



PROPRIEDADES ESTRUTURAIS DOS GRAFOS CORDAIS
COMPARABILIDADE

Rodrigo Fernandes Souto

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientador: Márcia Rosana Cerioli

Rio de Janeiro
Dezembro de 2024

PROPRIEDADES ESTRUTURAIS DOS GRAFOS CORDAIS
COMPARABILIDADE

Rodrigo Fernandes Souto

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Orientador: Márcia Rosana Cerioli

Aprovada por: Prof. Márcia Rosana Cerioli
Prof. Nair Maria Maia Abreu
Prof. Fabiano de Souza Oliveira
Prof. Jorge Petrucio Viana

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
DEZEMBRO DE 2024

Fernandes Souto, Rodrigo

Propriedades Estruturais dos Grafos Cordais Comparabilidade/Rodrigo Fernandes Souto. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2024.

IX, 104 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Márcia Rosana Cerioli

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2024.

Referências Bibliográficas: p. 100 – 103.

1. Grafos cordais comparabilidade. 2. Grafos de interseção. 3. Árvores características. 4. Dimensão linear. 5. Grafos split comparabilidade. I. Rosana Cerioli, Márcia. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

*Ao Bento, à Catarina e à
Clarice.*

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

PROPRIEDADES ESTRUTURAIS DOS GRAFOS CORDAIS
COMPARABILIDADE

Rodrigo Fernandes Souto

Dezembro/2024

Orientador: Márcia Rosana Cerioli

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Um grafo G é cordal se todo ciclo de tamanho pelo menos 4 em G possui uma corda; é de comparabilidade se admite uma orientação transitiva de suas arestas; e é cordal comparabilidade se é simultaneamente cordal e de comparabilidade. Neste texto, revisamos alguns resultados estruturais sobre os grafos cordais comparabilidade e apresentamos alguns novos resultados. A saber, mostramos que a classe dos grafos cordais comparabilidade é uma classe de interseção, ao construir uma classe de famílias de subárvores \mathcal{T} tal que os grafos cordais comparabilidade são os grafos de interseção de \mathcal{T} . Provamos a inexistência de um limite superior para o grau máximo de árvores características dos grafos cordais comparabilidade. Mais especificamente, provamos que para todo $n \geq 3$, existe um grafo cordal comparabilidade RS_n tal que sua árvore característica é única e isomorfa a $K_{1,n}$. Finalmente, provamos que a dimensão linear dos grafos *split* comparabilidade, uma subclasse dos grafos cordais comparabilidade, é menor ou igual a 3.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

STRUCTURAL PROPERTIES OF CHORDAL COMPARABILITY GRAPHS

Rodrigo Fernandes Souto

December/2024

Advisor: Márcia Rosana Cerioli

Department: Systems Engineering and Computer Science

A graph G is chordal if every cycle of size at least 4 in G has a chord; it is a comparability graph if it admits a transitive orientation of its edges; and it is a chordal comparability graph if it is both a chordal graph and a comparability graph. In this text, we review some structural results about chordal comparability graphs and present some new results. Namely, we show that the class of chordal comparability graphs is an intersection class, by defining a class of families of subtrees \mathcal{T} such that the chordal comparability graphs are the intersection graphs of \mathcal{T} . We prove the non-existence of an upper bound for the maximum degree of clique trees of chordal comparability graphs. More specifically, we prove that for every $n \geq 3$, there exists a chordal comparability graph RS_n such that its clique tree is unique and isomorphic to $K_{1,n}$. Finally, we prove that the linear dimension of the split comparability graphs is less than or equal to 3.

Sumário

Lista de Figuras	viii
1 Introdução	1
2 Grafos cordais e grafos de comparabilidade	7
2.1 Grafos cordais	7
2.2 Grafos de comparabilidade	19
3 Grafos cordais comparabilidade	30
3.1 Grafos cordais comparabilidade	30
3.2 Caracterização por subgrafos induzidos proibidos	32
4 Grafos de interseção	34
4.1 A classe Comparabilidade é classe de interseção	35
4.2 Grafos cordais comparabilidade como grafos de interseção	38
5 Árvores características	47
5.1 Árvores características dos grafos RS_1, \dots, RS_4	47
5.2 Árvores características dos grafos RS_n	53
6 Dimensão linear	59
6.1 Dimensão linear dos grafos cordais comparabilidade	60
6.2 Dimensão linear dos grafos <i>split</i> comparabilidade	85
7 Conclusão	98
Referências Bibliográficas	100

