon [22] entre cadeias maximais no reticulado de anticadeias maximais de  $P$  e extensões intervalares minimais de  $P$ .

A geração de objetos combinatórios tais como permutações, extensões lineares e

ideais de um dado conjunto parcialmente ordenado, possui aplicações em diversas áreas, como exemplo, otimização combinatória e pesquisa operacional. Savage, em [49], apresenta um *survey* sobre códigos de Gray combinatórios — métodos para a geração de objetos combinatórios nos quais objetos sucessivos diferem de uma maneira pequena pré-especificada. Ruskey [46] introduziu a área de códigos de Gray para extensões lineares de uma ordenação parcial  $P$ , e em [41] Pruesse e Ruskey apresentaram o primeiro algoritmo para a listagem de extensões lineares de  $P$  em tempo amortizado constante (após um pré-processamento em tempo  $O(n^2)$ , onde  $n = |E|$ ). Em [11], Canfield e Williamson mostraram que as extensões lineares de  $P$  podem ser listadas em tempo constante por extensão (após pré-processamento em tempo  $O(n^2)$ ). Algoritmos para a enumeração de extensões lineares são também apresentados em [29], [31] e [62]. Habib, Medina, Nourine e Steiner apresentaram em [21] um algoritmo para a geração de ideais de  $P$  em um código  $\mathcal{H}(1, 2)$ . Este algoritmo requer tempo  $O(\Delta(P))$  por ideal, onde  $\Delta(P)$  é o grau de entrada máximo em um grafo cobertura de  $P$ . Algoritmos para a geração dos ideais de  $P$  são também apresentados em [8] e [28]. Em [52], Squire apresentou uma implementação para o algoritmo apresentado por Steiner [53], a qual requer tempo  $O(\log n)$  por ideal. Observamos que a geração dos ideais de uma ordenação parcial em tempo constante por ideal permanece um problema em aberto.

Em [12] Corrêa e Szwarcfiter apresentaram caracterizações do conjunto das extensões da ordenação parcial  $P$  assim como algoritmos para a enumeração de tais extensões, os quais requerem tempo  $O(n^2\mu)$  e  $O(m + n\mu)$  (onde  $m = |P|$ , e  $\mu$  é o número de extensões de  $P$ ). As caracterizações em [12] são apresentadas em termos de pares de ideais e filtros de certas subordens de  $P$ , de extensões lineares e seqüências de ideais, e utilizando o conceito de *pares passivos* de uma ordenação parcial. Por tal razão, os algoritmos para a enumeração de extensões de  $P$  decorrentes das caracterizações em [12] utilizam procedimentos para a geração de extensões lineares e ideais de ordenações parciais. Por [11], as extensões lineares de  $P$  podem ser geradas em tempo constante por extensão (após um pré-processamento em tempo  $O(n^2)$ ), enquanto que o algoritmo em [21] pode ser utilizado na geração de ideais

(em tempo  $O(\Delta(P))$  por ideal). Observamos que um algoritmo para a geração do conjunto de extensões florestas de  $P$  é apresentado por Szwarcfiter em [57]. Tal algoritmo requer tempo  $O(n^2)$  por extensão gerada após um pré-processamento em tempo  $O(mn)$ .

Em [56] foram apresentados problemas em aberto referentes à geração de extensões de uma dada ordenação parcial. Dentre os quais estão a geração de extensões em determinadas classes de ordenações como de dimensão  $\leq 2$ , de largura limitada, de altura limitada, arbóreas, ordens fracas, intervalares e semi-ordens. Neste trabalho são apresentadas caracterizações que conduzem à geração eficiente de extensões pertencentes às classes de ordenações arbóreas, ordenações fracas, intervalares e semi-ordens, tendo como base os resultados apresentados em [12], [17], [36], [37], [45] e [51]. Observamos que não foram encontrados na literatura algoritmos para a geração de extensões arbóreas, intervalares ou semi-ordens. Os resultados obtidos neste trabalho são descritos nos Capítulos 3, 4, 5 e 6.

O trabalho é apresentado como segue. No Capítulo 2, são apresentadas as definições referentes a conjuntos parcialmente ordenados e principais resultados. Na Seção 2.1 são apresentadas as principais definições, a notação utilizada, e propriedades da dimensão de uma ordenação parcial. Definições, caracterizações e propriedades de determinadas classes de ordenações são apresentadas na Seção 2.2. Na Seção 2.3 são apresentadas observações sobre os métodos em [11], [31], [41] e [62], para a geração de extensões lineares de uma ordenação parcial  $P$ . Na Seção 2.4 são apresentadas observações sobre os métodos em [8], [21], [25], [28], [32], [34], [48], [50], [52], e [53], para a geração de ideais de  $P$ . A Seção 2.5 é dedicada a caracterizações do conjunto de extensões de uma ordenação parcial, apresentadas por Corrêa e Szwarcfiter [12]. Observamos que as demonstrações nesta seção — de resultados existentes — foram incluídas visando-se o entendimento dos métodos, resultados e conclusões apresentados, assim como tornar completo o trabalho. Em tal seção são também apresentados os algoritmos decorrentes das caracterizações em [12]. Os resultados clássicos de caracterizações de classes de ordenações apresentados na Seção

2.2, assim como os métodos de geração de extensões lineares citados na Seção 2.3, os métodos de geração de ideais citados na Seção 2.4, e as caracterizações e métodos apresentados na Seção 2.5, são necessários aos métodos e conclusões apresentados nos Capítulos 3, 4, 5, 6, e 7.

O Capítulo 3 é dedicado à construção de ordens auxiliares  $Q$  as quais conduzem à geração de extensões arbóreas de uma ordenação  $P$  em tempo polinomial por extensão.

No Capítulo 4 é apresentada uma condição para que acréscimos lexicográficos sejam ordens fracas. Como uma aplicação da segunda caracterização apresentada em [12] obtemos a geração de extensões ordens fracas de  $P$  em tempo  $O(n^2)$  por extensão.

O Capítulo 5 é dedicado à geração de extensões intervalares de  $P$ . Para tal é apresentada uma caracterização de acréscimos lexicográficos intervalares a qual conduz a um procedimento de geração de extensões intervalares de  $P$  em tempo  $O(n^2)$  por extensão.

O Capítulo 6 é dedicado à geração de extensões semi-ordens de  $P$ . Na Seção 6.1 é apresentada uma caracterização de acréscimos lexicográficos semi-ordens. Como um procedimento necessário à geração de extensões semi-ordens baseada em acréscimos lexicográficos, é apresentado na Seção 6.2 um método para a geração de ideais comuns a duas ordenações parciais. O procedimento de geração de extensões semi-ordens decorrente da caracterização apresentada na Seção 6.1 é descrito na Seção 6.3, assim como uma análise de sua complexidade.

No Capítulo 7 são apresentadas conclusões sobre os resultados obtidos assim como perspectivas de trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Conjuntos Parcialmente Ordenados

### 2.1 Definições, Notação Utilizada e Principais Resultados

Seja  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ . Dizemos que  $P$  é uma *ordenação parcial* ou *ordem* em  $E$  quando  $P \subseteq E \times E$  é uma relação binária reflexiva, anti-simétrica e transitiva. Neste caso,  $(E, P)$  é dito um *conjunto parcialmente ordenado*. Chamamos  $E$  o *conjunto base*, o qual será considerado finito. Dizemos que dois elementos  $e_i, e_j \in E$  são *comparáveis* em  $P$  quando ou  $(e_i, e_j) \in P$  ou  $(e_j, e_i) \in P$ . Caso contrário, utilizamos  $e_i \parallel e_j$  em  $P$  para denotar a *incomparabilidade* entre  $e_i$  e  $e_j$ . Definimos  $I(P) = \{(e_i, e_j) : e_i \parallel e_j \text{ em } P\}$  como o conjunto de pares incomparáveis em  $P$ . Se  $I(P) = \emptyset$  então  $P$  é dita uma *ordem linear* ou *total*. Se  $P$  e  $Q$  são ordens em um conjunto  $E$  e  $P \subseteq Q$ , então  $Q$  é chamada uma *extensão* de  $P$ . Se  $I(Q) = \emptyset$  então  $Q$  é dita uma *extensão linear* de  $P$ . Denotamos por  $\varepsilon(P)$  o conjunto de todas as extensões da ordem  $P$ . Denotamos por  $\varepsilon_1(P)$  o conjunto das extensões lineares de  $P$ .

Seja  $E' \subseteq E$ . A ordem  $P' = P[E']$  em  $E'$ , obtida pela restrição de  $P$  a  $E'$ , é uma *subordem* de  $P$ . Definimos *cadeia* como sendo um subconjunto  $C \subseteq E$  totalmente ordenado em  $P$ . E um subconjunto  $A \subseteq E$  é uma *anticadeia* se todo par de elementos distintos de  $A$  é incomparável em  $P$ . Uma cadeia  $C \subseteq E$  é *maximal* quando não existe outra cadeia  $C' \subseteq E$  tal que  $C \subset C'$ . Uma cadeia  $C \subseteq E$  é *máxima* quando

não existe outra cadeia  $C' \subseteq E$  com mais elementos do que  $C$ . De forma análoga são definidas *anticadeias máximas* e *máximas*. A *altura*  $h(P)$  da ordem  $P$  em  $E$  é o número de elementos em uma cadeia máxima. A *largura*  $w(P)$  da ordem  $P$  em  $E$  é o número de elementos em uma anticadeia máxima. Denotamos por  $\mathbf{n}$  uma ordem formada por uma cadeia com  $n$  elementos, e por  $\mathbf{n}+\mathbf{p}$  uma ordem formada pela união disjunta de duas cadeias com  $n$  e  $p$  elementos, respectivamente.

Um subconjunto  $S \subseteq E$  é dito *convexo* se para todo  $e_i, e_j \in S$  e para todo  $e_k \in E$ ,  $(e_i, e_k), (e_k, e_j) \in P$  implicam  $e_k \in S$ . A *dimensão*  $\dim(P)$  de uma ordem  $P$  é definida como sendo o menor  $t$  para o qual existe uma família  $\mathcal{R} = \{L_1, L_2, \dots, L_t\}$  de extensões lineares de  $P$  tal que  $P = \bigcap_{i=1}^t L_i$ . Em tal caso,  $\mathcal{R}$  é um *realizador* de  $P$ . Denotamos por  $\varepsilon_2(P)$  o conjunto das extensões de  $P$  com dimensão  $\leq 2$ .

Utilizando a notação apresentada em [12], para  $e_i \in E$  denotamos por  $E_P^-(e_i) = \{e_j \in E \mid (e_j, e_i) \in P \text{ e } e_i \neq e_j\}$  o conjunto dos elementos de entrada de  $e_i$ . Similarmente, o conjunto dos elementos de saída de  $e_i$  é denotado por  $E_P^+(e_i) = \{e_j \in E \mid (e_i, e_j) \in P \text{ e } e_i \neq e_j\}$ . Tais conceitos podem ser estendidos a um conjunto  $S \subseteq E$ , denotando-se  $E_P^-(S) = \bigcup_{e_i \in S} E_P^-(e_i)$ . Definimos  $E_P^-[e_i] = E_P^-(e_i) \cup \{e_i\}$  e  $E_P^-[S] = E_P^-(S) \cup S$ . De maneira similar, definimos  $E_P^+[e_i]$  e  $E_P^+[S]$ . Um elemento  $e_i \in E$  é *maximal* (respectivamente, *minimal*) se  $E_P^+(e_i) = \emptyset$  (respectivamente,  $E_P^-(e_i) = \emptyset$ ). Denotamos o conjunto de todos os elementos maximais em  $P$  por  $M_P^+$ , enquanto  $M_P^-$  denota o conjunto de todos os elementos minimais em  $P$ . Um elemento  $e_i$  é chamado *máximo* se  $(e_j, e_i) \in P$ , para todo  $e_j \in E$ . Similarmente,  $e_i$  é um elemento *mínimo* se  $(e_i, e_j) \in P$  para todo  $e_j \in E$ . Um *ideal* de  $P$  é um conjunto  $E' \subseteq E$  tal que se  $e_i \in E'$  e  $(e_j, e_i) \in P$  então  $e_j \in E'$ . De maneira similar,  $E'$  é um *filtro* de  $P$  quando  $e_i \in E'$  e  $(e_i, e_j) \in P$  implicam  $e_j \in E'$ .

Associados à ordem  $P$  estão um *grafo de comparabilidade*  $G(P) = (E, R_1)$ , um *grafo de incomparabilidade*  $\overline{G(P)} = (E, R_2)$ , e um *grafo cobertura*  $G_c(P) = (E, R_3)$ . As arestas no grafo de comparabilidade  $G(P)$  consistem dos pares comparáveis e as arestas no grafo de incomparabilidade consistem dos pares incomparáveis. As arestas do grafo cobertura são os pares  $(e_i, e_j)$  para os quais ou  $(e_i, e_j) \in P$  e não

existe  $e_k \in E$  tal que  $(e_i, e_k), (e_k, e_j) \in P$ , ou  $(e_j, e_i) \in P$  e não existe  $e_k \in E$  tal que  $(e_j, e_k), (e_k, e_i) \in P$ . Um diagrama do grafo cobertura  $G_c$  no qual o ponto correspondente a  $e_j$  (da aresta  $(e_i, e_j)$ ) possui coordenada vertical maior do que a coordenada vertical do ponto correspondente a  $e_i$  com  $(e_i, e_j) \in P$ , e no qual as arestas  $(e_i, e_j)$  de  $G_c$  são representadas por um segmento de reta unindo tais pontos, é chamado *diagrama de Hasse*. Uma ordem  $P$  é dita *planar* se possui um diagrama sem cruzamento de arestas.

Como exemplo, seja a ordem  $P$  em  $E = \{e_1, \dots, e_6\}$  representada pelo diagrama de Hasse na Figura 2.1 (a). Temos  $E_P^+(e_3) = \{e_4, e_5\}$ ,  $E_P^-(e_5) = \{e_1, e_3\}$ , e  $e_1 || e_3$  em  $P$ . Considerando  $S = \{e_1, e_2, e_5\}$ , temos  $E_P^+(S) = \{e_4, e_5, e_6\}$  e  $E_P^-(S) = \{e_1, e_3\}$ . Sendo  $I = \{e_1, e_3, e_5\}$  temos  $I$  um ideal de  $P$ . Analogamente, sendo  $F = \{e_1, e_5, e_6\}$  temos  $F$  um filtro de  $P$ . O conjunto dos elementos maximais em  $P$  é dado por  $M_P^+\{e_4, e_5, e_6\}$  e o conjunto dos elementos minimais em  $P$  é dado por  $M_P^-\{e_1, e_2, e_3\}$ . O conjunto  $C = \{e_1, e_5\}$  define uma cadeia máxima enquanto  $A = \{e_1, e_2, e_3\}$  define uma anticadeia máxima. Desta forma, temos  $h(P) = 2$  e  $w(P) = 3$ . O grafo de comparabilidade  $G(P)$  é apresentado na Figura 2.1 (b), enquanto o grafo de incomparabilidade  $\overline{G(P)}$  é apresentado na Figura 2.1 (c). Observamos que, para este exemplo, o grafo de comparabilidade  $G(P)$  não possui arestas de transitividade. Portanto, o grafo cobertura  $G_c(P)$  é isomorfo a  $G(P)$ .

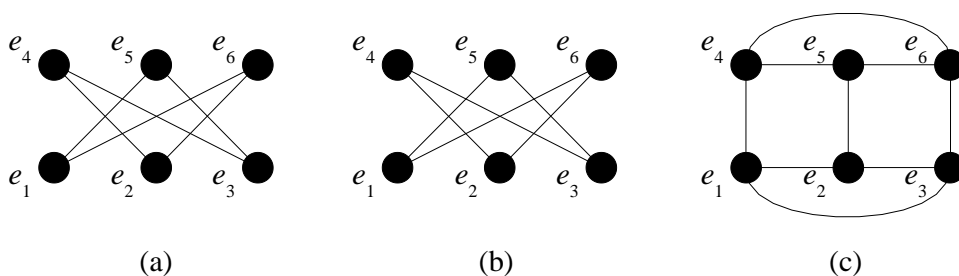


Figura 2.1: (a) Ordem  $P$  em  $E$ ; (b) grafo de comparabilidade  $G(P)$ ;  
(c) grafo de incomparabilidade  $\overline{G(P)}$ .

Como exemplo de ordens obtidas pela união disjunta de duas cadeias, temos as

ordens apresentadas na Figura 2.2.

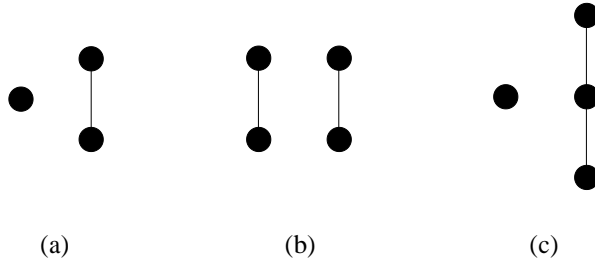


Figura 2.2: (a) Ordem  $1+2$ ; (b) ordem  $2+2$ ; (c) ordem  $1+3$ .

Observamos que o conjunto  $\varepsilon(P)$  das extensões de uma ordem  $P$  pode ser ordenado por inclusão. Neste conjunto parcialmente ordenado resultante, temos  $P$  como único elemento minimal, enquanto as extensões lineares de  $P$  correspondem aos elementos maximais. Por Szpilrajn [55], uma ordem  $P$  sempre admite uma extensão linear. Além disso,  $P = \cap_{\varepsilon_1(P)}$ . As Proposições 2.1 e 2.2 são apresentadas por Trotter [58]. A Proposição 2.1 é uma caracterização de realizadores de uma ordem  $P$ , enquanto que a Proposição 2.2 estabelece a propriedade de monotonicidade da dimensão de  $P$ .

**Proposição 2.1** (Trotter [58]) *Seja  $P$  uma ordem em  $E$  e seja  $\mathcal{R} = \{L_1, L_2, \dots, L_t\}$  uma família de extensões lineares de  $P$ . Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- i.  $\mathcal{R}$  é um realizador de  $P$ .*
- ii.  $P = \cap_{i=1}^t L_i$ .*
- iii. Para todo  $x, y \in E$  com  $x \parallel y$  em  $P$ , existem inteiros distintos  $i, j$  com  $1 \leq i, j \leq t$  para os quais  $x < y$  em  $L_i$  e  $y < x$  em  $L_j$ .*
- iv. Para todo  $x, y \in E$  com  $x \parallel y$  em  $P$ , existe um inteiro  $j$  com  $1 \leq j \leq t$  para o qual  $y < x$  em  $L_j$ .*

**Proposição 2.2** (Trotter [58]) *Seja  $P$  uma ordem em  $E$ , sejam  $E' \subseteq E$  e  $P' = P[E']$ . Então*

$$\dim(P') \leq \dim(P).$$

A prova da Proposição 2.2 pode ser apresentada com a observação de que se  $\mathcal{R} = \{L_1, L_2, \dots, L_t\}$  é um realizador de  $P$ , então  $\mathcal{S} = \{L_1[E'], L_2[E'], \dots, L_t[E']\}$  é um realizador de  $P'$ .

Os Teoremas 2.1 e 2.2 são devidos a Dilworth [14]. O Teorema 2.1 estabelece a existência de uma partição em cadeias para o conjunto base  $E$ . O Teorema 2.2 estabelece uma relação entre a dimensão e a largura de uma ordem  $P$ . O Teorema 2.3 é a forma dual do Teorema 2.1, apresentada por Trotter [58].

**Teorema 2.1** (Dilworth [14]) *Seja  $P$  uma ordem em  $E$  e  $w(P) = k$ . Então existe uma partição  $E = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k$ , onde  $C_i$  é uma cadeia para  $i = 1, 2, \dots, k$ .*

**Teorema 2.2** (Dilworth [14]) *Seja  $P$  uma ordem em  $E$ . Então*

$$\dim(P) \leq w(P).$$

**Teorema 2.3** (Dilworth [14], Trotter [58]) *Seja  $P$  uma ordem em  $E$  e  $h(P) = k$ , então existe uma partição  $E = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$ , onde  $A_i$  é uma anticadeia para  $i = 1, 2, \dots, k$ .*

Na Seção 2.2 são definidas algumas classes de ordens — como ordens arbóreas, ordens fracas, intervalares e semi-ordens — e reticulados, assim como são apresentados resultados clássicos de caracterização, utilizados nos Capítulos 3, 4, 5, e 6.

## 2.2 Reticulados e Classes de Ordens

Uma primeira caracterização de ordens de dimensão  $\leq 2$  é apresentada em [15]. Para tal caracterização, consideramos que duas ordens em  $E$  são *conjugadas* se todo par de elementos distintos em  $E$  for comparável em uma das ordens e incomparável na outra. Uma ordem é dita *reversível* se e somente se possui uma conjugada. Uma extensão linear  $L$  de  $P$  é dita *separadora* se e somente se existem três elementos distintos  $e_i, e_j$  e  $e_k$  em  $E$  tais que  $(e_i, e_k) \in P, e_i \parallel e_j, e_j \parallel e_k$  em  $P$ , e  $(e_i, e_j), (e_j, e_k) \in L$ .

Para o Teorema 2.4, uma família  $\mathcal{F}$  de subconjuntos distintos  $S_i$  de um dado conjunto  $S$  dá origem a uma ordem  $P$  em  $\mathcal{F}$  na qual consideramos  $(S_i, S_j) \in P$  se e somente se  $S_i$  é um subconjunto próprio de  $S_j$  (como exemplo, podemos considerar  $\mathcal{F}$  o conjunto das extensões de uma ordem). Por reflexividade, consideramos  $(S_i, S_i) \in P$  para todo  $S_i$ . Por outro lado, se consideramos  $P$  uma ordem em um conjunto  $E$ , então podemos definir uma família de conjuntos  $\mathcal{F}$  de modo que a relação “ $\subset$ ” entre os conjuntos de  $\mathcal{F}$  dá origem a uma ordem em  $\mathcal{F}$  similar a  $P$ . Para isto, podemos definir para cada  $e_i \in E$  o conjunto  $S_i$  consistindo de  $e_i$  e todos os seus predecessores.

**Teorema 2.4** (Dushnik e Miller [15]) *As seguintes quatro propriedades de uma ordem  $P$  são equivalentes.*

- (1)  $P$  é reversível.
- (2) Existe uma extensão linear de  $P$  a qual é não-separadora.
- (3) A dimensão de  $P$  é  $\leq 2$ .
- (4) Existe uma representação de  $P$  por meio de uma família de intervalos em algum conjunto totalmente ordenado.

Seja  $\mathbf{S}_n = P$  uma ordem de altura 2 tendo como conjunto base  $E = A \cup B$ , com

$A = \{a_1, \dots, a_n\}$  e  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ . Consideramos  $\mathbf{S}_n$  tal que  $M_P^- = A$ ,  $M_P^+ = B$ ,  $(a_i, a_i), (b_i, b_i) \in P$  para  $1 \leq i \leq n$  e  $(a_i, b_j) \in P$  se e somente se  $i \neq j$  (um exemplo com  $n = 5$  é dado na Figura 2.3(a)). Por Dushnik e Miller [15],  $\dim(P) = n$ . Em [59], a ordem *coroa*  $\mathbf{S}_n^k = P'$  (com  $n \geq 3$  e  $k \geq 0$ ) é definida como uma ordem em  $E' = A \cup B$ , onde  $A = M_{P'}^- = \{a_1, \dots, a_{n+k}\}$  e  $B = M_{P'}^+ = \{b_1, \dots, b_{n+k}\}$ . Para cada  $i = 1, \dots, n+k$ , temos  $b_i \parallel \{a_i, a_{i+1}, \dots, a_{i+k}\}$  em  $P'$ , e  $(a_j, b_i) \in P'$  para  $j = i+k+1, i+k+2, \dots, i+k+n-1$ . Observamos que os subscritos são interpretados ciclicamente. (Como exemplo,  $\mathbf{S}_4^2$  é apresentado na Figura 2.3(b).) Temos  $h(P') = 2$  e, por [59], temos  $\dim(P') = \lceil 2(n+k)/(k+2) \rceil$ .

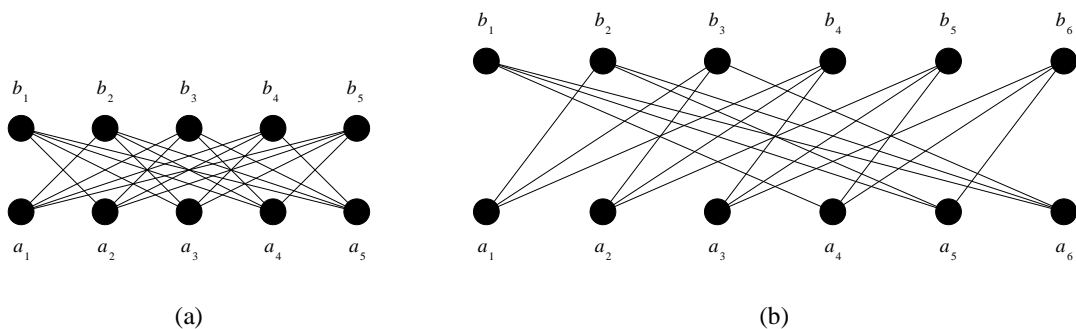


Figura 2.3: (a)  $\mathbf{S}_5$ ; (b)  $\mathbf{S}_4^2$ .

Caracterizações de ordens  $P$  de dimensão  $\leq 2$  em termos do grafo de incomparabilidade  $\overline{G(P)}$  devidas a Baker, Fishburn e Roberts são também apresentadas em [1]. Por McConnel e Spinrad [35], ordens de dimensão  $\leq 2$  podem ser reconhecidas em tempo linear. Porém, temos o seguinte teorema devido a Yannakakis [67] para o caso  $t \geq 3$ .

**Teorema 2.5** (Yannakakis [67]) *Para  $t \geq 3$  fixo, o problema de determinarmos se  $\dim(P) \leq t$  é NP-completo.*

Pela Proposição 2.2, temos a monotonicidade da dimensão de uma ordem  $P$  em  $E$ . Em um primeiro resultado sobre o comportamento da dimensão com inserções e

remoções de subconjuntos de  $E$ , Hiraguchi mostrou que se  $C \subseteq E$  é uma cadeia em  $P$  e  $E - C \neq \emptyset$  então  $\dim(P) \leq 2 + \dim(P')$ , onde  $P' = P[E - C]$ . Os Teoremas 2.6 e 2.7, devidos a Hiraguchi [26], estabelecem outros limites para a dimensão de  $P$ .

**Teorema 2.6** (Hiraguchi [26]) *Seja  $P$  uma ordem em  $E$ ,  $|E| \geq 2$ , e seja  $e_i \in E$ . Então*

$$\dim(P) \leq 1 + \dim(P[E - \{e_i\}]).$$

**Teorema 2.7** (Hiraguchi [26]) *Seja  $P$  uma ordem em  $E$ ,  $|E| \geq 4$ . Então*

$$\dim(P) \leq |E|/2.$$

Seja  $S \subseteq E$ . Um elemento  $e_i \in E$  é um *limite superior* para  $S$  se  $(e_j, e_i) \in P$ , para todo  $e_j \in S$ . Um limite superior  $e_i$  para  $S$  é um *menor limite superior* para  $S$  se  $(e_i, e_k) \in P$  para todo limite superior  $e_k$  de  $S$ . Similarmente, são definidos *limite inferior* e *maior limite inferior*. Um *reticulado* é uma ordem  $P$  em  $E$  na qual todo subconjunto não vazio  $S \subseteq E$  possui tanto um menor limite superior quanto um maior limite inferior. Temos, em um reticulado, funções de  $E \times E$  em  $E$  chamadas *supremo* e *ínfimo*, definidas por

$$e_i \vee e_j = \text{menor limite superior}\{e_i, e_j\} \text{ (supremo), e}$$

$$e_i \wedge e_j = \text{maior limite inferior}\{e_i, e_j\} \text{ (ínfimo)}.$$

Observamos que reticulados finitos possuem elementos mínimo e máximo que, quando distintos, são chamados *zero* e *um*, respectivamente. Um reticulado  $P$  é dito um *reticulado distributivo* se

$$e_i \wedge (e_j \vee e_k) = (e_i \wedge e_j) \vee (e_i \wedge e_k), \text{ para todo } e_i, e_j, e_k \in E.$$

Um elemento  $e_i$  no reticulado é dito um elemento *ínfimo irredutível* se  $e_i = e_j \wedge e_k$  implica que um dentre  $e_j$  e  $e_k$  é  $e_i$ . Similarmente,  $e_i$  é um elemento *supremo irredutível* se  $e_i = e_j \vee e_k$  implica que um dentre  $e_j$  e  $e_k$  é  $e_i$ .

Por um resultado devido a Baker, um reticulado é planar se e somente se possui dimensão  $\leq 2$ . Trotter e Moore [61] mostraram que uma ordem planar com um elemento máximo ou um elemento mínimo possui dimensão no máximo 3. Além disso, ordens planares possuindo um elemento mínimo e um elemento máximo são exatamente reticulados 2-dimensionais.

Uma ordem  $P$  em  $E$  é uma *ordem arbórea* se  $E_P^-(e_i)$  é uma cadeia em  $P$  para todo  $e_i \in E$  (ver Brandstädt, Le e Spinrad [9]). Em [58], tais ordens são definidas como *cs-forests*, ou *computer science forests*. Como exemplo, na Figura 2.4 é apresentada a ordem arbórea  $P$  em  $E = \{e_1, \dots, e_6\}$ .

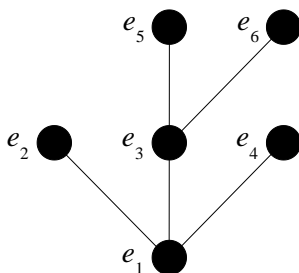


Figura 2.4: Ordem arbórea  $P$  em  $E = \{e_1, \dots, e_6\}$ .

A Proposição 2.3, devida a Wolk [64], estabelece um limite para dimensões de ordens arbóreas.

**Proposição 2.3** (Wolk [64]) *Seja  $P$  uma ordem arbórea em  $E$ . Então*

$$\dim(P) \leq 2.$$

A prova da Proposição 2.3 pode ser apresentada como uma observação de que a ordem obtida pela inclusão de um elemento máximo a  $P$  é planar.

Um grafo  $G$  é *perfeito* se para todos os subgrafos induzidos  $H$  de  $G$  temos  $\alpha(H) = k(H)$ , onde  $\alpha(H)$  é a cardinalidade do maior conjunto independente de  $H$  e  $k(H)$  é o menor número de subgrafos completos de  $H$  necessários para cobrir os vértices de  $H$ . Um grafo  $G$  é *trivialmente perfeito* se para todos os subgrafos induzidos  $H$  de  $G$  temos  $\alpha(H) = m(H)$ , onde  $m(H)$  é o número de cliques maximais de  $H$ . Em [9] é apresentada a seguinte caracterização de grafos trivialmente perfeitos em termos de grafos de comparabilidade de ordens arbóreas, devida a Wolk [65] e Golubic [20].

**Teorema 2.8** (Wolk [65], Golubic [20]) *Seja  $G$  um grafo. As seguintes condições são equivalentes:*

- (i)  $G$  é o grafo de comparabilidade de uma ordem arbórea.
- (ii)  $G$  não contém  $P_4$  ou  $C_4$  induzido.
- (iii)  $G$  é trivialmente perfeito.

Uma ordem  $P$  é uma *ordem fraca* se  $E_P^+(e_j) = E_P^+(e_k)$  e  $E_P^-(e_j) = E_P^-(e_k)$  para todo par de elementos  $e_j, e_k \in E$  incomparáveis em  $P$ . Como exemplo, na Figura 2.5 é apresentada a ordem fraca  $P$  em  $E = \{e_1, \dots, e_9\}$ .

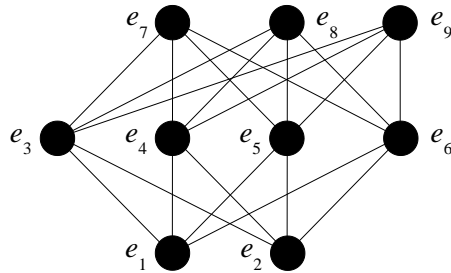


Figura 2.5: Ordem fraca  $P$  em  $E = \{e_1, \dots, e_9\}$ .

A seguinte caracterização de ordens fracas por subordem proibida é apresentada em [36].

**Teorema 2.9** (Möhring e Radermacher [36]) *Uma ordem  $P$  é uma ordem fraca se e somente se não contém  $\mathbf{1} + \mathbf{2}$  como subordem.*

Uma ordem  $P$  em  $E$  é uma *ordem de intervalo* ou *intervalar* se existe uma função  $F$  a qual atribui a cada  $e_i \in E$  um intervalo fechado  $F(e_i) = [a_i, b_i]$  da reta real  $\mathbf{R}$  de modo que  $(e_i, e_j) \in P$  se e somente se  $b_i < a_j$  em  $\mathbf{R}$ . A função  $F$  é uma *representação por intervalo* de  $P$ . A Figura 2.6 (a) apresenta uma ordem de intervalo  $P$  em  $E = \{e_1, \dots, e_7\}$  e em (b) sua representação por intervalo.

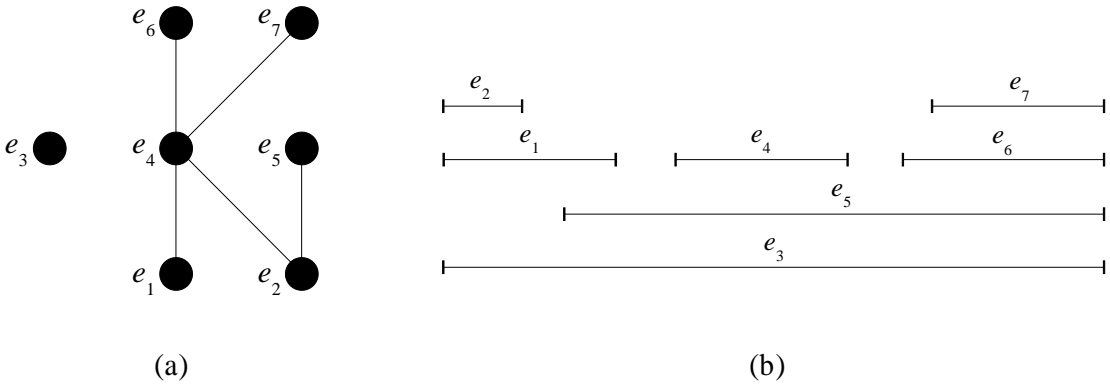


Figura 2.6: (a) Ordem de intervalo  $P$  em  $E = \{e_1, \dots, e_7\}$ ;  
 (b) Representação por intervalo de  $P$ .

Em [17] é apresentada a seguinte caracterização de ordens de intervalo.

**Teorema 2.10** (Fishburn [17]) *Uma ordem  $P$  é uma ordem de intervalo se e somente se  $P$  não contém  $\mathbf{2} + \mathbf{2}$  como subordem.*

Sejam  $\mathcal{D}(P) = \{E_P^-(e_i) | e_i \in E\}$  e  $\mathcal{U}(P) = \{E_P^+(e_i) | e_i \in E\}$ . Observamos que

se desconsideramos os índices, isto é, se consideramos a família de vizinhanças de entrada ou de saída distintas então podemos ter  $|\mathcal{D}(P)| < |E|$  e  $|\mathcal{U}(P)| < |E|$ . Se  $P$  é uma ordem de intervalo então  $\mathcal{D}(P)$  e  $\mathcal{U}(P)$  são cadeias no reticulado  $\mathbf{2}^E$  de todos os subconjuntos de  $E$  (ver [37]).

**Proposição 2.4** (Papadimitriou e Yannakakis [37], Trotter [58]) *Seja  $P$  uma ordem em  $E$ . Então as seguintes afirmações são equivalentes.*

1.  $P$  é uma ordem de intervalo.
2.  $\mathcal{D}(P) = \{E_P^-(e_i) | e_i \in E\}$  é uma cadeia em  $\mathbf{2}^E$ .
3.  $\mathcal{U}(P) = \{E_P^+(e_i) | e_i \in E\}$  é uma cadeia em  $\mathbf{2}^E$ .

Sendo  $P$  uma ordem de intervalo, temos  $|\mathcal{D}(P)| = |\mathcal{U}(P)|$ , e este parâmetro  $m = |\mathcal{D}(P)| = |\mathcal{U}(P)|$  é chamado a *magnitude* de  $P$ . Observamos que na definição de ordens de intervalo podemos requerer que os intervalos da representação sejam abertos, ou fechados, ou não-degenerados, ou finitos. Em [2] Baldy e Morvan apresentaram uma caracterização de ordens de intervalo a qual conduz a um algoritmo de reconhecimento para esta classe de ordens em tempo linear. Para tal caracterização, apresentada no Teorema 2.11, definimos um digrafo acíclico  $D = (E, A)$  tal que seu fecho transitivo é a ordem  $P$ . Seja  $Min(D) = M_P^-$ . Denotamos por  $S(D)$  o conjunto  $Min(D \setminus Min(D))$  e por  $E_A^+(e_i)$  a vizinhança de saída do elemento  $e_i$  no digrafo  $D$ .

**Teorema 2.11** (Baldy e Morvan [2]) *Seja  $e_i \in Min(D)$  tal que  $|S(D) \cap E_A^+(e_i)|$  é máximo sobre  $Min(D)$ . Então  $P$  é uma ordem de intervalo se e somente se  $|S(D) \cap E_A^+(e_i)| = |S(D)|$  e  $P[E - e_i]$  é uma ordem de intervalo.*

O procedimento decorrente desta caracterização determina se  $P$  é uma ordem de intervalo calculando inicialmente o conjunto  $Min(D)$  dos elementos minimais de  $D$  e

o conjunto  $S(D)$  dos elementos minimais de  $D \setminus \text{Min}(D)$ . Sendo  $e_i \in \text{Min}(D)$  tal que  $|S(D) \cap \text{Min}(D)|$  é máximo sobre  $\text{Min}(D)$ , o procedimento aplica sucessivamente o Teorema 2.11. Os vértices de  $D$  são removidos até que  $D = \emptyset$  ou que se obtenha um vértice  $e_i \in \text{Min}(D)$  tal que  $|S(D) \cap E_A^+(e_i)| \neq |S(D)|$ . Com estruturas de dados simples, é mostrado que o procedimento requer tempo e espaço lineares.

Uma ordem de intervalo  $P$  é dita uma *semi-ordem* se existe uma constante positiva  $d$  tal que  $P$  possui uma representação por intervalo  $F$  atribuindo a cada  $e_i \in E$  um intervalo  $F(e_i) = [a_i, a_i + d]$  tal que  $(e_i, e_j) \in P$  e  $e_i \neq e_j$  se e somente se  $a_i + d < a_j$ . O seguinte teorema é devido a Scott e Suppes [51].

**Teorema 2.12** (Scott e Suppes [51]) *Seja  $P$  uma ordem de intervalo. Então  $P$  é uma semi-ordem se e somente se  $P$  não contém  $\mathbf{1+3}$  como uma subordem.*

Pelo Teorema 2.12 a ordem  $P$  apresentada na Figura 2.6 não é uma semi-ordem, visto que possui  $\mathbf{1+3}$  como subordem. A representação por intervalo na Figura 2.7 (b) mostra que a ordem  $P$  apresentada na Figura 2.7 (a) é uma semi-ordem.

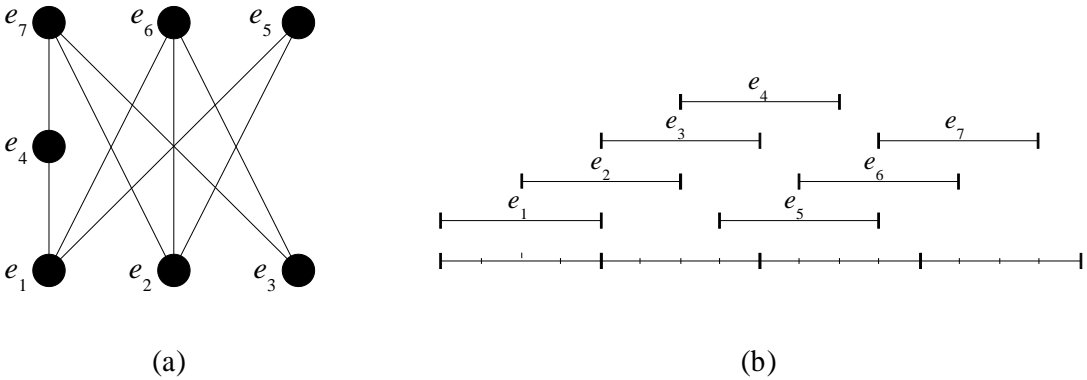


Figura 2.7: (a) Semi-ordem  $P$  em  $E = \{e_1, \dots, e_7\}$ ;

(b) Representação por intervalo de  $P$ .

Propriedades sobre a dimensão de ordens de intervalo e semi-ordens são apresentadas em [58]. Por um resultado devido a Rabinovitch [45], são apresentadas em [58] condições — por subordens proibidas — para que uma semi-ordem  $P$  tenha

$\dim(P) \leq 2$ . Em [45] temos o seguinte limite para a dimensão de uma semi-ordem.

**Proposição 2.5** (Rabinovitch [45]) *Seja  $P$  uma semi-ordem. Então*

$$\dim(P) \leq 3.$$

Para a caracterização de semi-ordens apresentada no Teorema 2.13, são definidas em [45] duas extensões  $P_*$  e  $P^*$  de uma ordem  $P$ .

(i) Se  $|E^+(e_i)| > |E^+(e_j)|$  então  $(e_i, e_j) \in P_*$ . Se  $|E^+(e_i)| = |E^+(e_j)|$  e  $|E^-(e_i)| < |E^-(e_j)|$  então  $(e_i, e_j) \in P_*$ .

(ii) Se  $|E^-(e_i)| < |E^-(e_j)|$  então  $(e_i, e_j) \in P^*$ . Se  $|E^-(e_i)| = |E^-(e_j)|$  e  $|E^+(e_i)| > |E^+(e_j)|$  então  $(e_i, e_j) \in P^*$ .

Ambas as extensões de  $P$  são ordens fracas, isto é, não possuem  $\mathbf{1} + \mathbf{2}$  como subordem. Além desta observação, temos:

**Teorema 2.13** (Rabinovitch [45]) *Uma ordem de intervalo  $P$  é uma semiordem se e somente se  $P_* = P^*$ .*

## 2.3 Geração de Extensões Lineares

Caracterizações do conjunto de extensões  $\varepsilon(P)$  de uma ordem  $P$  apresentadas em [12], dão origem a algoritmos para a geração de  $\varepsilon(P)$  nos quais são necessárias a geração de conjuntos de ideais e a geração do conjunto das extensões lineares  $\varepsilon_1(P)$  de  $P$ . Nesta seção serão apresentadas observações sobre métodos para a geração de  $\varepsilon_1(P)$ , enquanto que a Seção 2.4 é dedicada a métodos para a geração de ideais de uma ordem.

Em [31], é apresentado por Knuth e Szwarcfiter um algoritmo para a listagem de

todas as soluções do problema de ordenação topológica. Considerando  $P$  uma ordem em  $E$  e  $L$  uma extensão linear de  $P$ , o primeiro elemento  $e_1$  em  $L$  é um elemento em  $M_P^-$ , e para  $2 \leq i \leq n$ , o  $i$ -ésimo elemento de  $L$  é um elemento em  $M_{P[E \setminus \{e_1, \dots, e_{i-1}\}]}^-$ . O algoritmo recursivo em [31] derivado desta observação lista as extensões lineares de  $P$  em tempo  $O(m+n)$  por extensão. Em [62], é apresentado um algoritmo que lista as extensões lineares de  $P$  porém não faz modificações (inserções e remoções de relações) em  $P$ . Este algoritmo requer tempo  $O(n)$  por extensão e espaço total  $O(n^2)$ .

O termo *código de Gray combinatório* foi apresentado em 1980 designando qualquer método de geração de objetos combinatórios tal que objetos sucessivos difiram de algum modo pequeno pré-especificado. De acordo com Habib, Medina, Nourine e Steiner [21], tal diferença entre objetos sucessivos pode ser um elemento no caso de subconjuntos ou uma transposição no caso de permutações de um conjunto. Observamos que listagens com diferenças pequenas entre objetos consecutivos podem permitir uma geração destes mais rápida. Além deste fato, existe a vantagem de objetos sucessivos poderem ser identificados apenas pela escrita da diferença entre eles. Desta forma pode-se ter uma saída cujo tamanho seja menor do que o tamanho total dos objetos a serem listados.

O problema de gerar exatamente uma vez uma classe de objetos combinatórios, de modo que objetos consecutivos difiram somente de um modo pré-especificado, pode ser formulado como um problema de caminho/ciclo Hamiltoniano: os vértices do grafo correspondem aos objetos, e dois vértices são conectados por uma aresta se eles diferem da maneira pré-especificada. Este grafo possui um caminho Hamiltoniano exatamente se o código de Gray combinatório existe. Portanto, provar a existência de um código de Gray combinatório para uma classe de objetos é equivalente a mostrar que o grafo acima definido possui um caminho Hamiltoniano. O problema de determinarmos se um grafo possui um caminho Hamiltoniano é NP-Completo. Contudo, em certos casos, é possível determinar-se que tal caminho Hamiltoniano não existe. Por [41], dizemos que um grafo está na classe  $\mathcal{H}(s, t)$  se

possui um passeio fechado que visita cada vértice ao menos  $s$  vezes e no máximo  $t$  vezes. A listagem resultante dos vértices é referida como um código  $\mathcal{H}(s, t)$ . Portanto um grafo está em  $\mathcal{H}(1, 1)$  exatamente se possui um caminho Hamiltoniano. Um algoritmo para a listagem de objetos de uma classe é dito *sem laços* se o tempo entre a listagem de elementos sucessivos é constante no pior caso. O algoritmo é dito de *tempo amortizado constante*, ou *CAT*, se após a listagem do primeiro elemento o tempo total requerido pelo algoritmo para listar todos os elementos é  $O(N)$ , onde  $N$  é o número de elementos na classe.

No estudo da existência de códigos de Gray para extensões lineares, Ruskey definiu o *grafo de transposição*  $G_T(P)$  para uma dada ordem  $P$ , no qual os vértices são as extensões lineares  $L$  de  $P$ , dois vértices sendo adjacentes se eles diferem de uma transposição. Em [47] são apresentadas condições nas quais  $G_T(P)$  possui um caminho Hamiltoniano. Considerando uma ordem  $P$  constituída de duas cadeias com 2 elementos cada (ver  $P = \mathbf{S}_2$  na Figura 2.8 (a)), o grafo de transposição  $G_T(P)$  é apresentado na Figura 2.8 (b). O *grafo de transposição adjacente*, o qual denotaremos por  $G'_T(P)$ , é definido como um subgrafo de  $G_T(P)$  possuindo o mesmo conjunto  $\varepsilon_1(P)$  de vértices, com cada aresta correspondendo a uma transposição adjacente.

Em [41], Pruesse e Ruskey apresentaram um algoritmo de tempo amortizado constante para a listagem de extensões lineares tal que, após um pré-processamento em tempo  $O(n^2)$ , extensões sucessivas diferem por uma ou duas transposições adjacentes. Pelo exemplo na Figura 2.8 (a), apresentado em [41], não é sempre possível gerar as extensões lineares de uma ordem por transposições. Mesmo quando as extensões lineares de uma família de ordens podem ser geradas por transposições, um algoritmo rápido para a geração pode não existir. O algoritmo apresentado em [41] gera cada extensão linear duas vezes e apresenta como saída apenas uma das gerações. Brightwell e Winkler [10] mostraram que o problema de contagem do número de extensões lineares de uma dada ordem é #P-Completo.

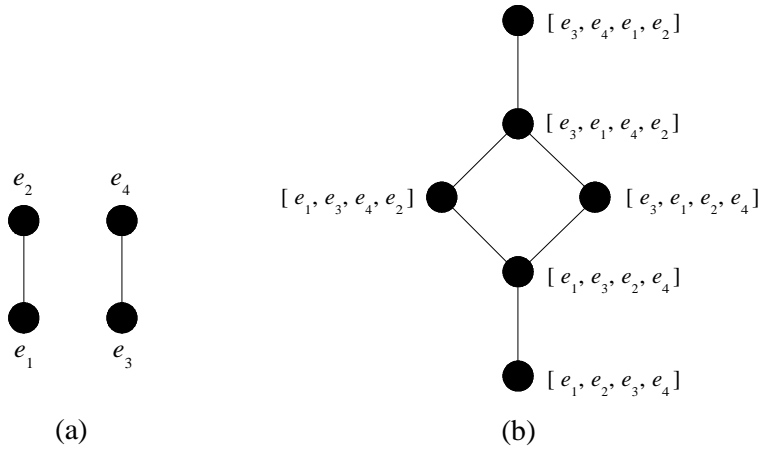


Figura 2.8: (a) Ordem  $\mathbf{S}_2 = (E', P')$ ; (b) Grafo de transposição  $G_T(P')$ .

Pruesse e Ruskey consideraram o grafo  $G_T(P) \times K_2$  como sendo o grafo resultante de duas cópias de  $G_T(P)$  adicionando-se as arestas correspondendo a um isomorfismo entre as duas cópias. Para uma diferenciação entre as cópias de  $G_T(P)$ , os vértices de uma cópia são marcados com “+” e os da outra são marcados com “-”. (Como exemplo, considerando a ordem  $P$  na Figura 2.8 (a), é apresentado na Figura 2.9 o grafo  $G_T(P) \times K_2$ .)

De maneira análoga a  $G_T(P) \times K_2$ , Pruesse e Ruskey definiram o grafo  $G'_T(P) \times K_2$  e mostraram que tal grafo é Hamiltoniano para uma dada ordem  $P$ . Assim, o procedimento principal usado pelo algoritmo apresentado em [41] gera as extensões lineares de  $P$  percorrendo um caminho Hamiltoniano em  $G'_T(P)$ , considerando apenas as extensões lineares prefixadas com “+”. Como um dos problemas propostos em [41] está a questão da geração de todas as extensões lineares de uma ordem através de um algoritmo sem laços.

Em [11], Canfield e Williamson provaram que o algoritmo de Pruesse e Ruskey pertence a uma classe de algoritmos *CAT* de listagem de objetos combinatórios que podem ser modificados de modo a serem sem laços, e apresentaram um procedimento para a listagem de extensões lineares em tempo constante por extensão, após um

pré-processamento em tempo  $O(n^2)$ .

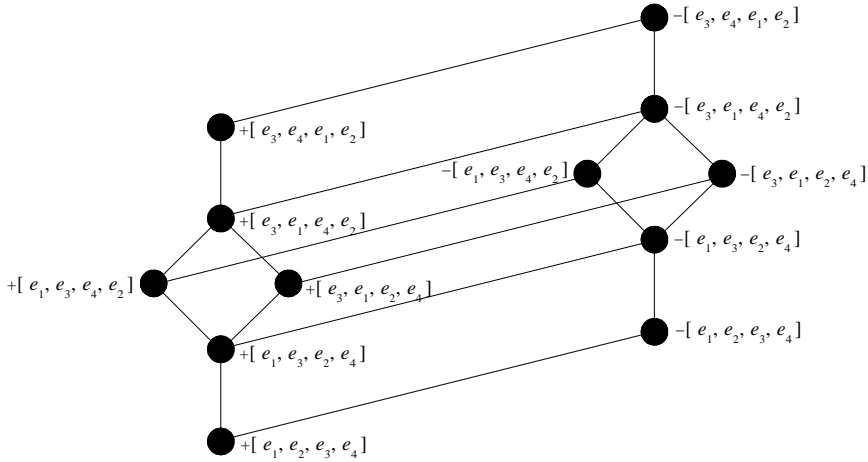


Figura 2.9: O grafo  $G_T(P) \times K_2$ .

## 2.4 Geração de Ideais

A geração do conjunto  $\mathcal{I}(P)$  dos ideais de uma ordem  $P$ , além de utilizada na geração de acréscimos lexicográficos, é frequentemente aplicada a problemas de otimização combinatória. Como exemplo em [53], a geração de ideais e anticadeias de ordens é necessária em algoritmos de programação dinâmica para problemas de escalonamento com restrições de precedência (ver [50],[54]). A contagem dos ideais de uma ordem foi mostrada ser um problema  $\#P$ -completo em [40] e a classe das ordens 2-dimensionais é a maior classe conhecida para a qual os ideais podem ser contados em tempo polinomial [54]. Steiner [53] apresentou um algoritmo para a geração de todos os ideais de uma ordem  $P$  em tempo  $O(n)$  por ideal. Tal complexidade se deve ao fato de que o algoritmo não gera todos os subconjuntos de  $E$ .

O algoritmo explora a estrutura de  $P$  de forma a considerar, a cada passo, apenas elementos de  $E$  que conduzam a ideais.

O método em [53] pode ser representado por uma *árvore de decisão*  $T_S(P)$  para a ordem  $P$ .  $T_S(P)$  é uma árvore binária e enraizada, cujas folhas estão em uma correspondência 1-1 com os ideais de  $P$ . Cada nó não-folha de  $T_S(P)$  possui duas ramificações, as quais correspondem a duas possíveis situações: o ramo da esquerda representando  $x \notin T_S$  e o ramo da direita representando  $x \in T_S$ . Sejam  $I(x) = \{I : I \text{ é um ideal em } P \text{ e } x \notin I\}$  e  $J(x) = \{I : I \text{ é um ideal em } P \text{ e } x \in I\}$ . Se  $x$  é a raiz de  $T_S(P)$  então a questão ‘ $x \in T_S$ ?’ particiona o conjunto de ideais em  $I(x) \cup J(x)$ , de tal modo que todo  $I \in I(x)$  é uma folha da ramificação da esquerda de  $T_S(P)$  e todo  $I \in J(x)$  é uma folha da ramificação da direita de  $T_S(P)$ . Além disso, se  $I \in J(x)$  então  $E_P^-[x] \subseteq I$ , e desta forma se  $r(I) = I \setminus E_P^-[x]$  então  $r$  é uma bijeção entre  $I(x)$  e os ideais na ordem  $P_r = P[E - E_P^-[x]]$ . De maneira análoga,  $I \in J(x)$  implica  $I \cap E_P^+[x] = \emptyset$ , logo os ideais em  $J(x)$  são exatamente os ideais na ordem  $P_l = P[E \setminus E_P^+[x]]$ . É mostrado em [53] que a enumeração de  $I(x)$  e  $J(x)$  é equivalente à enumeração dos ideais nas ordens residuais  $P_l$  e  $P_r$ , respectivamente. Aplicando este argumento recursivamente, a subárvore  $T_S(P_l)$  de  $T_S(P)$  enraizada no filho esquerdo de  $x$  é considerada uma árvore de decisão correspondendo aos ideais de  $P_l$ , e a subárvore  $T_S(P_r)$  enraizada no filho direito de  $x$  é considerada uma árvore de decisão correspondendo aos ideais de  $P_r$ . Uma subárvore recursiva como descrita torna-se uma folha de  $T_S(P)$  exatamente quando a ordem residual correspondente torna-se vazia. Além disso, cada folha de  $T_S(P)$  corresponde exatamente a um ideal da ordem original  $P$ , este ideal sendo o menor ideal de  $P$  que é consistente com as decisões ramificadoras conduzindo à folha correspondente de  $T_S(P)$ .

Cada nó não-folha da árvore é rotulado pelo *elemento separador* em  $P$ . Em uma representação de  $T_S(P)$  em [53], para cada nó não-folha  $x$ , é mostrada a ordem residual, cujos ideais correspondem às folhas da subárvore enraizada em  $x$ . Cada folha de  $T_S(P)$  é rotulada pelo ideal correspondente de  $P$ , e a ordem residual omitida visto que é vazia neste caso. Cada ideal  $I$  pode ser identificado como  $\cup_{e_i \in A} E_P^-[e_i]$ , onde  $A$

é o conjunto de separadores direitos no caminho entre a folha correspondendo a  $I$  e a raiz de  $T_S(P)$ . Os ideais de  $P$  são gerados pelo algoritmo recursivo correspondendo a uma busca em profundidade em  $T_S(P)$ . Com estruturas de dados convenientes, o algoritmo pode ser implementado de modo a requerer tempo  $O(n)$  por ideal. Por [53], existe uma correspondência 1–1 entre os ideais e anticadeias de  $P$ , visto que os elementos maximais de cada ideal em  $P$  correspondem a uma anticadeia de  $P$ . Considerando a geração de  $A$  em lugar de  $I$ , o algoritmo pode ser usado para gerar todas as anticadeias de  $P$  sem modificações em sua complexidade. Em [52], Squire apresentou uma implementação do algoritmo em [53] a qual requer tempo  $O(i(P) \log n)$  para a geração dos ideais de  $P$ , onde  $i(P)$  é o número de ideais de  $P$ .