Lista de Figuras

1.1	Diagrama das classes Cordal, Cocordal, Comparabilidade e Cocomparabilidade.	2
2.1	Um grafo cordal.	8
2.2	O grafo de Petersen não é cordal.	9
2.3	Um grafo cordal G com duas árvores características.	16
2.4	Dois árvores características para G	17
2.5	Grafo de comparabilidade G	21
2.6	O grafo net não é grafo de comparabilidade.	22
2.7	Digrafo D associado ao grafo G da Figura 2.5.	23
2.8	Grafos \overline{C}_n , para $n \geq 6$	26
2.9	Grafos XF_5^{2n+3} e XF_6^{2n+2} , para $n \geq 0$, respectivamente.	26
2.10	Grafos \overline{T}_2 , \overline{X}_2 e \overline{X}_3	26
2.11	Grafos C_{2n-1} , para $n \geq 3$	27
2.12	Grafos \overline{X}_{30} , \overline{X}_{31} , \overline{X}_{32} , \overline{X}_{33} , \overline{X}_{34} , \overline{X}_{35} e \overline{X}_{36}	27
2.13	Grafos XF_2^{n+1} , XF_3^n e XF_4^n , para $n \geq 0$	27
3.1	Ciclos C_n para $n \geq 4$	32
3.2	Grafos XF_1^{2n+3} e XF_6^{2n+2} , para $n \geq 0$	32
3.3	Grafos \overline{X}_{34} e \overline{X}_{36}	32
3.4	Grafos de Hajós, net e co-rising-sun.	33
4.1	O grafo $\Omega(\mathcal{F})$	35
4.2	O grafo <i>rising-sun</i> , G , e uma orientação transitiva, O , de G	38
4.3	Árvore característica T_G do rising-sun.	39
4.4	A árvore T construída a partir de T_G	39
4.5	A subárvore T_b associada ao vértice b	40
4.6	Família \mathcal{F} das subárvores de T	41
5.1	Grafo RS_1 e sua árvore característica T_{RS_1}	48

5.2	Grafo RS_2 e sua árvore característica T_{RS_2}	48
5.3	Grafo RS_3 e sua árvore característica T_{RS_3}	49
5.4	O grafo RS_4 e sua árvore característica T_{RS_4}	50
5.5	Orientação das arestas de RS_4	51
5.6	Outra ilustração para a orientação das arestas de RS_4	51
5.7	Grafo RS_n	54
5.8	Árvore característica T_{RS_n} de RS_n	54
5.9	Outra ilustração para a orientação transitiva das arestas de RS_n	55
6.1	Grafo cordal comparabilidade G_P e seu digrafo D_P	60
6.2	Digrafos D_{P_1} e D_{P_2}	63
6.3	Um grafo G_P cordal comparabilidade com seu digrafo D_P	72
6.4	As extensões totais D_{P_1} e D_{P_2} de D_P	73
6.5	digrafo associado à relação Q_i	76
6.6	Ilustração parcial da relação R_{LC}	77
6.7	Esquema associado a G'_{RLC}	81
6.8	Os $2K_2$'s induzidos de G_{RLC}	83
6.9	O grafo RS_4 é split.	85
6.10	Estrutura geral dos grafos split de comparabilidade, não completos e conexos.	90
6.11	Orientação de um grafo <i>split</i> que satisfaz às condições do teorema.	91
6.12	Digrafo associado a um grafo split G de comparabilidade.	92

Capítulo 1

Introdução

Em Teoria dos Grafos, é comum o estudo de classes de grafos obtidas pela aplicação de certas operações aos grafos de uma determinada classe ou a classes de grafos previamente dadas. Exemplos bem conhecidos são as classes **Cocordal**, formada pelos grafos que são os complementos dos grafos cordais¹; **Cocomparabilidade**, formada pelos complementos dos grafos de comparabilidade; **Split**, que é a interseção das classes **Cordal** e **Cocordal**; **Permutação**, que é a interseção das classes **Comparabilidade** e **Cocomparabilidade**; e **Intervalo**, que é a interseção das classes **Cordal** e **Cocomparabilidade**: A Figura 1.1 ilustra as relações de interseção e complementação das classes **Cordal** e **Comparabilidade**. Em cada região do diagrama há um grafo que pertence apenas à subclasse definida por aquela região.