Algoritmos para a geração de ideais foram apresentados por Scharage e Baker [50], e Lawler [34]. O algoritmo de Scharage e Baker requer tempo  $O(n^2 \cdot i(P))$ , e por [53] esta é a complexidade assintótica do algoritmo apresentado em [34]. Bordat [8] propôs um algoritmo  $O(w(P) \cdot i(P))$ , o qual utiliza espaço  $O(n^2)$ . Os algoritmos apresentados em [8], [34], [50] e [53] são off-line, isto é, a ordem inteira deve ser conhecida antes do início do algoritmo. Jégou, Medina e Nourine [28] apresentaram um algoritmo incremental requerendo tempo  $O(\Delta(P) \cdot i(P))$  — onde  $\Delta(P)$  é o grau de entrada máximo em uma cobertura de  $P$  — o qual não requer o conhecimento da ordem inteira, e pode processar a ordem um elemento por vez se os elementos são dados na ordem de alguma extensão linear de  $P$ . Nenhum destes algoritmos listam os ideais por um código de Gray combinatório. Por [21], Pruesse e Ruskey [42] foram os primeiros a mostrar a existência de uma seqüência que lista cada ideal duas vezes e tal que ideais consecutivos diferem somente pela adição e/ou remoção de um único elemento. Habib, Medina, Nourine e Steiner [21] apresentaram um algoritmo *incremental* para a listagem dos ideais de uma ordem  $P$ , no qual os elementos de  $E$  devem ser fornecidos na ordem de uma extensão linear de  $P$ .

Como uma estrutura utilizada em [21], Habib e Nourine [24] apresentaram uma representação por árvore  $T(R) = (V, F)$  para um reticulado distributivo  $R$  em  $V$  podendo ser computada do grafo cobertura  $G(R) = (V, U)$  do reticulado  $R$  em tempo

$O(|V| + |U|)$ . Para a descrição de  $T(R)$ , observamos que os ideais de uma ordem formam um reticulado distributivo, chamado *reticulado ideal*. Para todo reticulado distributivo e finito  $R$  em  $V$  o conjunto  $M$  dos elementos ínfimo irreduzíveis formam uma ordem cujo reticulado ideal é isomorfo a  $R$ . Seja  $Q$  a ordem  $R$  restrita ao conjunto  $M$  dos elementos ínfimo irreduzíveis do reticulado distributivo  $R$ , isto é, seja  $Q = R[M]$ . Seja  $G(R) = (V, U)$  o grafo cobertura do reticulado  $R$  e  $L_Q$  uma extensão linear de  $Q$ . Considerando-se uma rotulação das arestas de  $G(R)$  com os elementos em  $M$ , a árvore  $T(R)$  é definida como o conjunto de caminhos iniciando no elemento máximo de  $R$  tais que a rotulação de suas arestas forma uma seqüência decrescente com relação a  $L_Q$ . Observamos que esta árvore não é única para  $R$ , mas uma única árvore ideal corresponde a cada extensão linear de  $Q$ . Foi também provado em [24] que esta árvore geradora de  $G(R) = (V, U)$ , chamada *árvore ideal*, é uma representação conveniente para um reticulado distributivo, isto é, todas as operações clássicas no reticulado, tais como alcançabilidade, menor limite superior e maior limite inferior, podem ser feitas eficientemente utilizando-a. Em [21], Habib, Medina, Nourine e Steiner mostraram que o grafo cobertura  $G(R) = (V, U)$  de um reticulado distributivo  $R$  em  $V$  pode também ser computado em tempo  $O(|V| + |U|)$  a partir de sua árvore ideal  $T(R) = (V, F)$ .

Considerando  $T(P)$  a árvore ideal do reticulado ideal de uma ordem  $P$  em  $E$ , em [21] é inicialmente apresentado um algoritmo incremental para a construção de  $T(P)$  diretamente de  $P$ , sem a computação do reticulado ideal inteiro de  $P$ . Uma suposição feita é que os elementos de  $E$  são dados na ordem de uma extensão linear  $L$  de  $P$ . Tal algoritmo constrói a árvore ideal  $T(P) = (V, F)$  da ordem  $P$  em tempo  $O(\Delta(P) \cdot |V|)$  e espaço  $O(|V|)$ . Também em [21] é apresentado um algoritmo o qual constrói o grafo cobertura  $G(R) = (V, U)$  do reticulado ideal  $R$  (em  $V$ ) de  $P$  em tempo e espaço  $O(|V| + |U|)$  (sem considerar o espaço requerido pela entrada). O algoritmo para a listagem eficiente dos ideais de uma ordem apresentado em [21], o faz em uma seqüência tal que ideais consecutivos diferem em no máximo dois elementos. Observamos que o algoritmo para a construção da árvore ideal de  $P$  poderia ser utilizado para a listagem dos ideais de  $P$ , contudo, tal algoritmo

armazena a árvore ideal inteira e conseqüentemente o requerimento de espaço do algoritmo é exponencial no tamanho da ordem.

O algoritmo para a listagem dos ideais de  $P$  em [21] (desconsiderando-se o tempo de pré-processamento) possui o mesmo tempo de execução  $O(\Delta(P).i(P))$  do algoritmo para a construção da árvore ideal de  $P$  e é também baseado em um percurso na árvore ideal de  $P$ . Porém ele simula uma busca em profundidade na árvore sem armazená-la, o que reduz o requerimento de espaço a  $O(w(P).n)$ . Tal algoritmo lista cada ideal duas vezes e ideais consecutivos diferem em exatamente um elemento. É fácil ver que, sendo  $P$  uma ordem arbórea, o algoritmo requer tempo amortizado constante. Além disso, em [32], Koda e Ruskey apresentaram um algoritmo sem laços para a geração dos ideais de uma ordem arbórea, enquanto que em [25], Habib, Nourine e Steiner apresentaram um algoritmo sem laços para a geração dos ideais de uma ordem de intervalo.

## 2.5 Geração de Extensões

### Acréscimos de $P$

Corrêa e Szwarcfiter em [12] descrevem três caracterizações do conjunto  $\varepsilon(P)$  de todas as extensões de uma ordem  $P$ . A primeira caracterização em [12], apresentada nesta seção, estabelece uma correspondência 1–1 entre extensões de  $P$  e pares de ideais e filtros de certas subordens de  $P$ . A segunda caracterização de  $\varepsilon(P)$  é apresentada em termos de extensões lineares e seqüências de ideais. Por [12], estas caracterizações conduzem a algoritmos para a geração de extensões de  $P$  requerendo tempo  $O(n^2)$  por extensão. A terceira caracterização de  $\varepsilon(P)$  é baseada no conceito de *pares passivos* e conduz a um algoritmo para a geração de extensões de  $P$  em tempo amortizado linear por extensão.

Para as caracterizações de  $\varepsilon(P)$ , o *foco* de um subconjunto  $E' \subseteq E$  em  $P$  é o

subconjunto  $F_P(E') \subseteq E$  definido como a seguir.

$$F_P(E') = \begin{cases} E & \text{se } E' = \emptyset \\ \bigcap_{e_i \in E'} E_P^+(e_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Seja  $L = [e_1, e_2, \dots, e_n]$  uma extensão linear de  $P$ . Um *acrécimo de  $P$  relativo a  $L$*  é uma relação binária  $A_n$ , definida pela seguinte recorrência.

$$A_0 = \emptyset \tag{1}$$

$$A_i = A_{i-1} \cup \{(e_i, e_i)\} \cup \{(e_q, e_i) | e_q \in S_i\} \cup \{(e_i, e_q) | e_q \in T_i\}, \tag{2}$$

para todo  $1 \leq i \leq n$ , onde  $S_i$  é um ideal de  $A_{i-1}$  contendo  $E_P^-(e_i)$  e  $T_i$  é um filtro de  $A_{i-1}[F_{A_{i-1}}(S_i)]$ .

Como um exemplo, é apresentada na Figura 2.10 uma ordem  $P$  no conjunto  $E = \{e_1, \dots, e_8\}$ .

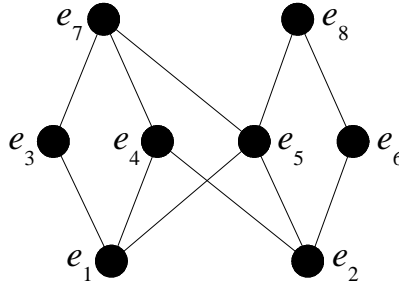


Figura 2.10: Ordem  $P$  em  $E = \{e_1, \dots, e_8\}$ .

Consideramos  $L = [e_1, \dots, e_8]$  e  $A_i = P[E_i]$ , para  $1 \leq i \leq 4$ . O acréscimo  $A_4$  é apresentado na Figura 2.11 (a). Para  $i = 5$ , considerando  $S_5 = \{e_1, e_2\}$  e  $T_5 = \{e_4\}$ , onde  $T_5$  é um filtro de  $A_4[F_{A_4}(S_5)]$ , temos  $A_5$  como apresentado na Figura 2.11 (b).

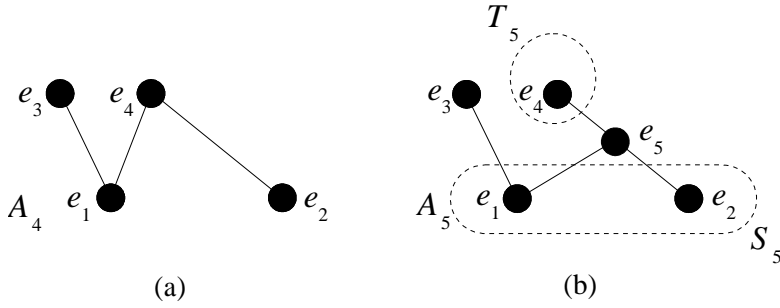


Figura 2.11: (a) Acréscimo  $A_4$  de  $P[E_4]$  relativo a  $L_4$ ;  
 (b) Acréscimo  $A_5$  de  $P[E_5]$  relativo a  $L_5$ .

O Teorema 2.14, devido a Correa e Szwarcfiter, estabelece uma relação entre extensões de  $P$  e acréscimos de  $P$  relativos a  $L$ .

**Teorema 2.14** (Corrêa e Szwarcfiter [12]) *Seja  $P$  uma ordem em  $E$  e  $L$  uma extensão linear de  $P$ . Existe uma correspondência 1-1 entre extensões de  $P$  e acréscimos, relativos a  $L$ .*

**Prova.** Sejam  $P$  uma ordem em  $E$  e  $L = [e_1, e_2, \dots, e_n]$  uma extensão linear de  $P$ . Sejam  $E_0 = P_0 = \emptyset$ ,  $E_i = \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$  e  $P_i = P[E_i]$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Será mostrado, utilizando indução em  $i$ , que existe uma correspondência 1-1 entre extensões de  $P_i$  e acréscimos de  $P_i$  relativos a  $e_1, e_2, \dots, e_i$ . Quando  $i = 0$ , não há o que ser provado. Para  $i > 0$ , assumamos que  $A_{i-1}$ , gerada através de (1)-(2), seja uma ordem em  $E_{i-1}$  e uma extensão de  $P_{i-1}$ . Devemos provar que  $A_i$  é uma extensão de  $P_i$ . Primeiro, será provado que  $A_i$  é uma ordem em  $E_i$ . Claramente,  $A_i$  é reflexiva. Suponha que  $A_i$  não seja anti-simétrica. Então existem elementos distintos  $e_j, e_k \in E_i$  satisfazendo  $(e_j, e_k), (e_k, e_j) \in A_i$ . Visto que  $A_{i-1}$  é uma ordem, segue que  $e_i = e_j$  ou  $e_i = e_k$ . Sem perda de generalidade, podemos assumir  $e_i = e_k$ . Das definições de  $S_i$  e  $T_i$ , segue que  $e_j \in S_i \cap T_i$ . Usando a definição de foco, sabemos que  $S_i \cap T_i = \emptyset$ , o que contradiz a última afirmação. Consequentemente,  $A_i$  é anti-simétrica. Para provar que  $A_i$  é transitiva, é suficiente examinar as transitividades em  $e_i$ . Sejam  $e_k, e_j \in E_{i-1}$  e  $e_k \neq e_j$ . Considere as seguintes alternativas, representadas na Figura

2.12.

**Caso 1**  $((e_k, e_j) \in A_i, (e_j, e_i) \in A_i)$  Visto que  $(e_j, e_i) \in A_i$ , temos  $e_j \in S_i$ . Por outro lado, se  $(e_k, e_j) \in A_i$  então  $(e_k, e_j) \in A_{i-1}$ . Pelo fato de  $S_i$  ser um ideal de  $A_{i-1}$  segue que  $e_k \in S_i$ . Consequentemente,  $(e_k, e_i) \in A_i$  e a transitividade vale.

**Caso 2**  $((e_k, e_i) \in A_i, (e_i, e_j) \in A_i)$  Então  $e_k \in S_i$  e  $e_j \in T_i$ . Da hipótese, concluímos que  $e_j \in F_{A_{i-1}}(S_i)$ . Consequentemente,  $(e_k, e_j) \in A_{i-1}$ . Isto implica  $(e_k, e_j) \in A_i$ .

**Caso 3**  $((e_i, e_k) \in A_i, (e_k, e_j) \in A_i)$  Neste caso, temos duas possibilidades para  $S_i$ . Se  $S_i = \emptyset$  então  $F_{A_{i-1}}(S_i) = E_{i-1}$ . Consequentemente,  $T_i$  é um filtro de  $A_{i-1}$ . Visto que  $(e_i, e_k) \in A_i$ , sabemos que  $e_k \in T_i$ . Além disso,  $T_i$  sendo um filtro de  $A_{i-1}$  implica  $e_j \in T_i$ . Portanto  $(e_i, e_j) \in A_i$ , e a transitividade vale. Agora, considere a situação onde  $S_i \neq \emptyset$ , e seja  $e_t \in S_i$ . Visto que  $T_i \subseteq F_{A_{i-1}}(S_i)$  e  $e_k \in T_i$ , segue que  $(e_t, e_k) \in A_{i-1}$ . Por outro lado,  $(e_k, e_j) \in A_i$  implica  $(e_k, e_j) \in A_{i-1}$ . Pela transitividade de  $A_{i-1}$  segue que  $(e_t, e_j) \in A_{i-1}$ . Portanto  $e_j \in F_{A_{i-1}}(S_i)$ . Pelo fato de  $e_k \in T_i$  e  $T_i$  ser um filtro de  $A_{i-1}[F_{A_{i-1}}(S_i)]$ , concluímos que  $e_j \in T_i$ . Consequentemente,  $(e_i, e_j) \in A_i$ , valendo a transitividade.

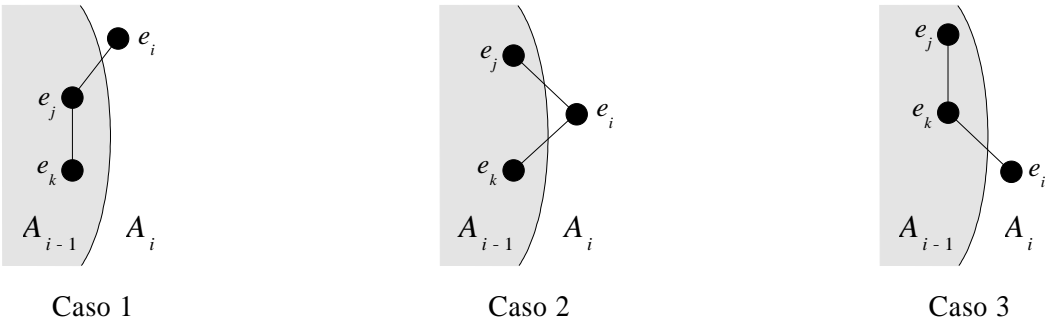


Figura 2.12: Casos na análise da transitividade em  $e_i$ .

Podemos concluir, dos três casos acima, que  $A_i$  é de fato transitiva. Consequentemente,  $A_i$  é uma ordem em  $E_i$ . Resta mostrar que  $A_i$  é uma extensão de  $P_i$ . Seja  $(e_k, e_j) \in P_i$ . Se  $e_k, e_j \neq e_i$  então  $(e_k, e_j) \in A_{i-1}$  e  $(e_k, e_j) \in A_i$ . Se  $e_k = e_i$  então  $e_j = e_i$  visto que  $e_i$  é máximo em  $P_i$ , e portanto  $(e_k, e_j) \in A_i$ . Finalmente se  $e_k \neq e_i$

e  $e_j = e_i$ , então  $E_P^-(e_i) \subseteq S_i$  implica  $e_k \in S_i$  e conseqüentemente  $(e_k, e_j) \in A_i$ . Portanto,  $A_i$  é uma extensão de  $P_i$ .

Por outro lado, seja  $P'$  uma extensão de  $P$ . Mostraremos que  $P'$  é também um acréscimo  $A_n$  de  $P$ , relativo a  $L$ . Novamente, empregamos indução. Para  $i > 0$ , seja  $P'_{i-1} = P'[E_{i-1}]$  e assumamos que  $P'_{i-1}$  seja um acréscimo de  $P_{i-1}$ , relativo a  $e_1, e_2, \dots, e_{i-1}$ . Mostraremos que o mesmo se aplica a  $P'_i$ , isto é, podemos obter  $P'_i$  de  $P'_{i-1}$ , utilizando (1)-(2). Para isto, iremos selecionar um par de subconjuntos  $S_i, T_i$ . Consideramos  $S_i = E_{P'_i}^-(e_i)$  e  $T_i = E_{P'_i}^+(e_i)$  e examinamos as condições (1)-(2). Claramente,  $S_i, T_i \subseteq E_i$ . Além disso, sabemos que  $S_i$  é um ideal de  $P'_{i-1}$ . Visto que  $P'_i$  é uma extensão de  $P_i$ , temos  $E_{P'_i}^-(e_i) \supseteq E_{P_i}^-(e_i)$  e portanto  $S_i$  contém  $E_{P_i}^-(e_i)$ . Além disso, a extensão linear  $L$  dada por  $e_1, e_2, \dots, e_n$  produz que  $E_{P'_i}^-(e_i) = E_P^-(e_i)$ . Conseqüentemente,  $S_i$  contém  $E_P^-(e_i)$ . Em seguida, examinamos  $T_i$ . Se  $T_i = \emptyset$ , não existe nada a ser provado. Caso contrário, seja  $e_j \in T_i$  e considere as duas possíveis alternativas com respeito a  $S_i$ . Se  $S_i = \emptyset$  então  $F_{P'_{i-1}}(S_i) = E_{i-1}$ . Seja  $(e_j, e_q) \in P'_{i-1}$ . Desta forma, temos  $(e_i, e_j) \in P'_i$  e por transitividade  $(e_i, e_q) \in P'_i$ . Isto é,  $e_q \in T_i$ , significando que  $T_i$  é um filtro de  $P'_{i-1}[F_{P'_{i-1}}(S_i)]$ , como requerido. Resta analisar a situação na qual  $S_i \neq \emptyset$ . Em tal caso, escolha  $e_q \in S_i$ . Visto que  $(e_q, e_i), (e_i, e_j) \in P'_i$ , segue que  $(e_q, e_j) \in P'_i$ , isto é,  $(e_q, e_j) \in P'_{i-1}$ . Conseqüentemente,  $e_j \in F_{P'_{i-1}}(S_i)$  e  $T_i \subseteq F_{P'_{i-1}}(S_i)$ . Por fim, precisamos mostrar que  $T_i$  é um filtro de  $P'_{i-1}[F_{P'_{i-1}}(S_i)]$ . Seja  $e_k \in F_{P'_{i-1}}(S_i)$  tal que  $e_k \neq e_j$  e  $(e_j, e_k) \in P'_{i-1}$ . Isto é,  $e_k \in T_i$ . Conseqüentemente,  $T_i$  é um filtro de  $P'_{i-1}[F_{P'_{i-1}}(S_i)]$ , completando a prova.  $\square$

Esta caracterização de  $\varepsilon(P)$  conduz a um algoritmo, apresentado na Figura 2.13, para a geração de todas as extensões  $P'_i$  das subordens induzidas  $P_i, i = 1, \dots, n$  da ordem  $P$ , dada uma extensão linear  $L = [e_1, \dots, e_n]$  de  $P$ . E tais extensões incluem todas as extensões de  $P$ . Podemos gerar recursivamente todas as extensões  $P'_i$  de  $P'_{i-1}, 1 \leq i \leq n$ , definindo  $A = \cup_{e_j} N_{P'_{i-1}}^-[e_j]$ , para todo  $e_j \in N_{P_i}^-(e_i)$  e gerar cada ideal  $S_i$  de  $P'_{i-1}[E_{i-1} \setminus A]$ . Observamos que  $S_i \cup A$  é um ideal de  $P'_{i-1}$  contendo  $N_{P_i}^-(e_i)$ . Em seguida, devemos calcular o foco  $F$  de  $S_i$  em  $P'_{i-1}$  e gerar

cada filtro  $T_i$  de  $P'_{i-1}[F]$ . Uma vez definidos  $S_i$  e  $T_i$  podemos inserir  $e_i$  na ordem definindo  $N_{P'}^-(e_i) = S_i$  e  $N_{P'}^+(e_i) = T_i$ . Observamos que para a geração dos ideais e filtros de uma ordem, podemos empregar um dos algoritmos vistos na Seção 2.4. Como exemplo, o algoritmo apresentado por Squire [52] requer tempo logaritmo por ideal gerado. A chamada externa ao procedimento de geração das extensões é  $\text{EXTENSOES}(\emptyset, 1)$ .

**Algoritmo:**  $\text{EXTENSOES}(P'_{i-1}, i)$

**Se**  $i > n$  **Então**

Enumere  $P'_{i-1}$

**Senão**

$A := \cup_{e_j} N_{P'_{i-1}}^-[e_j]$ , para todo  $e_j \in N_{P'_i}^-(e_i)$

**Para** cada ideal  $S'_i$  de  $P'_{i-1} \setminus A$  **Faça**

$S_i := S'_i \cup A$

$F := \text{foco de } S_i \text{ em } P'_{i-1}$

**Para** cada filtro  $T_i$  de  $P'_{i-1}[F]$  **Faça**

$P'_i := P'_{i-1} \cup \{(e_i, e_i)\} \cup \{(e_j, e_i) | e_j \in S_i\} \cup \{(e_i, e_j) | e_j \in T_i\}$

$\text{EXTENSOES}(P'_i, i + 1)$

Figura 2.13: Enumeração de extensões baseada no Teorema 2.14.

O cálculo da complexidade do algoritmo é apresentado em [12] considerando-se a árvore de recursão  $T$ , cujos nós internos correspondem às extensões das subordens  $P_i$  ( $i < n$ ) de  $P$  e cujas folhas correspondem às extensões de  $P$ . Os nós internos possuindo exatamente um filho correspondem a chamadas de  $\text{EXTENSOES}(P'_{i-1}, i)$  nas quais  $E_{i-1} = N_{P'_i}^-(e_i)$ . Isto é,  $S_i = E_{i-1}$  e  $T_i = \emptyset$ . Neste caso, o algoritmo pode ser implementado de modo que estas chamadas requeiram tempo constante. Podemos considerar que a computação total referente a um caminho (contendo apenas nós com um único filho) da raiz a uma folha de  $T$  requer tempo  $O(n)$ , visto que a altura de  $T$  é  $n + 1$ . O número de nós internos com mais de um filho é menor do que o número de folhas de  $T$ . Além disso, nas chamadas correspondentes a tais nós, temos

o cálculo do foco  $F$  como operação dominante do algoritmo (a qual pode requerer tempo  $O(n^2)$ ). Consequentemente, o limite de tempo total para a geração de todas as extensões de todas as subordens  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  de  $P$  é  $O(n^2\mu)$ .

### Acréscimos Lexicográficos de $P$

A segunda caracterização apresentada em [12] relaciona  $\varepsilon(P)$  a seqüências de ideais e extensões lineares. Para esta caracterização consideramos  $L$  e  $L'$  extensões lineares de  $P$ , com  $L = [e_1, e_2, \dots, e_n]$ . Um *acréscimo lexicográfico de  $P$  relativo a  $(L, L')$* , é uma relação binária  $B_n$ , obtida pela seguinte recorrência.

$$B_0 = \emptyset \tag{3}$$

$$B_i = B_{i-1} \cup \{(e_i, e_i)\} \cup \{(e_q, e_i) | e_q \in S_i \cup E_{B_{i-1}}^-[M_{B_{i-1}}^+ \cap E_{L'}^+(e_i)]\}, \tag{4}$$

para todo  $1 \leq i \leq n$ , onde  $S_i$  é um ideal de  $B_{i-1}$ , contendo  $E_P^-(e_i)$ . Como um exemplo, considerando a ordem  $P$  representada na Figura 2.10, e as extensões lineares  $L = [e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8]$  e  $L' = [e_1, e_2, e_3, e_4, e_6, e_5, e_8, e_7]$ , podemos ter a seqüência de ideais  $S_1 = \emptyset$ ,  $S_2 = \emptyset$ ,  $S_3 = \{e_1\}$ ,  $S_4 = \{e_1, e_2\}$  e  $S_5 = \{e_1, e_2\}$ , a qual conduz ao acréscimo lexicográfico  $B_5$  representado na Figura 2.14(a). Considerando  $S_6 = \{e_1, e_2, e_5\}$ , temos  $B_6$  como representado na Figura 2.14(b).

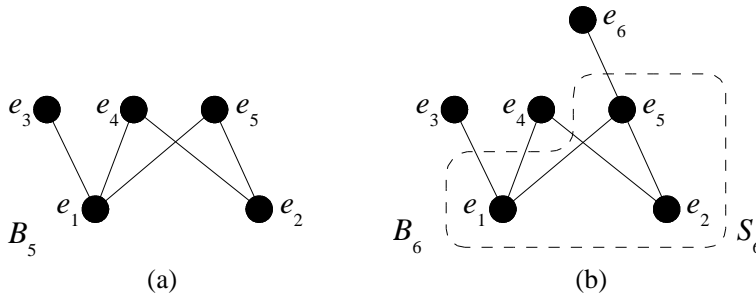


Figura 2.14: (a) Acréscimo lexicográfico  $B_5$  de  $P[E_5]$  relativo a  $(L_5, L'[E_5])$ ;  
(b) Acréscimo  $B_6$  de  $P[E_6]$  relativo a  $(L_6, L'[E_6])$ .

O Teorema 2.15, devido a Corrêa e Szwarcfiter, relaciona acréscimos lexicográficos e extensões.

**Teorema 2.15** (Corrêa e Szwarcfiter [12]) *Sejam  $P$  uma ordem em  $E$  e  $L'$  uma extensão linear fixa de  $P$ . Existe uma correspondência 1-1 entre extensões de  $P$  e pares  $(L, B_n)$ , onde  $L$  é uma extensão linear de  $P$  e  $B_n$  é um acréscimo lexicográfico de  $P$ , relativo a  $(L, L')$ .*

**Prova.** Sejam  $L = [e_1, e_2, \dots, e_n]$  e  $L'$  extensões lineares de  $P$ , e  $B_n$  um acréscimo lexicográfico de  $P$ , relativo a  $(L, L')$ . Definimos  $E_0, P_0, E_i$  e  $P_i$  como na prova do Teorema 2.14 e denotamos  $L_i = [e_1, e_2, \dots, e_i]$ . Utilizaremos indução para mostrar que existe uma correspondência 1-1 entre extensões  $P'_i$  de  $P_i$  e acréscimos lexicográficos  $B_i$  de  $P_i$ , relativos a  $(L_i, L'[E_i])$ . O caso no qual  $i = 0$  é trivialmente válido. Para  $i > 0$ , devemos mostrar que  $B_i$ , obtido através de (3)-(4), é uma extensão de  $P_i$ , dado que  $B_{i-1}$  é uma ordem em  $E_{i-1}$  e uma extensão de  $P_{i-1}$ . Inicialmente, mostramos que  $B_i$  é uma ordem em  $E_i$ . Claramente,  $B_i$  é reflexiva. Visto que  $B_{i-1}$  é anti-simétrica e  $e_i$  é um elemento maximal de  $B_i$  segue que  $B_i$  preserva anti-simetria. Para provar que  $B_i$  é transitiva, é suficiente examinar as transitividades em  $e_i$ . Visto que  $e_i$  é um elemento maximal, o único caso a verificar é se  $(e_j, e_k), (e_k, e_i) \in B_i$  implica  $(e_j, e_i) \in B_i$ , para todo  $e_i, e_j, e_k \in E_i$ . Se  $e_i, e_j, e_k$  não são distintos, esta condição vale. Se  $e_i, e_j, e_k$  são distintos, então  $(e_j, e_k) \in B_{i-1}$ . Visto que  $(e_k, e_i) \in B_i$ , segue que  $e_k \in S_i \cup S'_i$ , onde  $S_i$  é um ideal de  $B_{i-1}$  e  $S'_i = E_{B_{i-1}}^-[M_{B_{i-1}}^+ \cap E_{L'}^+(e_i)]$ . Sabemos que  $S_i \cup S'_i$  é também um ideal de  $B_{i-1}$ . Consequentemente,  $e_k \in S_i \cup S'_i$  e  $(e_j, e_k) \in B_{i-1}$  implicam  $e_j \in S_i \cup S'_i$ . Isto é,  $(e_j, e_i) \in B_i$ , significando que  $B_i$  é transitiva. A conclusão é que  $B_i$  é uma ordem em  $E_i$ . Temos  $B_i$  uma extensão de  $P_i$ , visto que  $B_{i-1}$  é uma extensão de  $P_{i-1}$  e  $S_i \supseteq E_P^-(e_i)$ .