No livro [17], M. C. Golumbic apresenta estudos detalhados sobre as classes **Cordal** e **Comparabilidade**, bem como sobre as classes **Split**, **Permutação**, **Intervalo** e **Threshold**, que estão relacionadas com **Cordal** e **Comparabilidade** através das operações complemento de um grafo e interseção de classes de grafos. Porém, em [17], nada é dito sobre a interseção das classes **Cordal** e **Comparabilidade**. Este fato mostra um ângulo sobre o qual parece haver pouco na literatura sobre a interseção destas classes. Portanto, surge naturalmente um interesse em se fazer um estudo aprofundado sobre este tema.

Um grafo é **cordal comparabilidade** se é, simultaneamente, cordal e de comparabilidade. Denotamos por **Cordal comparabilidade** a classe de todos os grafos cordais comparabilidade.

De maneira geral, os resultados já existentes sobre **Cordal comparabilidade** podem

¹No que segue, quando definimos um tipo de grafo por uma *palavra*, empregamos a mesma palavra em letra sem serifa para definir a classe de grafos correspondente. Além disso, quando não há uma inconsistência gramatical, empregamos a denominação Nome de uma classe de grafos e a expressão “grafos nome” intercambiadamente.

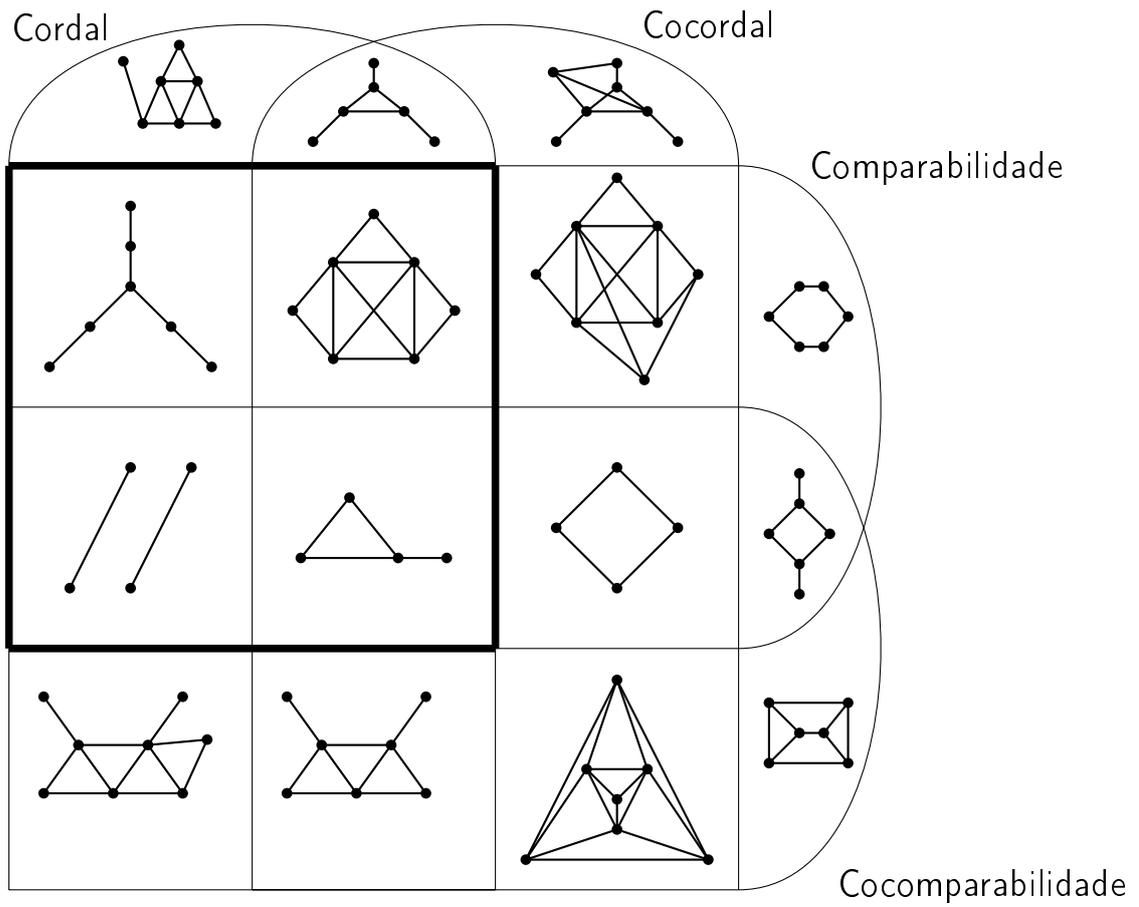


Figura 1.1: Diagrama das classes Cordal, Cocordal, Comparabilidade e Cocomparabilidade.

ser classificados em três categorias: os que são adaptações mais ou menos diretas dos resultados já existentes sobre os grafos cordais e sobre os grafos de comparabilidade; os que são adaptações de resultados sobre os grafos cordais ou sobre os grafos de comparabilidade, mas cujo estabelecimento necessita de construções novas; e os que destacam aspectos realmente novos e, aparentemente, característicos dos grafos cordais comparabilidade. Um dos principais objetivos deste trabalho — além de exemplificar estas facetas dos estudos sobre Cordal comparabilidade — é apresentar resultados estruturais que destaquem algum aspecto novo sobre os grafos cordais comparabilidade.