Por outro lado, seja  $P'$  uma extensão de  $P$ . Mostraremos que  $P'$  é também um acréscimo lexicográfico  $B_n$  de  $P$ , relativo a  $(L, L')$ , onde  $L$  é a extensão linear  $e_1, \dots, e_n$  de  $P$  obtida como segue. Para  $i = n, \dots, 1$  escolha  $e_i$  como sendo o elemento

maximal de  $P'[E \setminus \{e_{i+1}, \dots, e_n\}]$  que está mais à direita em  $L'$ . Denotamos  $P'_i = P'[E_i]$  e utilizamos indução. Para  $i > 0$ , assumamos que  $P'_{i-1} = B_{i-1}$ , onde  $B_{i-1}$  é um acréscimo lexicográfico de  $P_{i-1}$ , relativo a  $(L_{i-1}, L'[E_{i-1}])$ . Mostraremos que o mesmo se aplica a  $P'_i$ , isto é,  $P'_i = B_i$ , onde  $B_i$  é obtido de  $B_{i-1}$ , utilizando (3)-(4). Considere  $S'_i = E_{B_{i-1}}^-[M_{B_{i-1}}^+ \cap E_{L'}^+(e_i)]$ , e defina  $S_i = (E_{P'_i}^-(e_i) \setminus S'_i) \cup E_{P_i}^-(e_i)$ . Precisamos mostrar que  $E_{P'_i}^-(e_i) = S_i \cup S'_i$ . Claramente,  $E_{P'_i}^-(e_i) \subseteq S_i \cup S'_i$ , por construção. Seja  $e_j \in S_i \cup S'_i$ , para algum  $j < i$ . Se  $e_j \in S_i$  então  $e_j \in [E_{P'_i}^-(e_i) \cup E_{P_i}^-(e_i)] = E_{P'_i}^-(e_i)$ , visto que  $P'_i$  é uma extensão de  $P_i$ . Se  $e_j \in S'_i$ , primeiro considere  $e_j \in M_{B_{i-1}}^+ \cap E_{L'}^+(e_i)$ . Nesta situação,  $e_j \in E_{P'_i}^-(e_i)$ , caso contrário existe (pela construção de  $L$ ) um elemento maximal em  $P'_i$  o qual está situado à direita de  $e_i$  em  $L'$ , uma contradição. Se consideramos  $e_j \in E_{B_{i-1}}^-[M_{B_{i-1}}^+ \cap E_{L'}^+(e_i)]$  então temos  $e_j \in E_{P'_i}^-(e_i)$ , por transitividade. Consequentemente,  $E_{P'_i}^-(e_i) = S_i \cup S'_i$ , e  $P'_i = B_i$ .

Para mostrarmos que a correspondência é injetiva, consideramos  $B_n$  e  $\overline{B}_n$  dois acréscimos lexicográficos distintos de  $P$ , relativos a  $(L, L')$  e  $(\overline{L}, L')$ , respectivamente, onde  $L, L'$ , e  $\overline{L}$  são extensões lineares de  $P$ . Observamos que se  $L = \overline{L}$  então as extensões de  $P$  correspondendo a  $B_n$  e  $\overline{B}_n$  são distintas se e somente se existem dois ideais distintos  $S_i$  e  $\overline{S}_i$  nas seqüências  $S_1, \dots, S_n$ , para  $B_n$ , e  $\overline{S}_1, \dots, \overline{S}_n$ , para  $\overline{B}_n$ . Portanto, considere  $L \neq \overline{L}$ , sendo  $L$  a seqüência  $e_1, \dots, e_n$ . Então, existem dois elementos  $e_i$  e  $e_j$ ,  $j > i$ , tais que  $e_i$  se encontra à direita de  $e_j$  em  $\overline{L}$ . (Se  $j > i + 1$  então ou  $(e_{i+1}, e_i) \in \overline{L}$  ou  $(e_i, e_{i+1}) \in \overline{L}$ . No primeiro caso, temos dois elementos consecutivos em  $L$  aparecendo em ordem inversa em  $\overline{L}$ . No segundo caso, temos  $(e_{i+1}, e_j) \in L$ ,  $(e_j, e_{i+1}) \in \overline{L}$  e podemos aplicar o mesmo argumento considerando agora os elementos  $e_{i+1}$  e  $e_j$ . Seguindo desta forma sucessivamente para  $e_{i+1}, e_{i+2}, \dots, e_{j-1}$ , chegaremos à situação na qual dois elementos consecutivos em  $L$  aparecem em ordem inversa em  $\overline{L}$ .) Considere, portanto,  $j = i + 1$ .

Provaremos que se  $P'$  e  $\overline{P}'$  são as extensões de  $P$  correspondendo a  $B_n$  e  $\overline{B}_n$ , respectivamente, então  $P' \neq \overline{P}'$ . Por contradição, assumamos que  $P' = \overline{P}'$ . A argumentação descrita a seguir é ilustrada na Figura 2.15. Visto que  $(e_j, e_i) \in \overline{L}$ ,

concluimos que  $(e_i, e_j) \notin P'$ . Além disso,  $e_i \in M_{B_{j-1}}^+$ , o que implica que  $(e_i, e_j) \in L'$ . Segue disto que existe um elemento  $e_k$  que está entre  $e_j$  e  $e_i$  em  $\bar{L}$  pois, caso contrário,  $(e_j, e_i) \in P'$  por (4). A relação  $(e_j, e_i)$  não pode estar em  $P'$  visto que  $i < j$  e  $P' = B_n$ . Além de estar entre  $e_j$  e  $e_i$  em  $\bar{L}$ ,  $e_k$  tem que estar à esquerda de  $e_i$  e  $e_j$  em  $L'$ , de modo que  $(e_j, e_k) \in P'$  e  $(e_k, e_i) \notin P'$ . Visto que  $(e_j, e_k) \in P'$ , temos  $(e_i, e_k) \in L$ . Novamente,  $P'$  não pode conter  $(e_i, e_k)$ . Consequentemente, existe  $j < l < k$  tal que  $(e_i, e_l) \in P'$  e  $(e_l, e_k) \notin P'$ , e  $e_l$  está à esquerda de  $e_i$ ,  $e_j$  e  $e_k$  em  $L'$ . Este procedimento poderia ser repetido indefinidamente. Contudo, visto que  $E$  é finito, chegaremos a uma contradição, significando que  $P \neq \bar{P}'$ .  $\square$

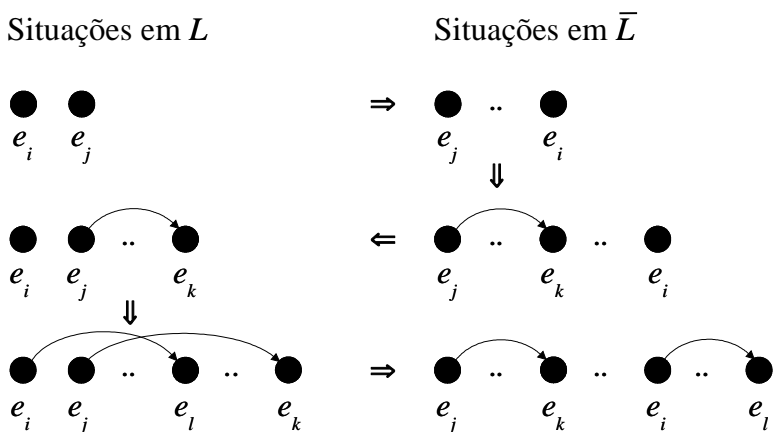


Figura 2.15: Prova do Teorema 2.15.

O algoritmo  $\text{GERAEXTENSOES-LEX}(P)$  apresentado na Figura 2.16 para a geração de  $\varepsilon(P)$  baseado no Teorema 2.15 gera inicialmente uma extensão linear fixa  $L'$  de  $P$ . Para a geração de cada extensão linear  $L$  de  $\varepsilon(P)$ , podemos utilizar o algoritmo apresentado em [11], o qual requer tempo constante por extensão linear, após um pré-processamento  $O(n^2)$ . Calculamos os acréscimos lexicográficos de  $P$  relativos a  $(L, L')$ , para toda extensão linear  $L$  de  $P$  através de  $\text{EXTENSOES-LEX}(P'_{i-1}, i, L, L')$ . Para cada  $i = 1, \dots, n$ , a geração de ideais de  $P'_{i-1}$  pode ser executada utilizando-se o algoritmo em [52]. Por [12], o algoritmo  $\text{GERAEXTENSOES-LEX}(P)$  pode ser implementado em tempo  $O(n^2\mu)$ .

**Algoritmo:** GERAEXTENSOES-LEX( $P$ )

Seja  $L' \in \varepsilon_1(P)$

**Para** cada extensão linear  $L \in \varepsilon_1(P)$  **Faça**

EXTENSOES-LEX( $\emptyset, 1, L, L'$ )

**Algoritmo:** EXTENSOES-LEX( $P'_{i-1}, i, L, L'$ )

**Se**  $i > n$  **Então**

Enumere  $P'_{i-1}$

**Senão**

$A := \bigcup_{e_j \in E_{P'_i}^-(e_i)} E_{P'_{i-1}}^-[e_j] \cup E_{P'_{i-1}}^-[M_{P'_{i-1}}^+ \cap E_{L'}^+(e_i)]$

**Para** cada ideal  $S'_i$  de  $P'_{i-1} \setminus A$  **Faça**

$S_i := S'_i \cup A$

$P'_i := P'_{i-1} \cup \{(e_i, e_i)\} \cup \{(e_j, e_i) \mid e_j \in S_i\}$

EXTENSOES-LEX( $P'_i, i + 1, L, L'$ )

Figura 2.16: Enumeração de extensões baseada no Teorema 2.15.

## Pares Passivos de $P$

Para a terceira caracterização de  $\varepsilon(P)$  apresentada em [12], é definido o conceito de pares passivos e descritas algumas propriedades relacionadas. Seja  $I(P)$  o conjunto de elementos incomparáveis de  $P$ . Um par  $w \in I(P)$  é chamado *passivo* quando  $P + w$  é uma ordem. Denotamos por  $W(P)$  o conjunto de pares passivos de  $P$ . Como exemplo, considerando  $P$  a ordem da Figura 2.17, temos  $W(P) = \{(e_1, e_3), (e_2, e_7), (e_2, e_9), (e_3, e_2), (e_3, e_4), (e_4, e_2), (e_4, e_5), (e_5, e_6), (e_6, e_7), (e_7, e_9), (e_9, e_8)\}$ . Considerando  $F \subseteq I(P)$ , denotamos por  $\varepsilon(P, F)$  o conjunto de todas as extensões de  $P$  não possuindo pares pertencentes a  $F$ . Isto é,  $P' \in \varepsilon(P, F)$  se e somente se  $P'$  é uma ordem em  $E$  tal que  $P' \supseteq P$  e  $P' \cap F = \emptyset$ . O seguinte teorema, devido a Corrêa e Szwarcfiter [12], descreve um método para computar o conjunto  $\varepsilon(P, \emptyset)$  de todas as extensões de  $P$ .

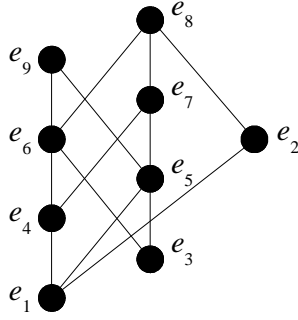


Figura 2.17: Conjunto de pares passivos  $W(P) = \{(e_1, e_3), (e_2, e_7), (e_2, e_9), (e_3, e_2), (e_3, e_4), (e_4, e_2), (e_4, e_5), (e_5, e_6), (e_6, e_7), (e_7, e_9), (e_9, e_8)\}$ .

**Teorema 2.16** (Corrêa e Szwarcfiter [12]) *Seja  $P$  uma ordem em  $E$ ,  $I(P)$  seu conjunto incomparável,  $F \subseteq I(P)$ ,  $W$  o conjunto dos pares passivos de  $P$  e  $\varepsilon(P, F)$  o conjunto de todas as extensões de  $P$ , não possuindo os pares em  $F$ . Então*

$$\varepsilon(P, F) = \{P\}, \text{ quando } W \subseteq F. \quad (5)$$

*Caso contrário,*

$$\varepsilon(P, F) = \{P\} \cup_{q=1, \dots, l} \varepsilon(P + w_q, F \cup \{w_1, \dots, w_{q-1}\}), \quad (6)$$

*onde  $W \setminus F = \{w_1, \dots, w_l\}$ . Além disso, os subconjuntos em (6) formam uma partição de  $\varepsilon(P, F)$ .*

Em um algoritmo recursivo derivado desta caracterização, a cada chamada de  $\varepsilon(P, F)$ , se  $W(P) \subseteq F$  então não podemos inserir pares passivos e retornamos  $P$ . Caso contrário, retornamos  $P$  e chamamos recursivamente  $\varepsilon(P + w_q, F \cup \{w_1, \dots, w_{q-1}\})$ . Observamos que a cada enumeração de uma extensão, o algoritmo requer o cálculo do conjunto  $W(P)$  de pares passivos para a ordem corrente  $P$ . Para a descrição de métodos convenientes apresentados em [12] para o cálculo do conjunto  $W(P)$  de pares passivos, consideramos  $e_i, e_j, e_k$  elementos distintos de  $E$ , com  $(e_i, e_j) \in I(P)$ . Dizemos que  $e_k$  é um *elemento ativo para  $(e_i, e_j)$  em  $P$*  quando ou

$$(e_j, e_k) \in P \text{ e } (e_i, e_k) \in I(P), \text{ ou} \quad (7)$$

$$(e_k, e_j) \in I(P) \text{ e } (e_k, e_i) \in P. \quad (8)$$

Estes casos são ilustrados na Figura 2.18. Denotamos por  $A_{ij}(P)$  o conjunto de todos os elementos ativos para  $(e_i, e_j)$  em  $P$ . O próximo lema, devido a Corrêa e Szwarcfiter [12], relaciona elementos ativos e pares passivos.



Figura 2.18: Casos (7) e (8).

**Lema 2.1** (Corrêa e Szwarcfiter [12]) *Seja  $P$  uma ordem em  $E$ ,  $I(P)$  seu conjunto incomparável e  $(e_i, e_j) \in I(P)$ . Então  $(e_i, e_j)$  é um par passivo se e somente se  $A_{ij}(P) = \emptyset$ .*

Os próximos dois lemas são utilizados para descrever as mudanças nos conjuntos de elementos ativos, quando acrescentamos uma relação  $(e_s, e_t)$  à ordem  $P$ . O Lema 2.2 caracteriza os elementos ativos em  $P$  que não são ativos em  $P + (e_s, e_t)$ , para algum par passivo  $(e_s, e_t)$ , enquanto o Lema 2.3 caracteriza os elementos que são ativos em  $P + (e_s, e_t)$  mas não são em  $P$ .

**Lema 2.2** (Corrêa e Szwarcfiter [12]) *Seja  $P$  uma ordem em  $E$ ,  $(e_s, e_t)$  um par passivo em  $P$ ,  $(e_i, e_j)$  um par incomparável em  $P + (e_s, e_t)$  e  $e_k \in E$ . Então  $e_k \in A_{ij}(P) \setminus A_{ij}(P + (e_s, e_t))$  se e somente se*

$$e_s = e_i, e_t = e_k \text{ e } (e_j, e_k) \in P, \text{ ou} \quad (9)$$

$$e_s = e_k, e_t = e_j \text{ e } (e_k, e_i) \in P. \quad (10)$$

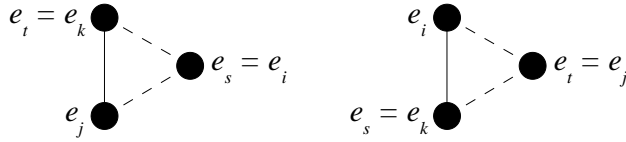


Figura 2.19: Casos (9) e (10).

**Lema 2.3** (Corrêa e Szwarcfiter [12]) *Seja  $P$  uma ordem em  $E$ ,  $(e_s, e_t)$  um par passivo em  $P$ ,  $(e_i, e_j)$  um par incomparável em  $P + (e_s, e_t)$  e  $e_k \in E$ . Então  $e_k \in A_{ij}(P + (e_s, e_t)) \setminus A_{ij}(P)$  se e somente se*

$$e_s = e_k, e_t = e_i \text{ e } (e_k, e_j) \in I(P), \text{ ou} \quad (11)$$

$$e_s = e_j, e_t = e_k \text{ e } (e_i, e_k) \in I(P). \quad (12)$$

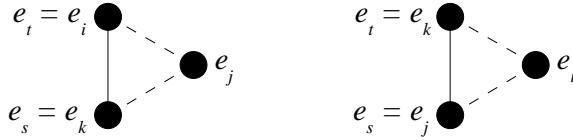


Figura 2.20: Casos (11) e (12).

Em um algoritmo para a geração de todas as extensões de  $P$  baseado no Teorema 2.16, é necessário o cálculo do conjunto de pares passivos de uma ordem para cada extensão gerada. Considerando  $w_q \in W(P)$  o  $q$ -ésimo par em uma ordenação arbitrária de  $W(P)$ , em [12] é descrito um processo para calcular  $W(P + w_q)$  a partir de  $w_q$  e  $W(P)$ , o qual utiliza os Lemas 2.1–2.3.

Considerando  $W_1 = W(P) \setminus W(P + w_q)$  e  $W_2 = W(P + w_q) \setminus W(P)$ , podemos obter  $W(P + w_q)$  de  $W(P)$  adicionando a este os pares de  $W_2$  e removendo os pares de  $W_1$ . Notamos que o par  $w_q$  e seu simétrico  $\bar{w}_q$  não pertencem a  $W(P + w_q)$  visto que não são pares incomparáveis de  $P + w_q$ . Seja  $A_{ij}(P)$  o conjunto de elementos ativos para um par incomparável  $(e_i, e_j) \in I(P)$ , e seja  $a_{ij} = |A_{ij}(P)|$ . O Lema

2.1 assegura que os pares passivos de  $P$  são exatamente os pares  $(e_i, e_j)$  tais que  $a_{ij} = 0$ . Os Lemas 2.2 e 2.3 descrevem as condições para que o valor de  $a_{ij}$  tenha um decréscimo ou um acréscimo, respectivamente, quando incluímos um par passivo  $w_q$  em  $P$ . Observamos que se  $a_{ij}$  tem seu valor decrescido de 1 para 0 então  $(e_i, e_j)$  é um candidato a ser incluído em  $W_2$ , e se  $a_{ij}$  tem seu valor acrescido de 0 para 1 então  $(e_i, e_j)$  é um candidato a ser incluído em  $W_1$ . Se  $(e_i, e_j) \neq w_q$  é um par proibido em  $P$ , também o será em  $P + w_q$ . Consideraremos  $W'(P) = W(P) \setminus F$ , tal que  $(e_i, e_j)$  é incluído em  $W_2$  exatamente quando o valor de  $a_{ij}$  decai para 0 e  $(e_i, e_j) \notin F$ . O método é descrito na Figura 2.21.

**Algoritmo:** EXT( $W_1, W_2$ )

Enumere  $P$

$W' := (W \setminus W_1) \cup W_2$

Se  $W' \neq \emptyset$  então

**Para**  $q := 1, \dots, |W'|$  **Faça**

$w_q := q$ -ésimo par de  $W'$

CALCULAR( $W'_1, W'_2, w_w$ )

$P := P + w_q$

$I := I \setminus \{w_q, \overline{w_q}\}$

**Se**  $q > 1$  **Então**  $F := F + w_{q-1}$

EXT( $W'_1, W'_2$ )

$P := P - w_q$

$I := I \cup \{w_q, \overline{w_q}\}$

Recuperar os  $a_{ij}$ 's

Recuperar  $W'$

$F := F \setminus W'$

Figura 2.21: Algoritmo enumerando todas as extensões de  $P$  não contendo pares proibidos.

O algoritmo EXT enumera todas as extensões de  $P$  não contendo os pares de  $F$ . Sendo  $w_q \in W'$  temos  $W'_1, W'_2 \subseteq I(P)$  tais que  $(W' \setminus W'_1) \cup W'_2$  é exatamente o conjunto de pares passivos de  $P + w_q$ , que não estão em  $F$ . Os conjuntos  $W'_1$  e  $W'_2$  são calculados através da chamada ao procedimento CALCULAR( $W'_1, W'_2, w_q$ ). No algoritmo apresentado na Figura 2.23, temos o processo de inicialização (o qual inclui o cálculo dos valores  $a_{ij}$  e do conjunto  $W'$ ) e a chamada a EXT. Com a utilização de estruturas de dados padrão ( $P$  e  $F$  são matrizes  $n \times n$ , enquanto  $W', W'_1, W'_2$  são filas) requerendo espaço  $O(n^2)$ , o algoritmo enumera as extensões de  $P$  em tempo  $O(m + n\mu)$ , como mostrado em [12].

**Algoritmo:** CALCULAR( $W_1, W_2, w_q$ )

Seja  $(e_s, e_t)$  o par  $w_q$

$W_1 := \{(e_s, e_t), (e_t, e_s)\}$

$W_2 := \emptyset$

**Para**  $z := 1, \dots, n, z \neq s, t$  **Faça**

**Se**  $(e_s, e_z) \in I$  **e**  $(e_z, e_t) \in P$  **Então**

$a_{sz} := a_{sz} - 1$

**Se**  $a_{sz} = 0$  **e**  $(e_s, e_z) \notin F$  **Então**

$W_2 := W_2 \cup \{(e_s, e_z)\}$

**Se**  $(e_s, e_z) \in P$  **e**  $(e_z, e_t) \in I$  **Então**

$a_{zt} := a_{zt} - 1$

**Se**  $a_{zt} = 0$  **e**  $(e_z, e_t) \notin F$  **Então**

$W_2 := W_2 \cup \{(e_z, e_t)\}$

**Se**  $(e_s, e_z) \in I$  **e**  $(e_t, e_z) \in I$  **Então**

$a_{tz} := a_{tz} + 1$

$a_{zs} := a_{zs} + 1$

$W_1 := W_1 \cup \{(e_t, e_z), (e_z, e_s)\}$

Figura 2.22: Algoritmo que constrói os conjuntos  $W_1$  e  $W_2$

a serem utilizados em EXT.

**Algoritmo:** EXTENSOES( $P$ )

Encontre o conjunto incomparável  $I$

$W' := \emptyset$

$F := \emptyset$

**Para** cada par  $(e_i, e_j) \in I$  **Faça**

    Calcule  $a_{ij}$

**Se**  $a_{ij} = 0$  **Então**  $W' := W' \cup \{(e_i, e_j)\}$

EXT( $\emptyset, \emptyset$ )

Figura 2.23: Enumeração das extensões de uma ordem baseada no Teorema 2.16.

# Capítulo 3

## Extensões Arbóreas

### 3.1 Caracterização de Extensões Arbóreas

Como uma aplicação da segunda caracterização de  $\varepsilon(P)$  em [12], será apresentado nesta seção um procedimento para a geração de extensões arbóreas  $P'$  de uma dada ordem  $P$ . Inicialmente, definiremos um conjunto  $Q$  de pares pertencentes a qualquer acréscimo lexicográfico arbóreo da ordem  $P$  relativo às extensões lineares  $L$  e  $L'$  de  $P$ . O conjunto  $Q$  será utilizado na geração dos acréscimos lexicográficos arbóreos de  $P$ .

Seja  $L = [e_1, \dots, e_n]$ . Para cada  $1 \leq i \leq n$ , se  $E_L^-(e_i) \cap E_{L'}^-(e_i) \neq \emptyset$ , então considere  $u_i \in E_L^-(e_i) \cap E_{L'}^-(e_i)$  tal que  $E_L^+(u_i) \cap E_L^-(e_i) \cap E_{L'}^-(e_i) = \emptyset$  e defina  $N^-(e_i) = E_{i-1} \cap E_L^+(u_i)$ . No caso de  $E_L^-(e_i) \cap E_{L'}^-(e_i) = \emptyset$  defina  $N^-(e_i) = E_{i-1}$ . Seja  $N = \bigcup_{i=1}^n \{(e_j, e_i) | e_j \in N^-(e_i)\}$ . Seja  $Q_{n+1}$  o fecho transitivo de  $P \cup N$ . Para  $i = n, \dots, 1$ , seja  $Q_i$  o fecho transitivo de  $Q_{i+1} \cup R(e_i)$ , onde  $R(e_i) = \{(e_j, e_k) \in L | e_j, e_k \in E_{Q_{i+1}}^-(e_i)\}$ . Para o próximo lema, seja  $Q = Q_1$ .

**Lema 3.1**  *$Q$  é uma extensão arbórea de  $P$ . Além disso, se  $B_n$  é um acréscimo lexicográfico arbóreo de  $P$  relativo a  $(L, L')$ , então  $Q \subseteq B_n$ .*

**Prova.** Visto que  $P \subseteq Q_{n+1} \subseteq Q_n \subseteq \dots \subseteq Q_1$ , temos  $Q_i$  reflexiva para  $1 \leq i \leq n+1$ .

Além disso,  $Q_i$  é anti-simétrica e transitiva visto que  $Q_i$  é o fecho transitivo de  $Q_{i+1} \cup R(e_i)$ ,  $Q_{i+1} \cup R(e_i) \subseteq L$ , e  $L$  é uma extensão linear de  $P$ . Desta forma,  $Q$  é uma extensão de  $P$ .

Suponha que  $Q$  não seja arbórea. Então existem uma ordem  $Q_l$  e um elemento  $e_m$ , com  $1 \leq l \leq m \leq n$ , tais que  $E_{Q_l}^-(e_m)$  não é totalmente ordenado em  $Q_l$ . Tome  $l$  máximo, e considere  $e_j, e_k \in E_{Q_l}^-(e_m)$  dois elementos incomparáveis em  $Q_l$ . Se  $l = m$ , então um dentre  $e_j, e_k$  ou ambos não pertencem a  $E_{Q_{l+1}}^-(e_l)$ , caso contrário  $(e_j, e_k) \in R(e_l)$  e  $(e_j, e_k) \in Q_l$ . Sem perda de generalidade, suponha  $e_j \notin E_{Q_{l+1}}^-(e_l)$ . Visto que  $e_j \in E_{Q_l}^-(e_l)$  e  $(e_j, e_l) \notin R(e_l)$ , temos que  $(e_j, e_l)$  é uma relação obtida pelo fecho transitivo e existe  $x \in E$  tal que  $(e_j, x), (x, e_l) \in Q_{l+1} \cup R(e_l)$ . Seja  $(e_j, x) \in Q_{l+1}$ . Se  $(x, e_l) \in Q_{l+1} \cup R(e_l)$  temos  $(e_j, e_l) \in Q_{l+1}$ , contradizendo a suposição inicial. Logo,  $E_{Q_l}^-(e_l) = E_{Q_{l+1}}^-(e_l)$ .

Se  $l < m$ , então ou um dentre  $e_j, e_k$  ou ambos não pertencem a  $E_{Q_{l+1}}^-(e_m)$ , caso contrário estaríamos contradizendo o fato de  $l$  ser máximo. Sejam  $e_k \in E_{Q_{l+1}}^-(e_m)$ ,  $e_j \notin E_{Q_{l+1}}^-(e_m)$  e  $e_j \in E_{Q_l}^-(e_m)$ . Podemos afirmar que  $(e_j, e_m)$  é uma relação obtida pelo fecho transitivo. Observamos que se  $(e_j, e_m) \in R(e_l)$  então  $e_m \in E_{Q_{l+1}}^-(e_l)$ , o que contradiz  $l < m$ . Desta forma, existe  $x \in E$  tal que  $(e_j, x), (x, e_m) \in Q_{l+1} \cup R(e_l)$ . Temos  $(x, e_m) \in Q_{l+1}$ . Além disso,  $(e_j, x) \in R(e_l)$  pois caso contrário teríamos  $(e_j, e_m) \in Q_{l+1}$  por transitividade. Como  $x, e_k \in E_{Q_{l+1}}^-(e_m)$  e  $l$  é máximo, temos  $x$  e  $e_k$  comparáveis em  $Q_{l+1}$ . Se  $(e_k, x) \in Q_{l+1}$  então, visto que  $(x, e_l) \in Q_{l+1}$ , temos  $(e_k, e_l) \in Q_{l+1}$ . Logo, ou  $(e_j, e_k) \in R(e_l)$  ou  $(e_k, e_j) \in R(e_l)$ , contradizendo  $e_j \parallel e_k$  em  $Q_l$ . Se  $(x, e_k) \in Q_{l+1}$  então, visto que  $(e_j, x), (x, e_k) \in Q_l$ , temos  $(e_j, e_k) \in Q_l$  por transitividade, contradizendo  $e_j \parallel e_k$  em  $Q_l$ . Se  $e_j, e_k \notin E_{Q_{l+1}}^-(e_m)$  e  $l < m$ , então  $(e_j, e_m), (e_k, e_m)$  são relações obtidas pelo fecho transitivo. Isto é, existem  $x$  e  $y$  tais que  $(e_j, x), (x, e_m), (e_k, y), (y, e_m) \in Q_{l+1} \cup R(e_l)$ . Claramente,  $(x, e_m), (y, e_m) \in Q_{l+1}$  e, conseqüentemente,  $(e_j, x), (e_k, y) \in R(e_l)$ . Porém,  $e_j, e_k \in E_{Q_{l+1}}^-(e_l)$  contradiz  $e_j \parallel e_k$  em  $Q_l$ .

Sendo  $Q$  uma extensão arbórea de  $P$ , resta-nos provar que se  $B_n$  é um acréscimo lexicográfico de  $P$  relativo a  $(L, L')$  e  $B_n$  é arbóreo, então  $Q \subseteq B_n$ . Inicialmente,

mostraremos que  $N^-(e_i) \subseteq E_{B_i}^-(e_i)$ , para  $1 \leq i \leq n$ . Por definição, temos  $N^-(e_i) \subseteq E_{L'}^+(e_i)$ . Se  $e_j \in N^-(e_i)$  é um elemento maximal em  $B_{i-1}$  então  $(e_j, e_i) \in B_i$ , pela definição de acréscimo lexicográfico. Se  $e_j \in N^-(e_i)$  não é maximal, então existe um elemento maximal  $e_k \in E_{B_{i-1}}^+(e_j)$ . Visto que  $e_k \in M_{B_{i-1}}^+ \cap E_{L'}^+(e_i)$  temos  $(e_k, e_i) \in B_i$  e, por transitividade,  $(e_j, e_i) \in B_i$ . Portanto,  $(e_j, e_i) \in B_n$ . Desta forma, podemos concluir que  $P \cup N \subseteq B_n$ . Visto que  $B_n$  é transitiva, temos  $Q_{n+1} \subseteq B_n$ . Para  $i = n, \dots, 1$ , suponha  $Q_{i+1} \subseteq B_n$ . As relações em  $Q_i \setminus Q_{i+1}$  são as relações em  $R(e_i)$  necessárias para que  $E_{Q_{i+1}}^-(e_i)$  seja um conjunto totalmente ordenado em  $Q_i$  e as relações necessárias para que  $Q_i$  seja transitiva. Desta forma,  $Q$  constitui um conjunto de relações necessárias para que  $B_n$  seja uma extensão arbórea de  $P$ .  $\square$

Considere a seguinte recorrência.

$$D_0 = \emptyset \tag{13}$$

$$D_i = D_{i-1} \cup \{(e_i, e_i)\} \cup \{(e_q, e_i) \mid e_q \in \bar{S}_i \cup E_{D_{i-1}}^-[M_{D_{i-1}}^+ \cap E_{L'}^+(e_i)]\}, \tag{14}$$

onde  $\bar{S}_i$  é um ideal totalmente ordenado de  $D_{i-1}$  contendo  $E_Q^-(e_i)$ .

**Lema 3.2**  $D_n$  é um acréscimo lexicográfico arbóreo de  $P$ , relativo a  $(L, L')$ .

**Prova.** Mostraremos inicialmente que se  $\bar{S}_k$  é um ideal totalmente ordenado de  $D_{k-1}$  contendo  $E_Q^-(e_k)$ , para  $1 \leq k \leq i-1$ , então existe um ideal totalmente ordenado  $\bar{S}_i$  de  $D_{i-1}$  contendo  $E_Q^-(e_i)$ . Sabemos que  $M_{D_{k-1}}^+ \cap E_{L'}^+(e_k) \subseteq N^-(e_k)$ . Isto se deve ao fato de que se consideramos  $e_p = u_k$ ,  $e_j \in M_{D_{k-1}}^+ \cap E_{L'}^+(e_k)$  e  $e_j \notin N^-(e_k)$ , então  $e_j \in E_L^-(e_p)$  e  $e_j \in E_{L'}^+(e_p)$ . Visto que  $e_j \in M_{D_{k-1}}^+$ , temos  $e_j \in M_{D_{p-1}}^+ \cap E_{L'}^+(e_p)$ . Consequentemente,  $(e_j, e_p) \in D_p$ , contradizendo  $e_j$  ser maximal em  $D_{k-1}$ . Logo,  $M_{D_{k-1}}^+ \cap E_{L'}^+(e_k) \subseteq E_Q^-(e_k)$ , e  $M_{D_{k-1}}^+ \cap E_{L'}^+(e_k)$  é um conjunto totalmente ordenado em  $D_{k-1}$ . Seja  $e_q$  o elemento máximo em  $D_{i-1}[E_Q^-(e_i)]$ . Temos então  $E_{D_{i-1}}^-[e_q]$  um ideal totalmente ordenado de  $D_{i-1}$  contendo  $E_Q^-(e_i)$ .

Temos  $D_n$  um acréscimo lexicográfico de  $P$  relativo a  $(L, L')$  visto que  $\overline{S}_i$  é um ideal de  $D_{i-1}$  contendo  $E_Q^-(e_i)$  e  $E_P^-(e_i) \subseteq E_Q^-(e_i)$ , para  $i = 1, \dots, n$ . Além disso, visto que  $\overline{S}_i$  é totalmente ordenado,  $D_n$  é uma ordem arbórea.  $\square$

Observamos que no caso de  $M_{D_{i-1}}^+ \cap E_{L'}^+(e_i) \neq \emptyset$ , temos  $M_{D_{i-1}}^+ \cap E_{L'}^+(e_i) = \{e_{i-1}\}$ . Isto se deve ao fato de que se  $M_{D_{i-1}}^+ \cap E_{L'}^+(e_i) = \{e_h\}$  e  $e_h \neq e_{i-1}$ , então  $e_h \in M_{D_{i-2}}^+$ . Visto que  $e_{i-1}$  é maximal em  $D_{i-1}$ , temos  $e_{i-1} \notin E_{L'}^+(e_i)$ . Segue disto que  $(e_{i-1}, e_i) \in L'$ . Pelo fato de  $(e_i, e_h) \in L'$ , temos  $e_h \in E_{L'}^+(e_{i-1})$ . Logo,  $(e_h, e_{i-1}) \in D_{i-1}$ , contradizendo  $e_h$  ser maximal em  $D_{i-1}$ . De acordo com o Lema 3.2, temos  $M_{D_{i-1}}^+ \cap E_{L'}^+(e_i) \subseteq E_Q^-(e_i)$ . Conseqüentemente, na recorrência (13)–(14) podemos suprimir  $E_{D_{i-1}}^-[M_{D_{i-1}}^+ \cup E_{L'}^+(e_i)]$ , obtendo a seguinte recorrência.

$$D_0 = \emptyset \tag{15}$$

$$D_i = D_{i-1} \cup \{(e_i, e_i)\} \cup \{(e_q, e_i) \mid e_q \in \overline{S}_i\}, \tag{16}$$

onde  $\overline{S}_i$  é um ideal totalmente ordenado de  $D_{i-1}$  contendo  $E_Q^-(e_i)$ . Desta forma, a geração de todos os acréscimos lexicográficos arbóreos  $B_n$  de  $P$  relativos a  $(L, L')$  pode ser estabelecida.

**Teorema 3.1** *Se  $B_n$  é um acréscimo lexicográfico arbóreo de  $P$ , relativo a  $(L, L')$  obtido pela recorrência (3)–(4), então  $B_n$  é obtido pela recorrência (15)–(16).*

**Prova.** Temos  $S_i$  um ideal totalmente ordenado de  $B_{i-1}$  visto que, caso contrário,  $B_n$  não seria arbóreo. Pelo Lema 3.1, temos  $E_Q^-(e_i) \subseteq S_i$  pois as relações em  $Q$  são necessárias a qualquer acréscimo lexicográfico arbóreo  $B_n$  de  $P$  relativo a  $(L, L')$ . Logo  $S_i$  é um ideal totalmente ordenado de  $B_{i-1}$  contendo  $E_Q^-(e_i)$ , para  $i = 1, \dots, n$ .

$\square$

## 3.2 Geração de Extensões

Para a geração dos acréscimos lexicográficos arbóreos de  $P$  relativos a  $(L, L')$ , devemos construir  $Q$  (relativo a  $(L, L')$ ) para a posterior aplicação do procedimento recursivo implícito na recorrência (15)–(16). Inicialmente, a construção de  $P \cup N$  e o cálculo de seu fecho transitivo podem ser executados em tempo  $O(n^2)$  e  $O(mn)$ , respectivamente. Para  $i = n, \dots, 1$  devemos construir  $Q_{i+1} \cup R(e_i)$  e calcular seu fecho transitivo. A construção de  $Q_{i+1} \cup R(e_i)$  pode ser executada em tempo  $O(n^2)$ , enquanto que seu fecho transitivo pode ser obtido em tempo  $O(nm_i)$ , onde  $m_i = |Q_{i+1} \cup R(e_i)|$ . Portanto, através da aplicação direta do algoritmo em [27], temos que  $Q$  pode ser construída em tempo  $O(n^3 + n^2m')$ , onde  $m' = |Q|$ .

Após a construção de  $Q$ , o procedimento recursivo implícito requer a geração dos ideais totalmente ordenados  $\overline{S}_i$  em  $D_{i-1}$  contendo  $E_Q^-(e_i)$ , como apresentado nas Figuras 3.1(a) e 3.1(b). Observamos que devemos ter  $E_{D_{i-1}}^-[e_q] \subseteq \overline{S}_i$  e  $\overline{S}_i \subseteq E_{D_{i-1}}^-[e_q] \cup E_{D_{i-1}}^+(e_q)$ , onde  $e_q$  é o elemento máximo de  $D_{i-1}[E_Q^-(e_i)]$ . Portanto, podemos gerar os ideais totalmente ordenados  $\overline{S}'_i$  de  $D_{i-1}[E_{D_{i-1}}^+(e_q)]$  e definirmos  $\overline{S}_i = E_{D_{i-1}}^-[e_q] \cup \overline{S}'_i$ . Tal geração pode ser executada em tempo constante por ideal se partimos do digrafo cobertura  $G_c(D_{i-1}[E_{D_{i-1}}^+(e_q)])$  de  $D_{i-1}[E_{D_{i-1}}^+(e_q)]$ . Consequentemente, considerando como operação dominante a construção de  $Q$ , a qual possui  $O(n^2)$  relações, podemos implementar o procedimento de geração das extensões arbóreas de  $P$  em tempo  $O(n^4)$  por extensão.

**Algoritmo:** GERAEXT-ARBOREAS( $P$ )

Seja  $L' \in \varepsilon_1(P)$

**Para** cada extensão linear  $L \in \varepsilon_1(P)$  **Faça**

Gere  $Q$

EXT-ARBOREAS( $\emptyset, 1, L, Q$ )

Figura 3.1(a): Geração de extensões arbóreas baseada nos Teoremas 2.15 e 3.1.

**Algoritmo:** EXT-ARBOREAS( $D_{i-1}, i, L, Q$ )

**Se**  $i > n$  **Então**

Enumere  $D_{i-1}$

**Senão**

**Se**  $E_Q^-(e_i) \neq \emptyset$  **Então**

$e_q :=$  elemento máximo de  $D_{i-1}[E_Q^-(e_i)]$

$D'_{i-1} := D_{i-1}[E_{D_{i-1}}^+(e_q)]$

$S''_i := E_{D'_{i-1}}^-(e_q)$

**Senão**

$D'_{i-1} := D_{i-1}$

$S''_i := \emptyset$

**Para** cada ideal totalmente ordenado  $S'_i$  de  $D'_{i-1}$  **Faça**

$S_i := S'_i \cup S''_i$

$D_i := D_{i-1} \cup \{(e_i, e_i)\} \cup \{(e_j, e_i) | e_j \in S_i\}$

EXT-ARBOREAS( $D_i, i + 1, L, Q$ )

Figura 3.1(b): Geração de extensões arbóreas baseada nos Teoremas 2.15 e 3.1.

Como um exemplo, consideraremos a ordem  $P$  apresentada na Figura 3.2.

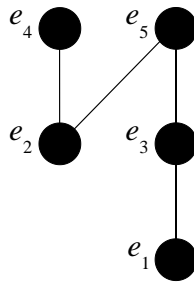


Figura 3.2: Ordem  $P$ .

As extensões lineares de  $P$  são:

$$\begin{aligned}
L_1 &= [e_1, e_2, e_4, e_3, e_5], \\
L_2 &= [e_1, e_2, e_3, e_4, e_5], \\
L_3 &= [e_1, e_3, e_2, e_4, e_5], \\
L_4 &= [e_1, e_3, e_2, e_5, e_4], \\
L_5 &= [e_1, e_2, e_3, e_5, e_4], \\
L_6 &= [e_2, e_1, e_3, e_5, e_4], \\
L_7 &= [e_2, e_1, e_3, e_4, e_5], \\
L_8 &= [e_2, e_1, e_4, e_3, e_5], \\
L_9 &= [e_2, e_4, e_1, e_3, e_5].
\end{aligned}$$

A ordem  $P$  possui 39 extensões, das quais 15 são extensões arbóreas. As Figuras 3.3(a), 3.3(b) e 3.3(c) apresentam as extensões de  $P$  obtidas pela aplicação da recorrência (15)–(16), considerando-se  $L_2$  uma extensão linear fixa de  $P$ . Para cada extensão linear  $L$  de  $P$ , é apresentada a ordem  $Q$  relativa a  $(L, L')$ . Nas Figuras 3.4(a) e 3.4(b) são apresentados os diagramas de Hasse das Extensões 1–15.

$(L_1, L_2)$		$L_1 = [e_1, e_2, e_4, e_3, e_5]$				
	$E_Q^-(e_1)$	$E_Q^-(e_2)$	$E_Q^-(e_4)$	$E_Q^-(e_3)$	$E_Q^-(e_5)$	
	$\emptyset$	$\{e_1\}$	$\{e_1, e_2\}$	$\{e_1, e_2, e_4\}$	$\{e_1, e_2, e_4, e_3\}$	
	$E_{D_1}^-(e_1)$	$E_{D_2}^-(e_2)$	$E_{D_3}^-(e_4)$	$E_{D_4}^-(e_3)$	$E_{D_5}^-(e_5)$	
1.	$\emptyset$	$\{e_1\}$	$\{e_1, e_2\}$	$\{e_1, e_2, e_4\}$	$\{e_1, e_2, e_4, e_3\}$	
$(L_2, L_2)$		$L_2 = [e_1, e_2, e_3, e_4, e_5]$				
	$E_Q^-(e_1)$	$E_Q^-(e_2)$	$E_Q^-(e_3)$	$E_Q^-(e_4)$	$E_Q^-(e_5)$	
	$\emptyset$	$\{e_1\}$	$\{e_1, e_2\}$	$\{e_1, e_2\}$	$\{e_1, e_2, e_3\}$	
	$E_{D_1}^-(e_1)$	$E_{D_2}^-(e_2)$	$E_{D_3}^-(e_3)$	$E_{D_4}^-(e_4)$	$E_{D_5}^-(e_5)$	
2.	$\emptyset$	$\{e_1\}$	$\{e_1, e_2\}$	$\{e_1, e_2\}$	$\{e_1, e_2, e_3\}$	
3.				$\{e_1, e_2, e_3\}$	$\{e_1, e_2, e_3\}$	
4.					$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$	

Figura 3.3 (a): Geração de extensões arbóreas de  $P$ .

---

	$(L_3, L_2)$	$L_3 = [e_1, e_3, e_2, e_4, e_5]$				
	$E_Q^-(e_1)$	$E_Q^-(e_3)$	$E_Q^-(e_2)$	$E_Q^-(e_4)$	$E_Q^-(e_5)$	
	$\emptyset$	$\{e_1\}$	$\{e_1, e_3\}$	$\{e_1, e_3, e_2\}$	$\{e_1, e_3, e_2\}$	
5.	$E_{D_1}^-(e_1)$	$E_{D_2}^-(e_3)$	$E_{D_3}^-(e_2)$	$E_{D_4}^-(e_4)$	$E_{D_5}^-(e_5)$	
6.	$\emptyset$	$\{e_1\}$	$\{e_1, e_3\}$	$\{e_1, e_3, e_2\}$	$\{e_1, e_3, e_2\}$	
			$\{e_1, e_3\}$	$\{e_1, e_3, e_2\}$	$\{e_1, e_3, e_2, e_4\}$	

---

	$(L_4, L_2)$	$L_4 = [e_1, e_3, e_2, e_5, e_4]$				
	$E_Q^-(e_1)$	$E_Q^-(e_3)$	$E_Q^-(e_2)$	$E_Q^-(e_5)$	$E_Q^-(e_4)$	
	$\emptyset$	$\{e_1\}$	$\{e_1, e_3\}$	$\{e_1, e_3, e_2\}$	$\{e_1, e_3, e_2, e_5\}$	
7.	$E_{D_1}^-(e_1)$	$E_{D_2}^-(e_3)$	$E_{D_3}^-(e_2)$	$E_{D_4}^-(e_5)$	$E_{D_5}^-(e_4)$	
	$\emptyset$	$\{e_1\}$	$\{e_1, e_3\}$	$\{e_1, e_3, e_2\}$	$\{e_1, e_3, e_2, e_5\}$	

---

	$(L_5, L_2)$	$L_5 = [e_1, e_2, e_3, e_5, e_4]$				
	$E_Q^-(e_1)$	$E_Q^-(e_2)$	$E_Q^-(e_3)$	$E_Q^-(e_5)$	$E_Q^-(e_4)$	
	$\emptyset$	$\{e_1\}$	$\{e_1, e_2\}$	$\{e_1, e_2, e_3\}$	$\{e_1, e_2, e_3, e_5\}$	
8.	$E_{D_1}^-(e_1)$	$E_{D_2}^-(e_2)$	$E_{D_3}^-(e_3)$	$E_{D_4}^-(e_5)$	$E_{D_5}^-(e_4)$	
	$\emptyset$	$\{e_1\}$	$\{e_1, e_2\}$	$\{e_1, e_2, e_3\}$	$\{e_1, e_2, e_3, e_5\}$	

---

	$(L_6, L_2)$	$L_6 = [e_2, e_1, e_3, e_5, e_4]$				
	$E_Q^-(e_2)$	$E_Q^-(e_1)$	$E_Q^-(e_3)$	$E_Q^-(e_5)$	$E_Q^-(e_4)$	
	$\emptyset$	$\{e_2\}$	$\{e_2, e_1\}$	$\{e_2, e_1, e_3\}$	$\{e_2, e_1, e_3, e_5\}$	
9.	$E_{D_1}^-(e_2)$	$E_{D_2}^-(e_1)$	$E_{D_3}^-(e_3)$	$E_{D_4}^-(e_5)$	$E_{D_5}^-(e_4)$	
	$\emptyset$	$\{e_2\}$	$\{e_2, e_1\}$	$\{e_2, e_1, e_3\}$	$\{e_2, e_1, e_3, e_5\}$	

---

	$(L_7, L_2)$	$L_7 = [e_2, e_1, e_3, e_4, e_5]$				
	$E_Q^-(e_2)$	$E_Q^-(e_1)$	$E_Q^-(e_3)$	$E_Q^-(e_4)$	$E_Q^-(e_5)$	
	$\emptyset$	$\{e_2\}$	$\{e_2, e_1\}$	$\{e_2\}$	$\{e_2, e_1, e_3\}$	
10.	$E_{D_1}^-(e_2)$	$E_{D_2}^-(e_1)$	$E_{D_3}^-(e_3)$	$E_{D_4}^-(e_4)$	$E_{D_5}^-(e_5)$	
11.	$\emptyset$	$\{e_2\}$	$\{e_2, e_1\}$	$\{e_2\}$	$\{e_2, e_1, e_3\}$	
12.				$\{e_2, e_1\}$	$\{e_2, e_1, e_3\}$	
13.				$\{e_2, e_1, e_3\}$	$\{e_2, e_1, e_3, e_4\}$	

---

Figura 3.3 (b): Geração de extensões arbóreas de  $P$ .

---

$(L_8, L_2)$	$L_8 = [e_2, e_1, e_4, e_3, e_5]$				
	$E_Q^-(e_2)$	$E_Q^-(e_1)$	$E_Q^-(e_4)$	$E_Q^-(e_3)$	$E_Q^-(e_5)$
	$\emptyset$	$\{e_2\}$	$\{e_2, e_1\}$	$\{e_2, e_1, e_4\}$	$\{e_2, e_1, e_4, e_3\}$
	$E_{D_1}^-(e_2)$	$E_{D_2}^-(e_1)$	$E_{D_3}^-(e_4)$	$E_{D_4}^-(e_3)$	$E_{D_5}^-(e_5)$
14.	$\emptyset$	$\{e_2\}$	$\{e_2, e_1\}$	$\{e_2, e_1, e_4\}$	$\{e_2, e_1, e_4, e_3\}$

---

$(L_9, L_2)$	$L_9 = [e_2, e_4, e_1, e_3, e_5]$				
	$E_Q^-(e_2)$	$E_Q^-(e_4)$	$E_Q^-(e_1)$	$E_Q^-(e_3)$	$E_Q^-(e_5)$
	$\emptyset$	$\{e_2\}$	$\{e_2, e_4\}$	$\{e_2, e_4, e_1\}$	$\{e_2, e_4, e_1, e_3\}$
	$E_{D_1}^-(e_2)$	$E_{D_2}^-(e_4)$	$E_{D_3}^-(e_1)$	$E_{D_4}^-(e_3)$	$E_{D_5}^-(e_5)$
15.	$\emptyset$	$\{e_2\}$	$\{e_2, e_4\}$	$\{e_2, e_4, e_1\}$	$\{e_2, e_4, e_1, e_3\}$

---

Figura 3.3 (c): Geração de extensões arbóreas de  $P$ .

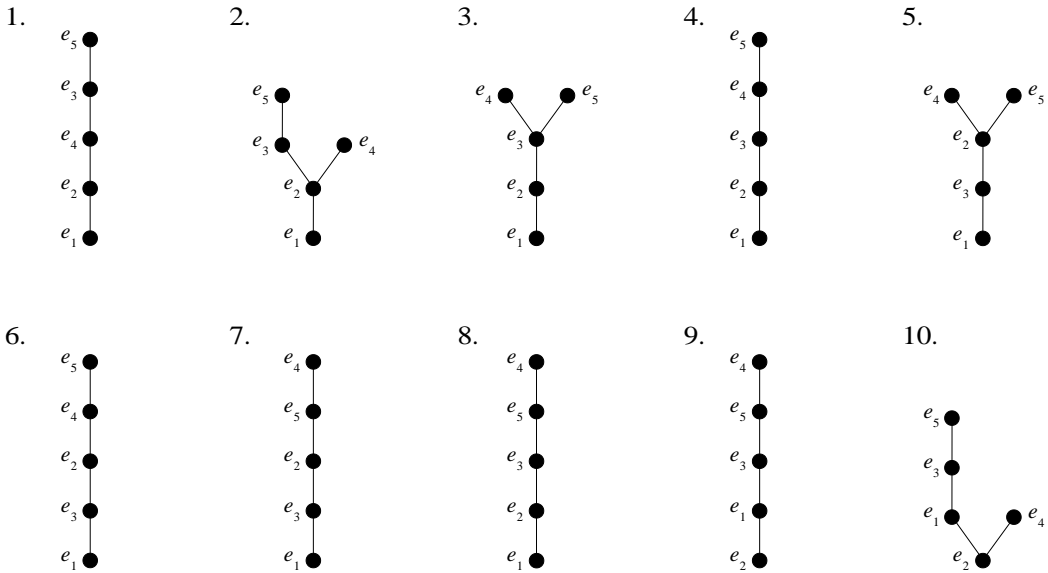


Figura 3.4 (a): Extensões arbóreas de  $P$ .

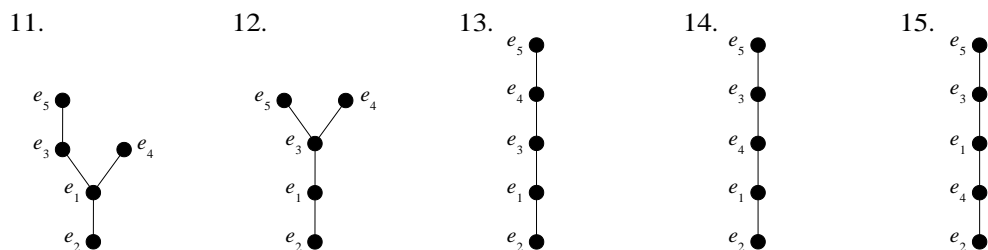


Figura 3.4 (b): Extensões arbóreas de  $P$ .

Observamos que em [57] é apresentado um algoritmo para a geração de extensões florestas de uma ordem  $P$ , *i.e* extensões cujos diagramas de Hasse são grafos acíclicos. Tal algoritmo requer tempo  $O(n^2)$  por extensão gerada após um pré-processamento em tempo  $O(nm)$ .

# Capítulo 4

## Extensões Ordens Fracas

### 4.1 Caracterização de Extensões Ordens Fracas

Como uma segunda aplicação da caracterização de  $\varepsilon(P)$  em [12], será apresentado neste capítulo um procedimento para a geração de extensões ordens fracas  $P'$  de uma dada ordenação parcial  $P$ . Para o seguinte teorema, consideramos  $S_i$  um ideal de  $B_{i-1}$  contendo  $E_P^-(e_i)$  e  $S'_i = E_{B_{i-1}}^-[M_{B_{i-1}}^+ \cap E_{L'}^+(e_i)]$ .

**Teorema 4.1** *Seja  $B_{i-1}$  um acréscimo lexicográfico de  $P_{i-1}$  relativo a  $(L_{i-1}, L'[E_{i-1}])$ , e considere  $B_{i-1}$  uma ordem fraca. Então  $B_i$  é uma ordem fraca se e somente se ou  $S_i \cup S'_i = E_{i-1}$ , ou  $S_i \cup S'_i = E_{i-1} \setminus M_{B_{i-1}}^+$ .*

**Prova.** Seja  $B_{i-1}$  uma ordem fraca, e  $S_i \cup S'_i = E_{i-1}$  ou  $S_i \cup S'_i = E_{i-1} \setminus M_{B_{i-1}}^+$ . Suponha que  $B_i$  não seja uma ordem fraca. Neste caso, podemos ter

- (i)  $(e_j, e_k) \in B_i$ ,  $e_j \parallel e_i$  e  $e_k \parallel e_i$  em  $B_i$ , ou
- (ii)  $(e_j, e_i) \in B_i$ ,  $e_j \parallel e_k$  e  $e_i \parallel e_k$  em  $B_i$

como uma subestrutura proibida para ordens fracas em  $B_i$ .

Se  $S_i \cup S'_i = E_{i-1}$  então  $(e_k, e_i) \in B_i$  e, portanto, não podemos ter em  $B_i$  as subestruturas descritas em (i) e (ii). Seja  $S_i \cup S'_i = E_{i-1} \setminus M_{B_{i-1}}^+$ . Supondo

a subestrutura em (i),  $(e_j, e_k) \in B_i$  implica  $e_j \in E_{i-1} \setminus M_{B_{i-1}}^+$  e, portanto, não podemos ter  $e_j \parallel e_i$  em  $B_i$ . Supondo a subestrutura em (ii), temos  $e_j \in E_{i-1} \setminus M_{B_{i-1}}^+$  e  $e_k \in M_{B_{i-1}}^+$ . Visto que  $e_j \parallel e_k$  em  $B_{i-1}$ , existe  $e_l \in M_{B_{i-1}}^+$  tal que  $(e_j, e_l) \in B_{i-1}$ . É fácil ver que  $(e_l, e_k) \notin B_{i-1}$  pois, caso contrário, teríamos  $(e_j, e_k) \in B_{i-1}$  por transitividade. Além disso, temos  $(e_k, e_l) \notin B_{i-1}$  pois  $e_k \in M_{B_{i-1}}^+$ . Portanto,  $(e_j, e_l) \in B_{i-1}$ ,  $e_k \parallel e_j$  e  $e_k \parallel e_l$  formam uma subestrutura proibida para ordens fracas em  $B_{i-1}$ .

Por outro lado, suponha  $B_{i-1}$  e  $B_i$  ordens fracas, com  $S_i \cup S'_i \neq E_{i-1}$  e  $S_i \cup S'_i \neq E_{i-1} \setminus M_{B_{i-1}}^+$ . Podemos ter uma das seguintes possibilidades:

(a)  $(S_i \cup S'_i) \cap M_{B_{i-1}}^+ = \emptyset$ , ou

(b)  $(S_i \cup S'_i) \cap M_{B_{i-1}}^+ \neq \emptyset$ .