Na bibliografia sobre o tema, encontramos apenas duas caracterizações dos grafos cordais comparabilidade. A primeira, de 1999, devida a R. B. Borie e J. P. Spinrad [1], é uma adaptação direta das caracterizações dos grafos cordais e de comparabilidade por *subgrafos induzidos proibidos*. A outra, de 2016, devida a H. Ohsugi e T. Hibi [34], apresenta uma faceta não trivial, de caráter mais algébrico do que combinatório, dos grafos cordais comparabilidade, pois emprega ferramentas algébricas como *bases de Gröbner quadráticas* de *ideais tóricos* associados a *multicadeias de conjuntos parcialmente ordenados*.

Por outro lado, condições necessárias mas não suficientes para um grafo ser cordal comparabilidade aparecem na bibliografia em maior quantidade. Estas estão descritas sumariamente a seguir — apenas a primeira delas é detalhada neste texto.

Em 1991, T.-H. Ma e Spinrad [30] provaram que a *dimensão linear* dos grafos cordais comparabilidade é menor ou igual a 4. O resultado de Ma e Spinrad foi complementado, em 1992, por H. A. Kierstead, W. T. Trotter e J. Qin [28], que exibiram um grafo cordal comparabilidade que possui dimensão exatamente 4.

Em 1999, Borie e Spinrad [1] definiram a noção de *esquema de eliminação simples* e forneceram um algoritmo que, dado um grafo cordal comparabilidade, obtém um esquema de eliminação simples de seus vértices. Os autores deixaram a entender que esta noção fornece uma caracterização dos grafos cordais comparabilidade, o que não é verdade, uma vez que existem grafos que não são cordais comparabilidade e possuem esquemas de eliminação simples.

Uma terceira condição necessária, mas não suficiente, foi descrita por D. S. Gunderson, V. Rödl e N. W. Sauer, em 1993 [20]. Para os grafos F , G e H , e inteiro positivo r , a *seta de Ramsey* $F \rightarrow (G)_r^H$ significa que para toda partição, em no máximo r blocos, do conjunto dos subgrafos induzidos de F isomorfos a H , existe um subgrafo induzido de F isomorfo a G , digamos G' , tal que todos os subgrafos induzidos de G' isomorfos a H pertencem a um mesmo bloco da partição. Além disso, neste contexto, dizemos que um grafo G é *convexo* se existe uma ordem parcial de

$V(G)$ tal que a ordem linear com 3 pontos é a única ordenação dos vértices de P_3 induzida (como ordem) em G . Na verdade, Gunderson [19] já havia provado, em 1990, que para todo grafo G , existe um grafo F tal que $F \rightarrow (G)_2^{P_3}$ se, e somente se, G é cordal comparabilidade ou G é convexo.

Um outro resultado, devido E. S. Wolk [47], não produz uma caracterização da classe Cordal comparabilidade mas, sim, de uma de suas subclasses. Wolk provou que os grafos *comparabilidade de árvore* — i.e., aqueles cujo *diagrama de Hasse* da ordem que define o grafo é uma árvore — possuem pelo menos um vértice universal. Baseado nisto, mostrou que um grafo é cordal comparabilidade *sem P_4 induzido* se, e somente se, é comparabilidade de árvore.

Os grafos cordais comparabilidade podem ser reconhecidos eficientemente pela aplicação de resultados herdados das duas classes que os definem.

O primeiro resultado sobre o reconhecimento de grafos cordais comparabilidade que encontramos é devido a Ma e Spinrad [31] que, em 1991, construíram um algoritmo que determina, em tempo linear, se um digrafo acíclico obtido de um grafo cordal é transitivo. Como corolário, os grafos cordais comparabilidade podem ser reconhecidos em $O(n^2)$. A parte mais lenta deste reconhecimento trata de orientar transitivamente um grafo cordal. Neste sentido, W.-L. Hsu e Ma [26, 27] apresentaram um algoritmo linear para *decomposição modular* em grafos cordais. Baseados neste algoritmo, exibem, em tempo linear, uma orientação transitiva para um grafo cordal comparabilidade. Estes resultados otimizaram o reconhecimento dos grafos cordais comparabilidade de $O(n^2)$ para $O(n + m)$.