No primeiro caso, existem  $e_j \in E_{i-1} \setminus M_{B_{i-1}}^+$  e  $e_k \in M_{B_{i-1}}^+$  tais que  $(e_j, e_k) \in B_{i-1}$  e  $e_j, e_k \notin S_i \cup S'_i$ . Portanto, temos uma subestrutura proibida para ordens fracas em  $B_i$ . No segundo caso, sabemos que se  $M_{B_{i-1}}^+ \subseteq S_i \cup S'_i$ , então  $S_i \cup S'_i = E_{i-1}$ . Por tal fato, suponha  $e_j, e_k \in M_{B_{i-1}}^+$  tais que  $e_j \in S_i \cup S'_i$  e  $e_k \notin S_i \cup S'_i$ . Temos  $(e_j, e_i)$ ,  $e_k \parallel e_i$  e  $e_k \parallel e_j$  formando uma subestrutura proibida para ordens fracas em  $B_i$ .  $\square$

Supondo uma ordem fraca  $P$ , temos  $E_P^+(e_j) = E_P^+(e_k)$  e  $E_P^-(e_j) = E_P^-(e_k)$  para qualquer par de elementos incomparáveis  $e_j, e_k \in E$ . Além disso, podemos representar  $P$  por  $k$  anticadeias  $A_1, \dots, A_k$  de alturas  $1, \dots, k$ , respectivamente. Desta forma, a geração de ordens fracas baseada na caracterização de  $\varepsilon(P)$  apresentada em [12] pode ser interpretada como a inserção do elemento maximal  $e_i$  na anticadeia de altura máxima  $M_{B_{i-1}}^+$  de  $B_{i-1}$  ou na criação de uma anticadeia  $M_{B_i}^+$  em  $B_i$  formada apenas por  $e_i$ .

## 4.2 Geração de Extensões

Visto que a propriedade de uma ordem ser fraca é hereditária, devemos ter  $B_1, \dots, B_{i-1}$  ordens fracas para que  $B_i$  seja uma ordem fraca. Desta forma, considerando

$$S_i = \begin{cases} E_{i-1}, & \text{se } E_P^-(e_i) \cap M_{B_{i-1}}^+ \neq \emptyset \\ E_{i-1} \text{ ou } E_{i-1} \setminus M_{B_{i-1}}^+, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e

$$S'_i = \begin{cases} E_{i-1}, & \text{se } E_{L'}^+(e_i) \cap M_{B_{i-1}}^+ \neq \emptyset \\ E_{i-1} \text{ ou } E_{i-1} \setminus M_{B_{i-1}}^+, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

para todo  $1 \leq i \leq n$ , a recorrência (3)–(4) pode ser aplicada para a geração de todas as extensões ordens fracas de  $P$ .

**Algoritmo:** GERAEXT-ORDENS-FRACAS( $P$ )

Seja  $L' \in \varepsilon_1(P)$

**Para** cada extensão linear  $L$  de  $P$  **Faça**

EXT-ORDENS-FRACAS( $\emptyset, 1, L, L'$ )

**Algoritmo:** EXT-ORDENS-FRACAS( $B_{i-1}, i, L, L'$ )

**Se**  $i > n$  **Então**

Enumere  $B_{i-1}$

**Senão**

**Se**  $E_P^-(e_i) \cap M_{B_{i-1}}^+ = \emptyset$  **e**  $E_{L'}^+(e_i) \cap M_{B_{i-1}}^+ = \emptyset$  **Então**

$B_i := B_{i-1} \cup \{(e_i, e_i)\} \cup \{(e_j, e_i) \mid e_j \in E_{i-1} \setminus M_{B_{i-1}}^+\}$

EXT-ORDENS-FRACAS( $B_i, i+1, L, L'$ )

$B_i := B_{i-1} \cup \{(e_i, e_i)\} \cup \{(e_j, e_i) \mid e_j \in E_{i-1}\}$

EXT-ORDENS-FRACAS( $B_i, i+1, L, L'$ )

Figura 4.1: Geração de extensões ordens fracas baseada nos Teoremas 2.15 e 4.1.

Observamos que as verificações  $E_P^-(e_i) \cap M_{B_{i-1}}^+ \neq \emptyset$  e  $E_{L'}^+(e_i) \cap M_{B_{i-1}}^+ \neq \emptyset$  podem ser efetuadas em tempo linear. Portanto, com a aplicação da recorrência (3)–(4), a geração das extensões ordens fracas de  $P$  pode ser executada em tempo  $O(n^2)$  por extensão.

Como exemplo, consideraremos a ordem  $P$  apresentada na Figura 4.2.

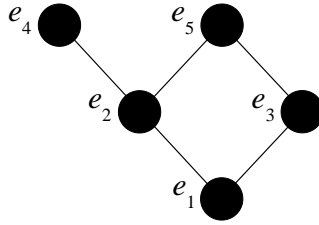


Figura 4.2: Ordem  $P$ .

As extensões lineares de  $P$  são:

$$L_1 = [e_1, e_2, e_4, e_3, e_5],$$

$$L_2 = [e_1, e_2, e_3, e_4, e_5],$$

$$L_3 = [e_1, e_2, e_3, e_5, e_4],$$

$$L_4 = [e_1, e_3, e_2, e_5, e_4],$$

$$L_5 = [e_1, e_3, e_2, e_4, e_5].$$

A ordenação parcial  $P$  possui 14 extensões, das quais 3 não são ordens fracas:

$$P' = P$$

$$P'' = \{(e_1, e_2), (e_1, e_3), (e_1, e_4), (e_2, e_4), (e_1, e_5), (e_2, e_5), (e_3, e_5), (e_4, e_5)\},$$

$$P''' = \{(e_1, e_2), (e_1, e_3), (e_2, e_3), (e_1, e_4), (e_2, e_4), (e_1, e_5), (e_2, e_5), (e_3, e_5)\}.$$

As subestruturas proibidas para ordens fracas em tais extensões são compostas, respectivamente, por  $\{\{e_2, e_4\}, \{e_3\}\}$ ,  $\{\{e_2, e_4\}, \{e_3\}\}$ , e  $\{\{e_3, e_5\}, \{e_4\}\}$ .

As Figuras 4.3(a) e 4.3(b) apresentam as extensões ordens fracas de  $P$  obtidas pela aplicação do algoritmo descrito na Figura 4.1, considerando-se  $L_2$  uma extensão linear fixa de  $P$ . Na geração dos acréscimos lexicográficos de  $P$  relativos a  $(L_2, L_2)$ , se  $B_3 = \{(e_1, e_2), (e_1, e_3)\}$  e  $E_{B_4}^-(e_4) = \{e_1, e_2\}$ , então temos  $E_{B_4}^-(e_4) \neq E_3$  e  $E_{B_4}^-(e_4) \neq E_3 \setminus M_{B_3}^+$ . Se  $B_4 = \{(e_1, e_2), (e_1, e_3), (e_1, e_4), (e_2, e_3), (e_2, e_4)\}$  e  $E_{B_5}^-(e_5) = \{e_1, e_2, e_3\}$ , temos  $E_{B_5}^-(e_5) \neq E_4$  e  $E_{B_5}^-(e_5) \neq E_4 \setminus M_{B_4}^+$ . Tais situações correspondem às extensões não geradas pelo método descrito. Na Figura 4.4 são apresentados os diagramas de Hasse das Extensões 1–11.

$(L_1, L_2)$		$L_1 = [e_1, e_2, e_4, e_3, e_5]$				
	$E_{B_1}^-(e_1)$	$E_{B_2}^-(e_2)$	$E_{B_3}^-(e_4)$	$E_{B_4}^-(e_3)$	$E_{B_5}^-(e_5)$	
1.	$\emptyset$	$\{e_1\}$	$\{e_1, e_2\}$	$\{e_1, e_2, e_4\}$	$\{e_1, e_2, e_4, e_3\}$	
$(L_2, L_2)$		$L_2 = [e_1, e_2, e_3, e_4, e_5]$				
	$E_{B_1}^-(e_1)$	$E_{B_2}^-(e_2)$	$E_{B_3}^-(e_3)$	$E_{B_4}^-(e_4)$	$E_{B_5}^-(e_5)$	
2.	$\emptyset$	$\{e_1\}$	$\{e_1\}$	$\{e_1, e_2, e_3\}$	$\{e_1, e_2, e_3\}$	
3.					$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$	
4.			$\{e_1, e_2\}$	$\{e_1, e_2\}$	$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$	
5.				$\{e_1, e_2, e_3\}$	$\{e_1, e_2, e_3\}$	
6.					$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$	
$(L_3, L_2)$		$L_3 = [e_1, e_2, e_3, e_5, e_4]$				
	$E_{B_1}^-(e_1)$	$E_{B_2}^-(e_2)$	$E_{B_3}^-(e_3)$	$E_{B_4}^-(e_5)$	$E_{B_5}^-(e_4)$	
7.	$\emptyset$	$\{e_1\}$	$\{e_1\}$	$\{e_1, e_2, e_3\}$	$\{e_1, e_2, e_3, e_5\}$	
8.			$\{e_1, e_2\}$	$\{e_1, e_2, e_3\}$	$\{e_1, e_2, e_3, e_5\}$	
$(L_4, L_2)$		$L_4 = [e_1, e_3, e_2, e_5, e_4]$				
	$E_{B_1}^-(e_1)$	$E_{B_2}^-(e_3)$	$E_{B_3}^-(e_2)$	$E_{B_4}^-(e_5)$	$E_{B_5}^-(e_4)$	
9.	$\emptyset$	$\{e_1\}$	$\{e_1, e_3\}$	$\{e_1, e_3, e_2\}$	$\{e_1, e_3, e_2, e_5\}$	

Figura 4.3 (a): Geração de extensões ordens fracas de  $P$ .

$(L_5, L_2)$	$L_5 = [e_1, e_3, e_2, e_4, e_5]$				
	$E_{B_1}^-(e_1)$	$E_{B_2}^-(e_3)$	$E_{B_3}^-(e_2)$	$E_{B_4}^-(e_4)$	$E_{B_5}^-(e_5)$
10.	$\emptyset$	$\{e_1\}$	$\{e_1, e_3\}$	$\{e_1, e_3, e_2\}$	$\{e_1, e_3, e_2\}$
11.					$\{e_1, e_3, e_2, e_4\}$

Figura 4.3 (b): Geração de extensões ordens fracas de  $P$ .

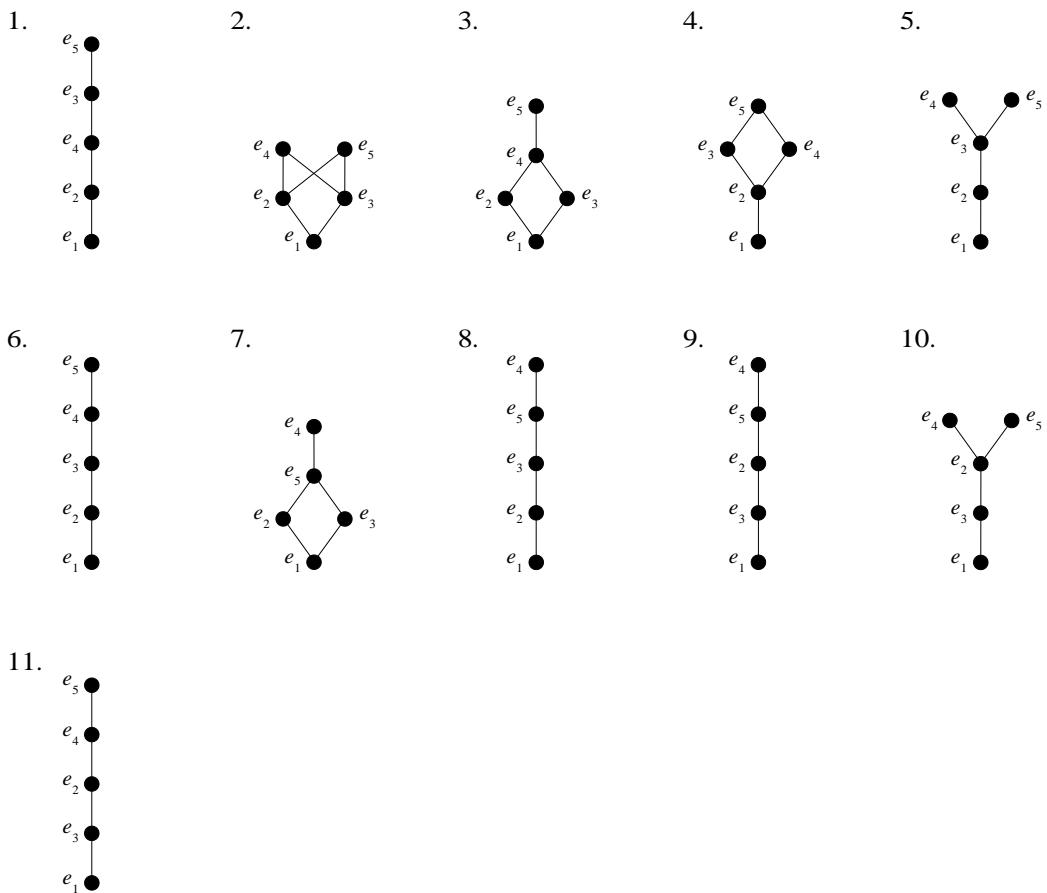


Figura 4.4: Extensões ordens fracas de  $P$ .

Em [6] são apresentados por Bertet, Gustedt e Morvan algoritmos para a geração de extensões ordens fracas de uma ordem  $P$ . Para tais algoritmos, é inicialmente

definido um grafo  $WE(P) = (A_P, E_{we})$ , onde  $A_P$  é o conjunto das anticadeias de  $P$ . Para a definição do conjunto de arestas de  $WE(P)$ , se consideramos  $A$  e  $A'$  duas anticadeias distintas de  $P$ , temos  $(A, A') \in E_{we}$  se e somente se valem

$$(i) A \subseteq E_P^-[A'], \text{ e}$$

$$(ii) A' \setminus A = E_P^-[A'] \setminus E_P^-[A].$$

Bertet, Gustedt e Morvan mostraram uma correspondência 1-1 entre todos os caminhos de  $WE(P)$  da única fonte ao único sumidouro e todas as extensões ordens fracas de  $P$ . Além disso, com uma modificação da definição das arestas de  $WE(P)$  de forma que  $(A, A') \in E_{we}$  se e somente se

$$(i) A \subseteq E_P^-[A'], \text{ e}$$

$$(ii) A' \setminus A \subseteq M_{P[E \setminus E_P^-[A]]}^-,$$

é mostrado que as extensões ordens fracas de  $P$  podem ser geradas em tempo  $O(n_w \Delta + m)$  e espaço  $O(m)$ , onde  $m$  é o número de comparabilidades da redução transitiva de  $P$ ,  $n_w$  é o número de extensões ordens fracas, e  $\Delta$  é o número máximo de sucessores imediatos dos elementos de  $P$ .

Com o cômputo do digrafo  $WE(P)$ , explicitamente, é apresentado em [6] um método de geração das extensões ordens fracas de  $P$ , o qual requer tempo  $O(m'w \log n + n_w)$  e espaço  $O(wn' + m')$ , onde  $n'$  é o número de nós de  $WE(P)$ ,  $m'$  é o número de arcos de  $WE(P)$ , e  $w$  a largura de  $P$ . Para a geração de extensões ordens fracas minimais de  $P$  — ou seja, extensões ordens fracas  $Q$  tais que não existe extensão ordem fraca  $Q'$  de  $P$  com  $Q' \subset Q$  — é apresentado um algoritmo o qual requer tempo  $O(n_{wm}(w^3 + m))$  e espaço  $O(m)$ , onde  $n_{wm}$  é o número de extensões ordens fracas minimais de  $P$ . Além de resultados estruturais e de geração, em [6] é mostrado que o número  $n_w$  de extensões ordens fracas de  $P$  é uma invariante de comparabilidade, enquanto o número  $n_{wm}$  de extensões ordens fracas minimais de  $P$  não é uma invariante de comparabilidade.

# Capítulo 5

## Extensões Intervalares

### 5.1 Caracterização de Extensões Intervalares

Neste capítulo será apresentada uma aplicação da segunda caracterização de  $\varepsilon(P)$  em [12] para a geração de extensões intervalares  $P'$  de uma dada ordem  $P$ . Considerando  $B_{i-1}$  um acréscimo lexicográfico de  $P_{i-1}$  relativo a  $(L_{i-1}, L'[E_{i-1}])$ , definimos uma ordem  $C_{i-1}$  em  $E_{i-1}$  tal que, para  $e_j \neq e_k$  temos  $(e_j, e_k) \in C_{i-1}$  se e somente se  $E_{B_{i-1}}^+(e_j) \supset E_{B_{i-1}}^+(e_k)$ . Para  $e_j \in E_{i-1}$  consideramos  $(e_j, e_j) \in C_{i-1}$ .

Observamos que se  $S_i$  é um ideal de  $C_{i-1}$  então  $S_i$  é um ideal de  $B_{i-1}$ . Este fato pode ser mostrado como segue. Se supomos o contrário, considerando  $e_j \notin S_i$ ,  $e_k \in S_i$  e  $(e_j, e_k) \in B_{i-1}$ , temos  $E_{B_{i-1}}^+(e_k) \subset E_{B_{i-1}}^+(e_j)$ . Consequentemente,  $(e_j, e_k) \in C_{i-1}$ , o que contradiz  $S_i$  ser um ideal de  $C_{i-1}$ . Observamos que se  $P = B_n$  é intervalar, então temos  $B_n \subseteq C_n \subseteq P_*$ . Para o próximo teorema, seja  $S_i$  um ideal de  $B_{i-1}$  contendo  $E_P^-(e_i)$  e  $S'_i = E_{B_{i-1}}^-[M_{B_{i-1}}^+ \cap E_{L'}^+(e_i)]$ .

**Teorema 5.1** *Seja  $B_{i-1}$  um acréscimo lexicográfico de  $P_{i-1}$  relativo a  $(L_{i-1}, L'[E_{i-1}])$ , e considere  $B_{i-1}$  intervalar. Então  $B_i$  é intervalar se e somente se  $S_i \cap S'_i$  é um ideal de  $C_{i-1}$ .*

**Prova.** Seja  $B_i$  intervalar. Suponha que  $S_i \cap S'_i$  não seja um ideal de  $C_{i-1}$ . Neste

caso, existem  $e_j, e_k \in E_{i-1}$  tais que  $(e_j, e_k) \in C_{i-1}$ ,  $e_j \notin S_i \cap S'_i$ , e  $e_k \in S_i \cap S'_i$ . Visto que  $(e_j, e_k) \in C_{i-1}$ , temos  $E_{B_{i-1}}^+(e_j) \supset E_{B_{i-1}}^+(e_k)$  e existe  $e_l \in E_{B_{i-1}}^+(e_j) \setminus E_{B_{i-1}}^+(e_k)$ . Isto é,  $(e_j, e_l) \in B_{i-1}$ , e  $(e_k, e_l) \notin B_{i-1}$ . Observamos que  $(e_l, e_k) \notin B_{i-1}$ , caso contrário estaríamos contradizendo  $S_i \cap S'_i$  ser um ideal em  $B_{i-1}$ . Visto que  $e_k \in S_i \cap S'_i$ , temos  $(e_k, e_i) \in B_i$ . Sabemos que  $(e_j, e_i) \notin B_i$ . Logo  $(e_l, e_i) \notin B_i$ . Sabemos que  $(e_k, e_j) \notin B_i$ . Caso contrário, teríamos  $E_{B_{i-1}}^+(e_j) \subset E_{B_{i-1}}^+(e_k)$ . Além disso,  $(e_j, e_k) \notin B_{i-1}$  visto que, caso contrário, estaríamos contradizendo  $S_i \cap S'_i$  ser um ideal em  $B_{i-1}$ . Logo  $(e_j, e_l), (e_k, e_i) \in B_i$  formam uma subestrutura proibida para ordens intervalares, contradizendo  $B_i$  ser intervalar.

Por outro lado, suponha que  $S_i \cap S'_i$  seja um ideal em  $C_{i-1}$  porém  $B_i$  não seja intervalar. Neste caso, existem  $e_j, e_k, e_l \in E_{i-1}$  tais que  $(e_j, e_l), (e_k, e_i) \in B_i$  formam uma subestrutura proibida. Sabemos que  $e_l \in E_{B_{i-1}}^+(e_j)$ , e  $e_l \notin E_{B_{i-1}}^+(e_k)$ . Visto que  $B_{i-1}$  é intervalar, temos  $E_{B_{i-1}}^+(e_k) \subset E_{B_{i-1}}^+(e_j)$ . Logo  $(e_j, e_k) \in C_{i-1}$ . Pelo fato de  $S_i \cap S'_i$  ser um ideal em  $C_{i-1}$ , temos  $e_j \in S_i \cap S'_i$ . Consequentemente,  $(e_j, e_i) \in B_i$ , contradizendo a subestrutura proibida em  $B_i$  formada por  $e_i, e_j, e_k, e_l$ .  $\square$

Pela Proposição 2.4 (ver [37] e [58]), se  $B_i$  é uma ordem de intervalo então temos  $E_{B_i}^+(e_j) \subseteq E_{B_i}^+(e_k)$  ou  $E_{B_i}^+(e_k) \subseteq E_{B_i}^+(e_j)$ , para todo  $e_j, e_k \in E_i$ . Desta forma, a ordem  $C_i$  pode ser interpretada como a cadeia de vizinhanças de saída dos elementos em  $B_i$ . Na Seção 5.2 é apresentado um método de geração das extensões intervalares de  $P$ , baseado nos Teoremas 2.15 e 5.1.

## 5.2 Geração de Extensões

Para a geração de extensões intervalares, observamos que a propriedade de uma ordem ser intervalar é hereditária. Portanto, devemos ter  $B_1, \dots, B_{i-1}$  intervalares para que  $B_i$  seja intervalar. Logo, se  $S_i$  é um ideal de  $C_{i-1}$  contendo  $E_P^-(e_i)$ , e  $S'_i = E_{C_{i-1}}^-[M_{B_{i-1}}^+ \cap E_{L'}^+(e_i)]$  para todo  $1 \leq i \leq n$ , a recorrência (3)–(4) pode ser aplicada para a geração de todas as extensões intervalares de  $P$ .

Observamos que a ordem  $C_i$  é dada por

$$C_i = C_{i-1} \cup \{(e_i, e_i)\} \cup \{(e_q, e_i) : E_{B_i}^+(e_q) \neq 0\} \\ \cup \{(e_j, e_k) : e_j \parallel e_k \text{ em } B_{i-1}\}, e_j \in S_i \cap S'_i, e_k \notin S_i \cap S'_i.$$

Desta forma, a ordem  $C_i$  pode ser obtida de  $C_{i-1}$  em tempo  $O(n^2)$ , se armazenamos os graus de saída de cada elemento  $e_j \in E_{i-1}$ . Além disso, por [25], cada ideal de  $C_{i-1}$  pode ser gerado em tempo constante. Por tais fatos, a geração das extensões intervalares de  $P$  pode ser executada em tempo  $O(n^3)$  por extensão, se não utilizamos a construção de  $C_i$  descrita em [44].

Observamos que, por [44],  $C_{i-1}$  é uma extensão ordem fraca de  $B_{i-1}$ . Desta forma, para cada chamada de  $\text{EXT-INTERVALARES}(B_{i-1}, C_{i-1}, i, L, L')$ , os ideais de  $C_{i-1} - A$  podem ser gerados em tempo constante por ideal. Além disso, supondo uma representação de  $C_{i-1}$  pela altura  $h(e_j)$  de cada elemento  $e_j \in E_{i-1}$ , é possível obter-se  $C_i$  de  $C_{i-1}$  em tempo  $O(n)$  (ver [44]). Para tal, considere  $h_{max}$  a altura máxima de um elemento em  $C_{i-1}$ , defina  $I_i = S_i \cup S'_i$  e  $I_i^*$  o conjunto dos elementos em  $I_i$  com altura  $h_{max}$ . Se  $I_i^* = \emptyset$  então atribuímos  $h(e_i) := h_{max}$ . Caso contrário, atribuímos  $h(e_j) := h_{max} + 1$  a todo elemento  $e_j \in M_{B_{i-1}}^+ \setminus I_i^*$ , atribuímos  $h(e_i) = h_{max} + 1$  e  $h_{max} := h_{max} + 1$ . Podemos gerar as extensões lineares de  $P$  em tempo  $O(n)$  por extensão, utilizando o método apresentado em [62]. Consequentemente, o algoritmo requer tempo  $O(n^2)$  por extensão intervalar gerada.

**Algoritmo:**  $\text{GERAEXT-INTERVALARES}(P)$

Seja  $L' \in \varepsilon_1(P)$

**Para** cada extensão linear  $L$  de  $P$  **Faça**

$\text{EXT-INTERVALARES}(\emptyset, \emptyset, 1, L, L')$

Figura 5.1(a): Geração de extensões intervalares baseada nos Teoremas 2.15 e 3.1.

**Algoritmo:** EXT-INTERVALARES( $B_{i-1}, C_{i-1}, i, L, L'$ )

**Se**  $i > n$  **Então**

Enumere  $B_{i-1}$

**Senão**

$A := \cup_{e_j} E_{C_{i-1}}^-[e_j]$ , para todo  $e_j \in E_{P_i}^-(e_i)$

**Para** cada ideal  $S'_i$  de  $C_{i-1} - A$  **Faça**

$S_i := S'_i \cup A$

$B_i := B_{i-1} \cup \{(e_i, e_i)\} \cup \{(e_j, e_i) | e_j \in S_i \cup E_{C_{i-1}}^-[M_{B_{i-1}}^+ \cap E_{L'}^+(e_i)]\}$

$C_i := C_{i-1} \cup \{(e_i, e_i)\} \cup \{(e_j, e_i) | E_{B_i}^+(e_j) \neq \emptyset\}$

$\cup \{(e_j, e_k) : e_j \parallel e_k \text{ em } B_{i-1}\}, e_j \in S_i \cap S'_i, e_k \notin S_i \cap S'_i.$

EXT-INTERVALARES( $B_i, C_i, i + 1, L, L'$ )

Figura 5.1 (b): Geração de extensões intervalares baseada nos Teoremas 2.15 e 5.1.

Em uma aplicação do método, geramos inicialmente uma extensão linear  $L'$  de  $P$ . Definimos  $B_0 = \emptyset$  e  $C_0 = \emptyset$ . Para cada extensão linear  $L$  de  $P$  geramos  $B_i$  (com  $1 \leq i \leq n$ ) utilizando a recorrência (3)–(4), considerando  $E_{B_i}^-(e_i)$  um ideal de  $C_{i-1}$ .

Como exemplo, consideramos a ordem  $P$  apresentada na Figura 5.2.

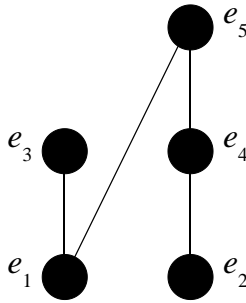


Figura 5.2: Ordem  $P$ .

As extensões lineares de  $P$  são:

$$\begin{aligned}
L_1 &= [e_1, e_3, e_2, e_4, e_5], \\
L_2 &= [e_1, e_2, e_3, e_4, e_5], \\
L_3 &= [e_2, e_1, e_3, e_4, e_5], \\
L_4 &= [e_2, e_1, e_4, e_3, e_5], \\
L_5 &= [e_1, e_2, e_4, e_3, e_5], \\
L_6 &= [e_1, e_2, e_4, e_5, e_3], \\
L_7 &= [e_2, e_1, e_4, e_5, e_3], \\
L_8 &= [e_2, e_4, e_1, e_5, e_3], \\
L_9 &= [e_2, e_4, e_1, e_3, e_5].
\end{aligned}$$

A ordem  $P$  possui 40 extensões, das quais duas não são ordens intervalares:

$$P' = P, \text{ e}$$

$$P'' = \{(e_1, e_3), (e_2, e_4), (e_1, e_5), (e_2, e_5), (e_3, e_5), (e_4, e_5)\}.$$

Com a aplicação do algoritmo descrito na Figura 5.1, considerando  $L_2$  uma extensão linear fixa de  $P$ , podemos obter as extensões intervalares de  $P$  apresentadas nas Figuras 5.3(a), 5.3(b) e 5.3(c). Na geração dos acréscimos lexicográficos de  $P$  relativos a  $(L_2, L_2)$ , observamos que  $E_{B_4}^-(e_4) = \{e_2\}$  não é um ideal de  $C_3 = \{(e_1, e_2), (e_1, e_3)\}$ . Esta situação corresponde às extensões não intervalares de  $P$  e, conseqüentemente, não são geradas pelo método. As subestruturas proibidas para ordens intervalares em tais extensões são formadas por  $\{(e_1, e_3), (e_2, e_4)\}$ . Nas Figuras 5.4(a) e 5.4(b) são apresentados os diagramas de Hasse das Extensões 1–38.

$(L_1, L_2)$	$L_1 = [e_1, e_3, e_2, e_4, e_5]$				
	$E_{B_1}^-(e_1)$	$E_{B_2}^-(e_3)$	$E_{B_3}^-(e_2)$	$E_{B_4}^-(e_4)$	$E_{B_5}^-(e_5)$
1.	$\emptyset$	$\{e_1\}$	$\{e_1, e_3\}$	$\{e_1, e_3, e_2\}$	$\{e_1, e_3, e_2, e_4\}$

Figura 5.3 (a): Geração de extensões intervalares de  $P$ .

---

$(L_2, L_2)$	$L_2 = [e_1, e_2, e_3, e_4, e_5]$				
	$E_{B_1}^-(e_1)$	$E_{B_2}^-(e_2)$	$E_{B_3}^-(e_3)$	$E_{B_4}^-(e_4)$	$E_{B_5}^-(e_5)$
2.	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{e_1\}$	$\{e_1, e_2\}$	$\{e_1, e_2, e_4\}$
3.					$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$
4.				$\{e_1, e_2, e_3\}$	$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$
5.			$\{e_1, e_2\}$	$\{e_2\}$	$\{e_1, e_2, e_4\}$
6.					$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$
7.				$\{e_1, e_2\}$	$\{e_1, e_2, e_4\}$
8.					$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$
9.				$\{e_1, e_2, e_3\}$	$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$
10.		$\{e_1\}$	$\{e_1\}$	$\{e_1, e_2\}$	$\{e_1, e_2, e_4\}$
11.					$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$
12.			$\{e_1\}$	$\{e_1, e_2, e_3\}$	$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$
13.			$\{e_1, e_2\}$	$\{e_1, e_2\}$	$\{e_1, e_2, e_4\}$
14.					$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$
15.				$\{e_1, e_2, e_3\}$	$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

---

$(L_3, L_2)$	$L_3 = [e_2, e_1, e_3, e_4, e_5]$				
	$E_{B_1}^-(e_2)$	$E_{B_2}^-(e_1)$	$E_{B_3}^-(e_3)$	$E_{B_4}^-(e_4)$	$E_{B_5}^-(e_5)$
16.	$\emptyset$	$\{e_2\}$	$\{e_2, e_1\}$	$\{e_2\}$	$\{e_2, e_1, e_4\}$
17.					$\{e_2, e_1, e_3, e_4\}$
18.				$\{e_2, e_1\}$	$\{e_2, e_1, e_4\}$
19.					$\{e_2, e_1, e_3, e_4\}$
20.				$\{e_2, e_1, e_3\}$	$\{e_2, e_1, e_3, e_4\}$

---

$(L_4, L_2)$	$L_4 = [e_2, e_1, e_4, e_3, e_5]$				
	$E_{B_1}^-(e_2)$	$E_{B_2}^-(e_1)$	$E_{B_3}^-(e_4)$	$E_{B_4}^-(e_3)$	$E_{B_5}^-(e_5)$
21.	$\emptyset$	$\{e_2\}$	$\{e_2\}$	$\{e_2, e_1, e_4\}$	$\{e_2, e_1, e_4\}$
22.					$\{e_2, e_1, e_4, e_3\}$
23.			$\{e_2, e_1\}$	$\{e_2, e_1, e_4\}$	$\{e_2, e_1, e_4\}$
24.					$\{e_2, e_1, e_4, e_3\}$

---

Figura 5.3 (b): Geração de extensões intervalares de  $P$ .

$(L_5, L_2)$	$L_5 = [e_1, e_2, e_4, e_3, e_5]$				
	$E_{B_1}^-(e_1)$	$E_{B_2}^-(e_2)$	$E_{B_3}^-(e_4)$	$E_{B_4}^-(e_3)$	$E_{B_5}^-(e_5)$
25.	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{e_2\}$	$\{e_1, e_2, e_4\}$	$\{e_1, e_2, e_4\}$
26.					$\{e_1, e_2, e_4, e_3\}$
27.			$\{e_1, e_2\}$	$\{e_1, e_2, e_4\}$	$\{e_1, e_2, e_4\}$
28.					$\{e_1, e_2, e_4, e_3\}$
29.		$\{e_1\}$	$\{e_1, e_2\}$	$\{e_1, e_2, e_4\}$	$\{e_1, e_2, e_4\}$
30.					$\{e_1, e_2, e_4, e_3\}$

---

$(L_6, L_2)$	$L_6 = [e_1, e_2, e_4, e_5, e_3]$				
	$E_{B_1}^-(e_1)$	$E_{B_2}^-(e_2)$	$E_{B_3}^-(e_4)$	$E_{B_4}^-(e_5)$	$E_{B_5}^-(e_3)$
31.	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{e_2\}$	$\{e_1, e_2, e_4\}$	$\{e_1, e_2, e_4, e_5\}$
32.			$\{e_1, e_2\}$	$\{e_1, e_2, e_4\}$	$\{e_1, e_2, e_4, e_5\}$
33.		$\{e_1\}$	$\{e_1, e_2\}$	$\{e_1, e_2, e_4\}$	$\{e_1, e_2, e_4, e_5\}$

---

$(L_7, L_2)$	$L_7 = [e_2, e_1, e_4, e_5, e_3]$				
	$E_{B_1}^-(e_2)$	$E_{B_2}^-(e_1)$	$E_{B_3}^-(e_4)$	$E_{B_4}^-(e_5)$	$E_{B_5}^-(e_3)$
34.	$\emptyset$	$\{e_2\}$	$\{e_2\}$	$\{e_2, e_1, e_4\}$	$\{e_2, e_1, e_4, e_5\}$
35.			$\{e_2, e_1\}$	$\{e_2, e_1, e_4\}$	$\{e_2, e_1, e_4, e_5\}$

---

$(L_8, L_2)$	$L_8 = [e_2, e_4, e_1, e_5, e_3]$				
	$E_{B_1}^-(e_2)$	$E_{B_2}^-(e_4)$	$E_{B_3}^-(e_1)$	$E_{B_4}^-(e_5)$	$E_{B_5}^-(e_3)$
36.	$\emptyset$	$\{e_2\}$	$\{e_2, e_4\}$	$\{e_2, e_4, e_1\}$	$\{e_2, e_4, e_1, e_5\}$

---

$(L_9, L_2)$	$L_9 = [e_2, e_4, e_1, e_3, e_5]$				
	$E_{B_1}^-(e_2)$	$E_{B_2}^-(e_4)$	$E_{B_3}^-(e_1)$	$E_{B_4}^-(e_3)$	$E_{B_5}^-(e_5)$
37.	$\emptyset$	$\{e_2\}$	$\{e_2, e_4\}$	$\{e_2, e_4, e_1\}$	$\{e_2, e_4, e_1\}$
38.				$\{e_2, e_4, e_1\}$	$\{e_2, e_4, e_1, e_3\}$

Figura 5.3 (c): Geração de extensões intervalares de  $P$ .

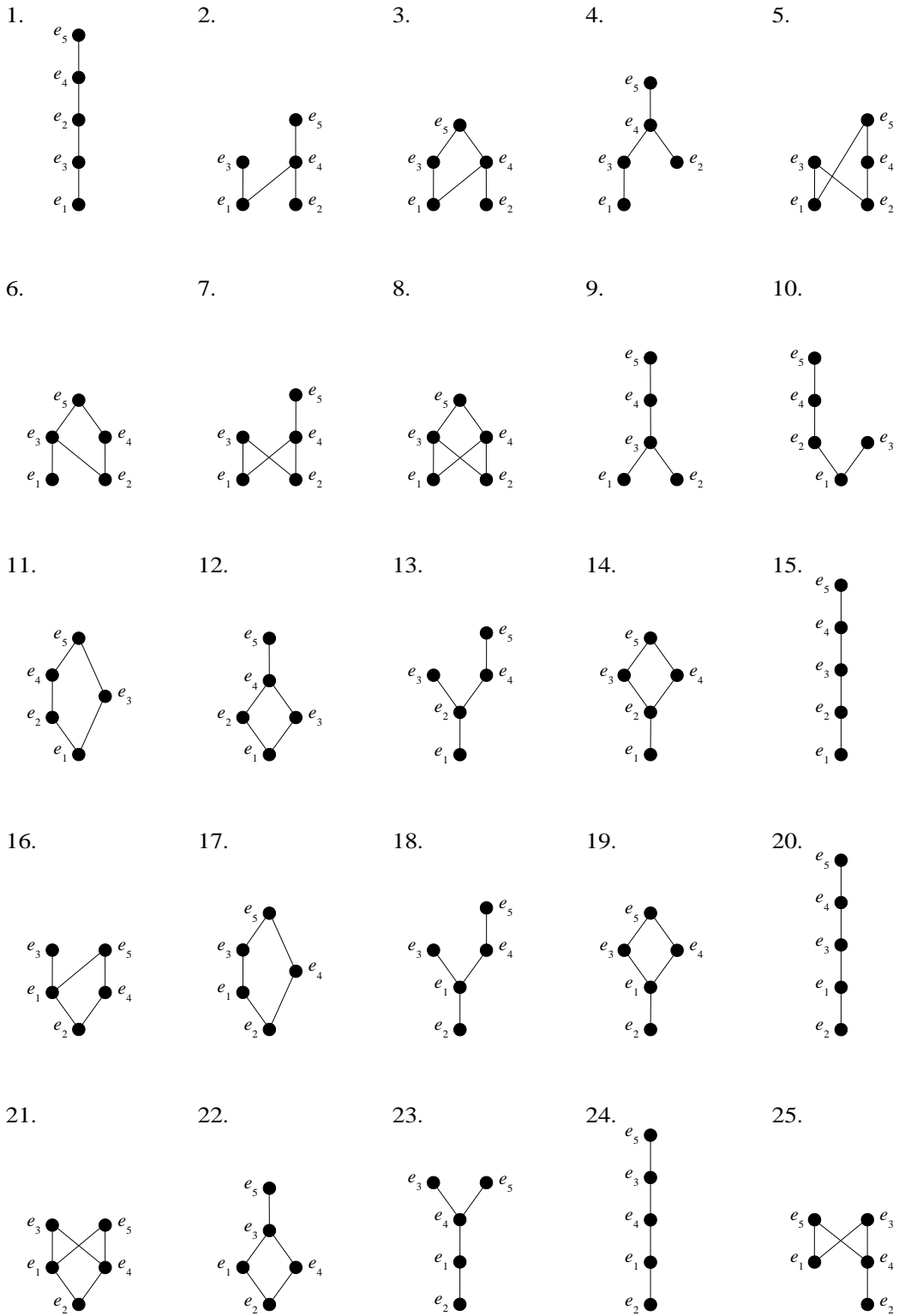
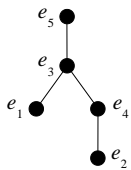
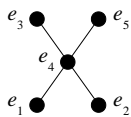


Figura 5.4 (a): Extensões intervalares de  $P$ .

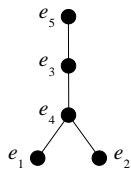
26.



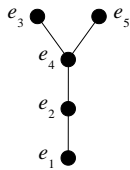
27.



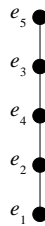
28.



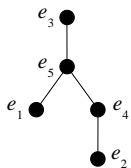
29.



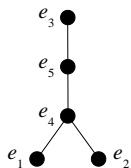
30.



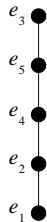
31.



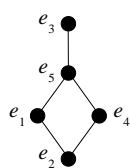
32.



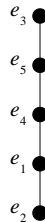
33.



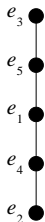
34.



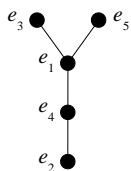
35.



36.



37.



38.

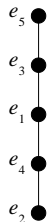


Figura 5.4 (b): Extensões intervalares de  $P$ .

# Capítulo 6

## Extensões Semi-ordens

### 6.1 Caracterização de Extensões Semi-ordens

Para a geração de extensões semi-ordens  $P'$  de uma dada ordem  $P$ , consideramos  $B_{i-1}$  um acréscimo lexicográfico de  $P_{i-1}$  relativo a  $(L_{i-1}, L'[E_{i-1}])$  e  $C_{i-1}$  a ordem em  $E_{i-1}$  definida para a geração de extensões intervalares. Definimos a ordem  $D_{i-1}$  em  $E_{i-1}$  como uma extensão do acréscimo lexicográfico  $B_{i-1}$  tal que, para  $e_j \neq e_k$  temos  $(e_j, e_k) \in D_{i-1}$  se e somente se  $E_{B_{i-1}}^-(e_j) \subset E_{B_{i-1}}^-(e_k)$ . Para  $e_j \in E_{i-1}$  consideramos  $(e_j, e_j) \in D_{i-1}$ . Observamos que se  $P = B_n$  é intervalar, então temos  $B_n \subseteq D_n \subseteq P^*$ . Para o próximo teorema, considere  $S_i$  um ideal de  $B_{i-1}$  contendo  $E_P^-(e_i)$  e  $S'_i = E_{B_{i-1}}^-[M_{B_{i-1}}^+ \cap E_{L'}^+(e_i)]$ .

**Teorema 6.1** *Seja  $B_{i-1}$  um acréscimo lexicográfico de  $P_{i-1}$  relativo a  $(L_{i-1}, L'[E_{i-1}])$ , e considere  $B_{i-1}$  uma semi-ordem. Então  $B_i$  é semi-ordem se e somente se*

- i)  $S_i \cup S'_i$  é um ideal de  $C_{i-1}$ ;
- ii)  $S_i \cup S'_i$  é um ideal de  $D_{i-1}$ ;
- iii)  $E_{i-1} \setminus (M_{B_{i-1}}^+ \cup M_{B_{i-1}-M_{B_{i-1}}}^+) \subseteq S_i \cup S'_i$ .

**Prova.** Para a direção *se*, considere  $B_i$  um acréscimo lexicográfico tal que i), ii), e iii) ocorrem porém  $B_i$  não seja uma semi-ordem. Visto que  $B_{i-1}$  é semi-ordem,

não temos em  $B_{i-1}$  as subestruturas  $\mathbf{2} + \mathbf{2}$  ou  $\mathbf{1} + \mathbf{3}$ . Pelo Teorema 5.1, temos  $B_i$  intervalar, visto que  $S_i \cup S'_i$  é um ideal de  $C_{i-1}$ . Logo, para que  $B_i$  não seja semi-ordem, devemos ter uma subestrutura isomorfa a  $\mathbf{1} + \mathbf{3}$ . Ou seja, existem elementos  $e_j, e_k, e_l$ , tais que

- a) ou  $e_i$  é incomparável aos elementos de uma cadeia formada por  $\{e_j, e_k, e_l\}$ ,
- b) ou  $e_i$  é o elemento máximo de uma cadeia formada por  $\{e_j, e_k, e_l\}$  cujos elementos são incomparáveis a  $e_l$ .

No primeiro caso, supondo  $(e_j, e_k), (e_k, e_l) \in B_{i-1}$  temos  $e_j \in E_{i-1} \setminus (M_{B_{i-1}}^+ \cup M_{B_{i-1}-M_{B_{i-1}}}^+)$ . Consequentemente,  $e_j \in E_{B_i}^-(e_i)$ , o que contradiz a incomparabilidade entre  $e_j$  e  $e_i$ . No segundo caso, supondo  $(e_j, e_k), (e_k, e_l) \in B_i$ , temos  $e_j, e_k \in S_i \cup S'_i$ . Além disso, sabemos que  $e_j \in E_{B_{i-1}}^-(e_k)$  e  $e_j \notin E_{B_{i-1}}^-(e_l)$ . Pelo fato de  $B_i$  ser intervalar, temos  $E_{B_{i-1}}^-(e_l) \subset E_{B_{i-1}}^-(e_k)$ . Logo,  $(e_l, e_k) \in D_{i-1}$ , o que contradiz o fato de  $S_i \cup S'_i$  ser um ideal em  $D_{i-1}$ .

Por outro lado, considere  $B_i$  semi-ordem e suponha que ou i) ou ii) ou iii) não ocorra. Se i) não ocorre, então, pelo Teorema 5.1, temos  $B_i$  não intervalar. Se ii) não ocorre, então existem  $e_j, e_l \in E_{i-1}$  tais que  $(e_j, e_l) \in D_{i-1}$ ,  $e_l \in S_i \cup S'_i$  e  $e_j \notin S_i \cup S'_i$ . Sabemos que  $S_i \cup S'_i$  é um ideal em  $B_{i-1}$  e, portanto,  $(e_j, e_l) \notin B_{i-1}$ . Visto que  $E_{B_{i-1}}^-(e_j) \subset E_{B_{i-1}}^-(e_l)$ , existe  $e_k \neq e_j$ , tal que  $e_k \in E_{B_{i-1}}^-(e_l) \setminus E_{B_{i-1}}^-(e_j)$ . Temos  $e_k$  e  $e_l$  incomparáveis a  $e_j$  em  $B_{i-1}$ . Consequentemente,  $\{e_j\}$  e  $\{e_k, e_l, e_i\}$  formam uma subestrutura proibida para semi-ordens em  $B_i$ . Se iii) não ocorre, então existe  $e_j \in E_{i-1} \setminus (M_{B_{i-1}}^+ \cup M_{B_{i-1}-M_{B_{i-1}}}^+)$  tal que  $e_j \notin S_i \cup S'_i$ . Logo, existem  $e_k \in M_{B_{i-1}-M_{B_{i-1}}}^+$  e  $e_l \in M_{B_{i-1}}^+$  tais que  $\{e_j, e_k, e_l\}$  formam uma cadeia em  $B_{i-1}$ . Visto que  $e_i$  é um elemento maximal e incomparável a  $\{e_j, e_k, e_l\}$  em  $B_i$ , temos  $\{e_j, e_k, e_l\}$  e  $\{e_i\}$  formando uma subestrutura proibida para semi-ordens em  $B_i$ .  $\square$

Para a geração das extensões semi-ordens da ordem  $P$ , considerando  $1 \leq i \leq n$  na recorrência (3)-(4), devemos gerar os ideais de  $B_{i-1}$  os quais conduzirão a uma semi-ordem  $B_i$ . Observamos que é necessário termos  $B_1, \dots, B_{i-1}$  semi-ordens para que  $B_i$  seja uma semi-ordem. Desta forma, podemos aplicar a recorrência (3)-(4),

considerando  $S_i$  como sendo um ideal de  $C_{i-1}$  e de  $D_{i-1}$ , contendo  $E_P^-(e_i) \cup [E_{i-1} \setminus (M_{B_{i-1}}^+ \cup M_{B_{i-1}-M_{B_{i-1}}}^+)]$  e  $S'_i$  um ideal de  $C_{i-1}$  e de  $D_{i-1}$  contendo  $[M_{B_{i-1}}^+ \cup E_{L'}^+(e_i)]$ . Na Seção 6.2 é apresentado um método para a geração de ideais comuns a duas ordens.

## 6.2 Geração de Ideais Comuns

Sejam  $C$  e  $D$  duas ordens em um conjunto  $E$ . Para a geração dos ideais de  $C$  e  $D$  definimos inicialmente um grafo direcionado  $G = (V, A)$ , onde  $V = E$  e  $A = C \cup D$ . Seja  $G' = (V', A')$  o *grafo componente* ou *grafo condensação* de  $G$ , isto é, com cada vértice de  $V'(G') = \{c_1, \dots, c_k\}$  correspondendo a uma componente fortemente conexa de  $G$  e  $(c_i, c_j) \in A'$  se e somente se existem  $e_i \in c_i$  e  $e_j \in c_j$  em  $G$  tais que  $(e_i, e_j) \in A$ . Observamos que a família  $\{c_1, \dots, c_k\}$  das componentes fortemente conexas de  $G$  é uma partição de  $V = E$ .

Sejam  $e_i$  e  $e_j$  dois vértices em uma mesma componente fortemente conexa de  $G$ , e  $(e_i = v_1, \dots, v_k = e_j)$  um caminho direcionado de  $e_i$  para  $e_j$  em  $G$ . Para cada aresta  $(v_l, v_{l+1})$ , com  $1 \leq l \leq k-1$ , no caminho direcionado, temos ou  $(v_l, v_{l+1}) \in C$  ou  $(v_l, v_{l+1}) \in D$ . Portanto, se  $I$  é um ideal de  $C$  e é um ideal de  $D$  então temos que  $e_j \in I$  implica  $e_i \in I$ . Desta forma, é fácil ver que  $I$  é ou o conjunto vazio ou uma coleção de componentes fortemente conexas de  $G$ . Seja  $T$  o fecho transitivo de  $A'(G')$ . O seguinte lema estabelece uma correspondência entre os ideais de  $T$  e a família de conjuntos que são ideais de  $C$  e de  $D$ .

**Lema 6.1** *Seja  $I = \{c_1, \dots, c_m\}$  um conjunto de componentes fortemente conexas de  $G$ . Então  $I$  é um ideal de  $T$  se e somente se  $\bigcup_{c_k \in I} c_k$  é um ideal de  $C$  e de  $D$ .*

**Prova.** Seja  $I = \{c_1, \dots, c_m\}$  um ideal de  $T$  e suponha que  $\bigcup_{c_k \in I} c_k$  não seja um ideal de  $C$  e de  $D$ . Neste caso, existem  $e_i, e_j \in E$ ,  $e_j \in \bigcup_{c_k \in I} c_k$  e  $e_i \notin \bigcup_{c_k \in I} c_k$ , tais que ou  $(e_i, e_j) \in C$  ou  $(e_i, e_j) \in D$ . Suponha, sem perda de generalidade, que  $(e_i, e_j) \in$

$C$ . Sejam  $c_i$  e  $c_j$  as componentes fortemente conexas distintas possuindo  $e_i$  e  $e_j$ , respectivamente. Sabemos que  $c_i \notin I$  pois, caso contrário, teríamos  $e_i \in \bigcup_{c_k \in I} c_k$ . Visto que  $(e_i, e_j) \in C$ , temos  $(e_i, e_j) \in A(G)$  e, conseqüentemente  $(c_i, c_j) \in A'(G')$ . Isto contradiz  $I$  ser um ideal de  $T$ .

Por outro lado, seja  $\bigcup_{c_k \in I} c_k$  um ideal de  $C$  e de  $D$  e suponha que  $I = \{c_1, \dots, c_m\}$  não seja um ideal de  $T$ . Neste caso, existem duas componentes fortemente conexas  $c_i$  e  $c_j$  tais que  $(c_i, c_j) \in T$ ,  $c_i \notin I$ ,  $c_j \in I$ . Visto que  $(c_i, c_j) \in T$ , existem  $e_i \in c_i$  e  $e_j \in c_j$  com um caminho direcionado  $(e_i = v_1, \dots, v_h = e_j)$  de  $e_i$  para  $e_j$  em  $G$ . Seja  $v_l$  um vértice deste caminho tal que a componente fortemente conexa de  $v_l$  não pertença a  $I$  e considere  $l \in \{1, \dots, h-1\}$  máximo. Sejam  $c_l$  e  $c_{l+1}$  as componentes fortemente conexas de  $G$  com  $v_l \in c_l$  e  $v_{l+1} \in c_{l+1}$ . Temos  $c_l \notin I$  e  $c_{l+1} \in I$ . Além disso, ou  $(v_l, v_{l+1}) \in C$  ou  $(v_l, v_{l+1}) \in D$ . Assim,  $v_l \notin \bigcup_{c_k \in I} c_k$  contradiz  $\bigcup_{c_k \in I} c_k$  ser um ideal de  $C$  e de  $D$ .  $\square$

A construção do grafo condensação  $G'$  de  $G$  pode ser executada em tempo  $O(n+m)$ , onde  $n = |E|$  e  $m = |A|$ . O algoritmo apresentado por Jaumard e Minoux [27] pode ser utilizado para o cômputo de  $T$  em tempo  $O(nm)$ . Algoritmos para o cômputo de fechos transitivos em tempo  $O(mn)$  e  $O(n^3)$  são também apresentados por Habib, Morvan e Rampon [23] e Warshall [63], respectivamente. O algoritmo apresentado por Squire [52] pode ser utilizado para a geração dos ideais de  $T$ , em tempo  $O(\log n')$  por ideal, onde  $n'$  é o número de componentes fortemente conexas de  $G$ .

Observamos que o Lema 6.1 pode ser estendido à geração de ideais comuns a uma dada coleção  $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_l\}$  de ordens em  $E$ . Por [44], a geração dos ideais comuns às ordens de  $\mathcal{Q}$  requer tempo  $O(\log n)$  por ideal após um pre-processamento em tempo  $O(nm + lm)$ .

### 6.3 Geração de Extensões

Seja a ordem  $D_i$  dada por

$$D_i = D_{i-1} \cup \{(e_i, e_i)\} \cup \{(e_q, e_i) : E_{B_i}^-(e_q) \subset E_{B_i}^-(e_i)\}.$$

É fácil ver que  $E_{B_{i-1}}^-(e_j) = E_{B_i}^-(e_j)$  para todo  $e_j \in E_{i-1}$ . Portanto,  $D_i$  pode ser obtida de  $D_{i-1}$  em tempo linear, se armazenamos os graus de entrada de cada elemento  $e_j \in E_{i-1}$ . Para a geração dos ideais de  $C_{i-1}$  e  $D_{i-1}$  contendo  $E_P^-(e_i) \cup [E_{i-1} \setminus (M_{B_{i-1}}^+ \cup M_{B_{i-1}-M_{B_{i-1}}}^+)] \cup S'_i$ , com  $1 \leq i \leq n$ , devemos computar  $G_{i-1}(V_{i-1}, A_{i-1})$  assim como o grafo condensação  $G'_{i-1}(V'_{i-1}, A'_{i-1})$ . Seja  $c_j$  a componente fortemente conexa de  $G'_{i-1}$  tal que  $e_j \in c_j$  e defina  $K_{i-1} = \{c_j \in V'_{i-1}(G'_{i-1}) \mid e_j \in E_P^-(e_i) \cup [E_{i-1} \setminus (M_{B_{i-1}}^+ \cup M_{B_{i-1}-M_{B_{i-1}}}^+)] \cup S'_i\}$ . Isto é, defina  $K_{i-1}$  como o conjunto das componentes fortemente conexas  $c_j$  de  $G_{i-1}$  tais que  $e_j \in c_j$ , para todo  $e_j \in E_P^-(e_i) \cup [E_{i-1} \setminus (M_{B_{i-1}}^+ \cup M_{B_{i-1}-M_{B_{i-1}}}^+)] \cup S'_i$ . Seja  $T_{i-1}$  o fecho transitivo de  $G'_{i-1}$  e defina  $K'_{i-1} = E_{T_{i-1}}^-[K_{i-1}]$ .

Como consequência do Lema 6.1, os ideais de  $C_{i-1}$  e  $D_{i-1}$  contendo  $E_P^-(e_i) \cup [E_{i-1} \setminus (M_{B_{i-1}}^+ \cup M_{B_{i-1}-M_{B_{i-1}}}^+)] \cup S'_i$  estão em uma correspondência 1-1 com os ideais de  $T_{i-1}$  que contêm  $K'_{i-1}$ . Desta forma, o procedimento apresentado na Seção 6.2 pode ser utilizado para a geração de tais ideais em tempo  $O(\log n)$  por ideal, após um processamento necessário para a construção do grafo condensação  $G'_{i-1} = (V'_{i-1}, A'_{i-1})$  de  $G_{i-1} = (V_{i-1}, A_{i-1})$ , de seu fecho transitivo  $T_{i-1}$  e da ordem  $T'_{i-1} = T_{i-1} - K'_{i-1}$ .

Considerando  $I'_j$  um ideal de  $T'_{i-1}$  e sendo  $I_j = K'_{i-1} \cup I'_j$ , temos  $\cup_{c_k \in I_j} c_k$  um ideal de  $C_{i-1}$  e de  $D_{i-1}$  como requerido pelo Teorema 6.1. Observamos que este método, apresentado na Figura 6.1, não utiliza a construção de  $G'_i$  a partir de  $G'_{i-1}$ . Desta forma, a geração das extensões semi-ordens de pode ser executada, com a aplicação da recorrência (3)-(4), em tempo  $O(n^4)$  por extensão.

**Algoritmo:** GERAEXT-SEMI-ORDENS( $P$ )

Seja  $L' \in \varepsilon_1(P)$

**Para** cada extensão linear  $L$  de  $P$  **Faça**

EXT-SEMI-ORDENS( $\emptyset, \emptyset, \emptyset, 1, L, L'$ )

**Algoritmo:** EXT-SEMI-ORDENS( $B_{i-1}, C_{i-1}, D_{i-1}, i, L, L'$ )

**Se**  $i > n$  **Então**

Enumere  $B_{i-1}$

**Senão**

$$A := E_P^-(e_i) \cup [M_{B_{i-1}}^+ \cap E_{L'}^+(e_i)]$$

$$A' := E_{i-1} \setminus (M_{B_{i-1}}^+ \cup M_{B_{i-1}-M_{B_{i-1}}}^+)$$

$$K_{i-1} := \{c_j \in V_{i-1}(G'_{i-1}) \mid e_j \in A \cup A'\}$$

$$K'_{i-1} := E_{G'_{i-1}}^-[K_{i-1}]$$

Gere  $G'_{i-1}$

$$G''_{i-1} = G'_{i-1} - K'_{i-1}$$

**Para** cada ideal  $I'_i$  de  $G''_{i-1}$  **Faça**

$$I_i := I'_i \cup K'_{i-1}$$

$$B_i := B_{i-1} \cup \{(e_i, e_i)\} \cup \{(e_j, e_i) \mid e_j \in \cup_{c_j \in I_i} c_j\}$$

$$C_i := C_{i-1} \cup \{(e_i, e_i)\} \cup \{(e_j, e_i) \mid E_{B_i}^+(e_j) \neq 0\}$$

$$D_i := D_{i-1} \cup \{(e_i, e_i)\} \cup \{(e_j, e_i) \mid E_{B_i}^-(e_j) \subset E_{B_i}^-(e_i)\}$$

$$\text{EXT-SEMI-ORDENS}(B_i, C_i, D_i, i+1, L, L')$$

Figura 6.1: Geração de extensões semi-ordens baseada nos Teoremas 2.15 e 6.1.

Como exemplo, consideraremos a aplicação do método à ordem  $P$  apresentada na Figura 6.2. As extensões lineares de  $P$  são:

$$L_1 = [e_1, e_3, e_2, e_4, e_5],$$

$$L_2 = [e_1, e_2, e_3, e_4, e_5],$$

$$L_3 = [e_2, e_1, e_3, e_4, e_5],$$

$$L_4 = [e_2, e_1, e_4, e_3, e_5],$$

$$L_5 = [e_1, e_2, e_4, e_3, e_5],$$

$$L_6 = [e_1, e_2, e_4, e_5, e_3], e$$

$$L_7 = [e_2, e_1, e_4, e_5, e_3].$$

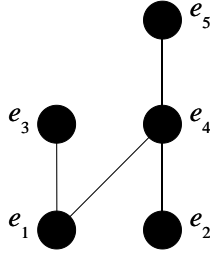


Figura 6.2: Ordem  $P$ .

A ordem  $P$  possui 25 extensões, das quais duas não são semi-ordens:

$$P' = P, e$$

$$P'' = \{(e_1, e_2), (e_1, e_3), (e_1, e_4), (e_2, e_4), (e_1, e_5), (e_2, e_5), (e_4, e_5)\}.$$

As subestruturas proibidas para semi-ordens em tais extensões são formadas por  $\{\{e_3\}, \{e_2, e_4, e_5\}\}$ . Nas Figuras 6.3(a), 6.3(b) e 6.3(c) são apresentadas as extensões semi-ordens de  $P$  obtidas pela aplicação do algoritmo descrito na Figura 6.1, considerando-se  $L_2$  uma extensão linear fixa de  $P$ . Observamos que na geração dos acréscimos lexicográficos de  $P$  relativos a  $(L_2, L_2)$ , se temos  $D_4 = \{(e_1, e_3), (e_2, e_3), (e_1, e_4), (e_2, e_4), (e_3, e_4)\}$  ou  $D_4 = \{(e_1, e_2), (e_1, e_3), (e_1, e_4), (e_2, e_4), (e_3, e_4)\}$ , então  $E_{B_5}^-(e_5) = \{e_1, e_2, e_4\}$  não é um ideal de  $D_4$ . Esta situação corresponde às extensões de  $P$  não geradas pelo método descrito. Nas Figuras 6.4(a) e 6.4(b) são apresentados os diagramas de Hasse das Extensões 1–23.

$(L_1, L_2)$	$L_1 = [e_1, e_3, e_2, e_4, e_5]$				
	$E_{B_1}^-(e_1)$	$E_{B_2}^-(e_3)$	$E_{B_3}^-(e_2)$	$E_{B_4}^-(e_4)$	$E_{B_5}^-(e_5)$
1.	$\emptyset$	$\{e_1\}$	$\{e_1, e_3\}$	$\{e_1, e_3, e_2\}$	$\{e_1, e_3, e_2, e_4\}$

Figura 6.3 (a): Geração de extensões semi-ordens de  $P$ .

$(L_2, L_2)$	$L_2 = [e_1, e_2, e_3, e_4, e_5]$				
	$E_{B_1}^-(e_1)$	$E_{B_2}^-(e_2)$	$E_{B_3}^-(e_3)$	$E_{B_4}^-(e_4)$	$E_{B_5}^-(e_5)$
2.	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{e_1\}$	$\{e_1, e_2\}$	$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$
3.				$\{e_1, e_2, e_3\}$	$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$
4.			$\{e_1, e_2\}$	$\{e_1, e_2\}$	$\{e_1, e_2, e_4\}$
5.					$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$
6.				$\{e_1, e_2, e_3\}$	$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$
7.		$\{e_1\}$	$\{e_1\}$	$\{e_1, e_2\}$	$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$
8.				$\{e_1, e_2, e_3\}$	$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$
9.			$\{e_1, e_2\}$	$\{e_1, e_2\}$	$\{e_1, e_2, e_4\}$
10.					$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$
11.				$\{e_1, e_2, e_3\}$	$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

---

$(L_3, L_2)$	$L_3 = [e_2, e_1, e_3, e_4, e_5]$				
	$E_{B_1}^-(e_2)$	$E_{B_2}^-(e_1)$	$E_{B_3}^-(e_3)$	$E_{B_4}^-(e_4)$	$E_{B_5}^-(e_5)$
12.	$\emptyset$	$\{e_2\}$	$\{e_2, e_1\}$	$\{e_2, e_1\}$	$\{e_2, e_1, e_4\}$
13.					$\{e_2, e_1, e_3, e_4\}$
14.				$\{e_2, e_1, e_3\}$	$\{e_2, e_1, e_3, e_4\}$

---

$(L_4, L_2)$	$L_4 = [e_2, e_1, e_4, e_3, e_5]$				
	$E_{B_1}^-(e_2)$	$E_{B_2}^-(e_1)$	$E_{B_3}^-(e_4)$	$E_{B_4}^-(e_3)$	$E_{B_5}^-(e_5)$
15.	$\emptyset$	$\{e_2\}$	$\{e_2, e_1\}$	$\{e_2, e_1, e_4\}$	$\{e_2, e_1, e_4\}$
16.					$\{e_2, e_1, e_4, e_3\}$

---

$(L_5, L_2)$	$L_5 = [e_1, e_2, e_4, e_3, e_5]$				
	$E_{B_1}^-(e_1)$	$E_{B_2}^-(e_2)$	$E_{B_3}^-(e_4)$	$E_{B_4}^-(e_3)$	$E_{B_5}^-(e_5)$
17.	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{e_1, e_2\}$	$\{e_1, e_2, e_4\}$	$\{e_1, e_2, e_4\}$
18.					$\{e_1, e_2, e_4, e_3\}$
19.		$\{e_1\}$	$\{e_1, e_2\}$	$\{e_1, e_2, e_4\}$	$\{e_1, e_2, e_4\}$
20.					$\{e_1, e_2, e_4, e_3\}$

Figura 6.3 (b): Geração de extensões semi-ordens de  $P$ .

$(L_6, L_2)$	$L_6 = [e_1, e_2, e_4, e_5, e_3]$				
	$E_{B_1}^-(e_1)$	$E_{B_2}^-(e_2)$	$E_{B_3}^-(e_4)$	$E_{B_4}^-(e_5)$	$E_{B_3}^-(e_3)$
21.	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{e_1, e_2\}$	$\{e_1, e_2, e_4\}$	$\{e_1, e_2, e_4, e_5\}$
22.		$\{e_1\}$	$\{e_1, e_2\}$	$\{e_1, e_2, e_4\}$	$\{e_1, e_2, e_4, e_5\}$

---

$(L_7, L_2)$	$L_7 = [e_2, e_1, e_4, e_5, e_3]$				
	$E_{B_1}^-(e_2)$	$E_{B_2}^-(e_1)$	$E_{B_3}^-(e_4)$	$E_{B_4}^-(e_5)$	$E_{B_3}^-(e_3)$
23.	$\emptyset$	$\{e_2\}$	$\{e_2, e_1\}$	$\{e_2, e_1, e_4\}$	$\{e_2, e_1, e_4, e_5\}$

Figura 6.3 (c): Geração de extensões semi-ordens de  $P$ .

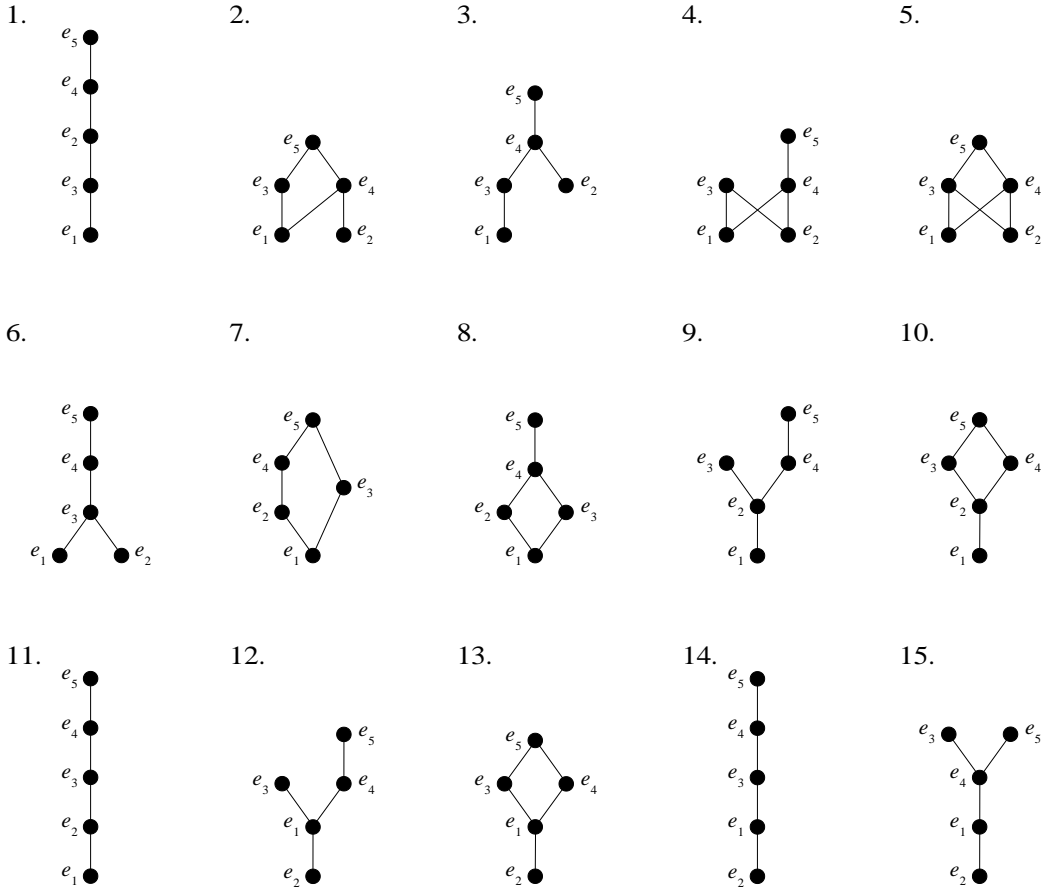


Figura 6.4 (a): Extensões semi-ordens de  $P$ .

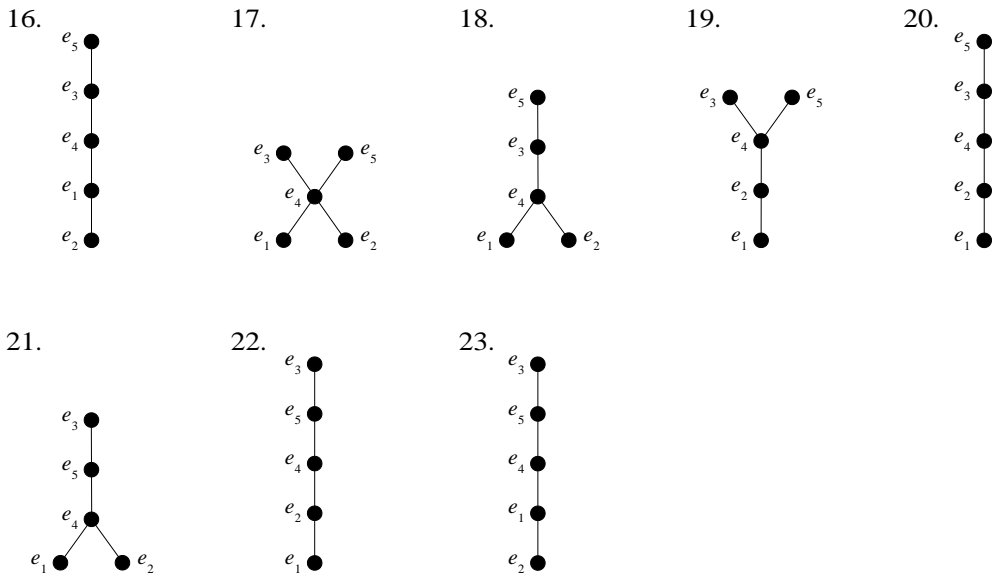


Figura 6.4 (b): Extensões semi-ordens de  $P$ .

Observamos que na primeira versão desta tese foi mencionada a complexidade amortizada de tempo de  $O(n^3)$  por extensão semi-ordem gerada, para o algoritmo apresentado na Figura 6.1. No período compreendido entre a submissão desta tese e sua defesa, foi obtida a complexidade de tempo de pior caso de  $O(n^3)$  por extensão gerada. Tal complexidade está baseada na utilização do algoritmo devido a Barbosa e Szwarcfiter [5] para a geração de ideais de um digrafo acíclico  $D$  — não necessariamente transitivo — em tempo  $O(n + m)$  por ideal. Na geração de extensões semi-ordens, com a utilização do algoritmo apresentado em [5], podemos obter o acréscimo lexicográfico semi-ordem  $B_i$  em tempo  $O(n^2)$ , para  $1 \leq i \leq n$ . Observamos que, desta forma, o cômputo do fecho  $T_i$  torna-se desnecessário. Portanto, podemos gerar o acréscimo lexicográfico semi-ordem  $B_n$  em tempo  $O(n^3)$  no pior caso.

# Capítulo 7

## Conclusões

Em [54] foram apresentados problemas em aberto referentes à geração de extensões  $P'$  de uma ordem  $P$ . Dentre os quais estão a geração de extensões  $P'$  com dimensão  $\leq 2$ , a geração de extensões com largura limitada por um dado inteiro  $k$ , a geração de extensões com altura limitada por um dado inteiro  $k$ , a geração de extensões arbóreas, a geração de extensões ordens fracas, e a geração de extensões intervalares e semi-ordens.

Para o problema da geração de extensões com largura limitada por um dado inteiro  $k$ , uma possível aplicação da caracterização de  $\varepsilon(P)$  devida a Corrêa e Szwarcfiter [11], baseada no conceito de pares passivos, deve ser verificada. Observamos que, sendo  $(L, L')$  um par de extensões lineares de  $P$  e considerando  $L'$  fixa, podemos ter  $L$  como o único acréscimo lexicográfico de  $P$  relativo a  $(L, L')$ . Temos  $h(L) = n$ . Portanto, para o problema da geração de extensões com altura limitada deve ser verificada uma aplicação da caracterização de  $\varepsilon(P)$  baseada no conceito de acréscimos. Analogamente, para o problema da geração de extensões  $P' \in \varepsilon_2(P)$ , deve ser verificada uma aplicação desta caracterização, com a utilização de resultados apresentados em [17] e da propriedade de monotonicidade da dimensão.

Pelo método apresentado no Capítulo 3, podemos gerar as extensões arbóreas de uma ordem  $P$  em tempo  $O(n^4)$  por extensão. Como operação dominante do método está a construção da ordem auxiliar  $Q$ . Em uma pesquisa futura está o

desenvolvimento de estruturas auxiliares e/ou de procedimentos mais eficientes para a construção de  $Q$ , que permitam uma menor complexidade na geração das extensões arbóreas de  $P$ .

O método para a geração de extensões ordens fracas de  $P$  apresentado no Capítulo 4 requer tempo  $O(n^2)$  por extensão. Por Bertet, Gustedt e Morvan [5], tais extensões podem ser geradas em tempo  $O(n_w \Delta + m)$ , onde  $n_w$  é o número de extensões ordens fracas, e  $\Delta$  é o número máximo de sucessores imediatos dos elementos de  $P$ . Uma pesquisa futura deverá incluir a busca por um algoritmo sem laços para a geração desta classe de extensões.

No Capítulo 5 é apresentado um procedimento para a geração de extensões intervalares de  $P$  em tempo  $O(n^2)$  por extensão baseado na caracterização de  $\varepsilon(P)$  por acréscimos lexicográficos. Visando uma geração mais eficiente de tais extensões, deve ser verificada uma aplicação da caracterização de  $\varepsilon(P)$  baseada no conceito de acréscimos, assim como resultados estruturais que permitam a geração desta classe de extensões em tempo amortizado constante.

Pelo método apresentado no Capítulo 6, extensões semi-ordens de uma ordem  $P$  podem ser geradas em tempo  $O(n^3)$  por extensão. A operação dominante do método apresentado está na construção do digrafo condensação  $G'_i$  de  $G_i$ , onde  $G_i$  é a união das ordens auxiliares  $C_i$  e  $D_i$ . Para uma menor complexidade na geração desta classe de extensões, deve ser verificada a obtenção de  $G'_i$  a partir de  $G'_{i-1}$ , além do desenvolvimento de outras estruturas auxiliares e procedimentos eficientes para suas construções.

Observamos que os métodos apresentados estão baseados nas caracterizações das classes de ordens estudadas, assim como no conceito de acréscimos lexicográficos. Aplicações das demais caracterizações de  $\varepsilon(P)$  apresentadas em [11] devem ser pesquisadas, assim como novas bijeções envolvendo extensões de dimensão  $\leq 2$ , de largura e de altura limitada por um inteiro  $k$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] K.A. BAKER, P.C. FISHBURN, F.S. ROBERTS. Partial orders of dimension 2. *Networks*, **2** pp. 11–28, 1972.
- [2] P. BALDY, M. MORVAN. A linear time and space algorithm to recognize interval orders. *Disc. Appl. Math.*, **46** pp. 173–178, 1993.
- [3] P. BALDY, M. MORVAN, E. THIERRY. Extending a partially ordered set: links with the lattice of ideals. *Order*, **16** pp. 305–312, 1999.
- [4] M.O. BALL, J.S. PROVAN. Calculating bounds on reachability and connectedness in stochastic networks. *Networks*, **13** pp. 253–278, 1983.
- [5] V.C. BARBOSA, J.L. SZWARCFITER. Generating all the acyclic orientations of an undirected graph. *Inform. Proc. Lett.*, **72** pp. 71–74, 1999.
- [6] K. BERTET, J. GUSTEDT, M. MORVAN. Weak-Order Extensions of an Order. *Theoret. Comput. Sci.*, **304** pp. 249–268, 2003.
- [7] R. BONNET, M. POUZET. Extensions et stratifications d'ensembles dispersés. *C. R. Acad. Sci., Ser. A*, **268** pp. 1512–1515, 1969.
- [8] J.-P. BORDAT. Calcul des idéaux d'un ordonné fini. *Recherche Opérationnelle/ Oper. Res.*, **25** pp. 265–275, 1991.

- [9] A. BRANDSTÄDT, V.B. LE, J.P. SPINRAD. *Graph Classes — A Survey*, SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, Philadelphia, 1999.
- [10] G. BRIGHTWELL, P. WINKLER. Counting linear extensions. *Order*, **8** pp. 225–242, 1991.
- [11] E.R. CANFIELD, S.G. WILLIAMSON. A loop-free algorithm for generating the linear extensions of a poset. *Order*, **12** pp. 57–75, 1995.
- [12] R.C. CORRÊA, J.L. SZWARCFITER. On extensions, linear extensions, upsets and downsets of ordered sets. *Discrete Math.*, **295** pp. 13–30, 2005.
- [13] R.C. CORRÊA, J.L. SZWARCFITER. On extensions, linear extensions, upsets and downsets of ordered sets. *Electronic Notes on Discrete Mathematics*, **5** pp. 71–74, 2000.
- [14] R.P. DILWORTH. A decomposition theorem for partially ordered sets. *Ann. Math.*, **51** pp. 161–166, 1950.
- [15] B. DUSHNIK, E.W. MILLER. Partially ordered sets. *Amer. J. Math.*, **63** pp. 600–610, 1941.
- [16] S. FELSNER, J. GUSTEDT, M. MORVAN. Interval reductions and extensions of orders: bijections to chains in lattices. *Order*, **15** pp. 221–246, 1999.
- [17] P.C. FISHBURN. Intransitive indifference with unequal indifference intervals. *J. Math. Psych.*, **7** pp. 144–149, 1970.
- [18] B. GANTER, K. REUTER. Finding all closed sets: a general approach. *Order*, **8** pp. 283–290, 1991.
- [19] M.C. GOLUMBIC. *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*, Academic Press, New-York, 1980.

- [20] M.C. GOLUMBIC. Trivially perfect graphs. *Discrete Math.*, **24** pp. 105–107, 1978.
- [21] M. HABIB, R. MEDINA, L. NOURINE, G. STEINER. Efficient algorithms on distributive lattices. *Disc. Appl. Math.*, **110** pp. 169–187, 2001.
- [22] M. HABIB, M. MORVAN, M. POUZET, J.-X. RAMPON. Extensions intervallaires minimales. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser I*, **313** pp. 893–898, 1991.
- [23] M. HABIB, M. MORVAN, J.-X. RAMPON. On the calculation of transitive reduction-closure of orders. *Discrete Math.*, **111** pp. 289–303, 1993.
- [24] M. HABIB, L. NOURINE. Tree structure for distributive lattices and its applications. *Theoret. Comput. Sci.*, **165** pp. 391–405, 1996.
- [25] M. HABIB, L. NOURINE, G. STEINER. Gray codes for the ideals of interval orders. *J. Algorithms*, **25** pp. 52–66, 1997.
- [26] T. HIRAGUCHI. On the dimension of orders. *Sci. Rep. Kanazawa Univ.*, **4** pp. 1–20, 1955.
- [27] B. JAUMARD, M. MINOUX. An efficient algorithm for the transitive closure and a linear worst-case complexity result for a class of sparse graphs. *Inform. Proc. Lett.*, **22** (4) pp. 163–169, 1986.
- [28] R. JÉGOU, R. MEDINA, L. NOURINE. Linear space algorithm for on-line detection of global predicates. J. Desel (Ed.), *Structures in Concurrency Theory*, Springer, Berlin, pp. 175–189, 1995.
- [29] A.D. KALVIN, Y.L. VAROL. On the generation of all topological sortings. *J. Algorithms*, **4** pp. 150–162, 1983.

- [30] E.P.C. KAO, M. QUEYRANNE. On dynamic programming methods for assembly line balancing. *Oper. Res.*, **30** pp. 375–390, 1982.
- [31] D.E. KNUTH, J.L. SZWARCFITER. A structured program to generate all topological sorting arrangements. *Inform. Proc. Lett.*, **2** pp. 153–157, 1974.
- [32] Y. KODA, F. RUSKEY. A Gray Code for the ideals of a forest poset. *J. Algorithms*, **15** pp. 324–340, 1993.
- [33] H. KOMM. On the dimension of partially ordered sets. *Amer. J. Math.*, **70** pp. 507–520, 1948.
- [34] E.L. LAWLER. Efficient implementation of dynamic programming algorithms for sequencing problems. Report BW106/79, Stichting Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1979.
- [35] R.M. MCCONNELL, J. SPINRAD. Linear-time transitive orientation. In: *8th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pp. 19–25, 1997.
- [36] R.H. MÖHRING, F.J. RADERMACHER. The order-theoretic approach to scheduling: The deterministic case. In: *Advances in project scheduling*. R. Slowinski and J. Weglarz, Eds., Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, pp. 29–66, 1989.
- [37] C.H. PAPADIMITRIOU, M. YANNAKAKIS. Scheduling interval ordered tasks. *SIAM J. Comput.*, **8** pp. 405–409, 1979.
- [38] G. PENRICE. On-line algorithms for ordered sets and comparability graphs. *Disc. Appl. Math.*, **60** pp. 319–329, 1995.
- [39] O. PRETZEL. On the dimension of partially ordered sets. *J. Comb. Theory A*, **22** pp. 146–152, 1977.

- [40] J.S. PROVAN, M.O. BALL. The complexity of counting cuts and of computing the probability that a graph is connected. *SIAM J. Comput.*, **12** pp. 777–788, 1983.
- [41] G. PRUESSE, F. RUSKEY. Generating linear extensions fast. *SIAM J. Comput.*, **23** pp. 373–386, 1994.
- [42] G. PRUESSE, F. RUSKEY. Gray codes from antimatroids. *Order*, **10** pp. 239–252, 1993.
- [43] A.B. QUEIROZ, J.L. SZWARCFITER. Geração de extensões semiordens e intervalares de uma ordenação parcial. In: *XXXV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, pp. 2436–2445, SOBRAPO, 2003.
- [44] A.B. QUEIROZ, J.L. SZWARCFITER. Generating semi-order and interval extensions of a partially ordered set. Submitted.
- [45] I. RABINOVITCH. The dimension of semiorders. *J. Comb. Theory A*, **25** pp. 50–61, 1978.
- [46] F. RUSKEY. Research problem 90. *Discrete Math.*, **70** pp. 111–112, 1988.
- [47] F. RUSKEY. Generating linear extensions of posets by transpositions. *J. Comb. Theory B*, **54** pp. 77–101, 1992.
- [48] F. RUSKEY. Listing and counting subtrees of a tree. *SIAM J. Comput.*, **10** pp. 141–150, 1981.
- [49] C. SAVAGE. A Survey of Combinatorial Gray Codes. *SIAM Rev.*, **39** pp. 605–629, 1997.
- [50] L. SCHRAGE, K.R. BAKER. Dynamic programming solution for sequencing problems with precedence constraints. *Oper. Res.*, **26** pp. 444–449, 1978.

- [51] D. SCOTT, P. SUPPES. Foundational aspects of theories of measurement. *J. Symbolic Logic*, **23** pp. 113–128, 1958.
- [52] M.B. SQUIRE. Enumerating the Ideals of a Poset. Manuscript.
- [53] G. STEINER. An algorithm to generate the ideals of a partial order. *Oper. Res. Letters*, **5** pp. 317–320, 1986.
- [54] G. STEINER. Single machine scheduling with precedence constraints of dimension 2. *Math. Oper. Res.*, **9** pp. 248–259, 1984.
- [55] E. SZPILRAJN. Sur l’extension de l’ordre partiel. *Fund. Math.*, **16** pp. 386–389, 1930.
- [56] J.L. SZWARCFITER. Comunicação Pessoal, 2001–2005.
- [57] J.L. SZWARCFITER. Generating all forest extensions of a partially ordered set. In: *Proceedings of the 5th Italian Conference on Algorithms and Complexity*, Universita di Roma “La Sapienza”, Rome, Italy, 2003, *Lecture Notes on Computer Science*, 2653, pp. 132–139, 2003.
- [58] W.T. TROTTER JR. *Combinatorics and Partially Ordered Sets — Dimension Theory*, Johns Hopkins University Press, Baltimore, London, 1992.
- [59] W.T. TROTTER JR. Dimension of the crown  $S_n^k$ . *Discrete Math.*, **8** pp. 85–103, 1974.
- [60] W.T. TROTTER JR, K.P. BOGART. On the complexity of Posets. *Discrete Math.*, **16** pp. 71–82, 1976.
- [61] W.T. TROTTER JR, J. MOORE. The dimension of planar posets. *J. Comb. Theory B*, **22** pp. 54–67, 1977.
- [62] Y.L. VAROL, D. ROTEM. An algorithm to generate all topological sorting arrangements. *Comput. Journal*, **24** pp. 83–84, 1981.

- [63] S. WARSHALL. A theorem on boolean matrices. *Journal of the ACM*, **9** (1) pp. 11-12, 1962.
- [64] E.S. WOLK. A note on the comparability graph of a tree. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **16** pp. 17–20, 1965.
- [65] E.S. WOLK. The comparability graph of a tree. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13** pp. 789–795, 1962.
- [66] J. YÁÑEZ , J. MONTERO. A poset dimension algorithm. *J. Algorithms*, **30** pp. 185–208, 1999.
- [67] M. YANNAKAKIS. On the complexity of the partial order dimension problem. *SIAM J. Alg. Discr. Meth.*, **3** pp. 351–358, 1982.