Concomitantemente, e em contraste com o trabalho de Hsu e Ma, R. M. McConnell e Spinrad [32] desenvolveram um outro algoritmo linear para decomposição modular de qualquer grafo, não apenas dos cordais. Como corolário, McConnell e Spinrad afirmam que o reconhecimento dos grafos cordais comparabilidade pode ser feito em $O(n + m \log n)$.

Os livros [2, 17, 25, 33, 42, 44] e a página web [43] contém informações relevantes para o estudo dos grafos cordais comparabilidade.

Neste trabalho, nos concentramos em *resultados estruturais* relativos a Cordal comparabilidade e, como consequência, a classes correlatas a esta. Principalmente, revisamos o resultado de Golumbic e Scheinerman [18] que mostram que Comparabilidade é uma *classe de inclusão*; o resultado de Borie e Spinrad [1] que caracteriza os grafos cordais comparabilidade por *subgrafos induzidos proibidos*; o resultado de Borie e Spinrad [1], que mostram que a *dimensão linear* dos grafos cordais comparabilidade é menor ou igual a 4; e o resultado de Ma e Spinrad [30], que exibem uma família de grafos que prova que este limite é justo. Em adição a estes resultados,

apresentamos os seguintes:

- *Uma caracterização dos grafos cordais comparabilidade como grafos de interseção* — resolvendo um problema proposto por [30] e, novamente, em [1].
- *Uma prova de que o grau máximo das árvores características dos grafos cordais comparabilidade é ilimitado.* Este resultado apresenta um contraste entre Cordal comparabilidade e Cordal cocomparabilidade — ou seja Intervalo —, outra importante subclasse de grafos cordais, que é caracterizada pelo fato de um grafo G ser de intervalo se, e somente se, possui uma árvore característica cujo grau máximo é menor ou igual a 2.
- *Uma prova de que o limite superior para a dimensão linear dos grafos split de comparabilidade é 3.*

O texto está estruturado do seguinte modo.

No Capítulo 2, revisamos definições e resultados sobre os grafos cordais e sobre os grafos de comparabilidade. Desta forma, revisamos também definições e resultados sobre ordens parciais. Todos os resultados apresentados são bem conhecidos e podem ser encontrados em [2, 17, 33].

No Capítulo 3, revisamos a definição dos grafos cordais comparabilidade e a sua caracterização por subgrafos induzidos proibidos [1].

No Capítulo 4, revisamos a definição de classe de interseção e o Teorema de Scheinerman [41], que caracteriza as classes de interseção por meio de certas propriedades estruturais. Baseados no Teorema de Scheinerman, mostramos que Comparabilidade é classe de interseção. Além disso, exibimos um *modelo de interseção* para Cordal comparabilidade, listando condições que caracterizam as famílias de subárvores de certas árvores, cujos *grafos de interseção* são exatamente os grafos cordais comparabilidade. Este resultado foi apresentado no IX Encontro de Teoria da Computação (ETC 2024) [5].

No Capítulo 5, provamos que o grau máximo das árvores características dos grafos cordais comparabilidade é ilimitado. Para isto, exibimos uma classe de grafos cordais comparabilidade, RS_n , $3 \leq n$, tal que cada RS_n possui uma estrela de grau máximo n como única árvore característica. Este resultado foi apresentado no VIII Encontro de Teoria da Computação (ETC 2023) [4].

No Capítulo 6, revisamos definições e resultados sobre a dimensão linear das ordens parciais. De maneira natural, este conceito é estendido para os grafos de comparabilidade. Feito isso, detalhamos o resultado principal de Ma e Spinrad [30]: se G é um grafo cordal comparabilidade, então sua dimensão linear é no máximo 4.

Em seguida, pormenorizamos o resultado de Kierstead, Trotter e Qin [28], que exibe um grafo cordal comparabilidade cuja dimensão linear é exatamente 4, mostrando que o limite apresentado em [30] é justo. Por último, acrescentamos um resultado nesta linha de investigação, apresentando uma prova detalhada da caracterização, de Ortiz e Villanueva [35], dos grafos *split* de comparabilidade e, por meio dela, mostrando que a dimensão linear dos grafos *split* de comparabilidade é no máximo 3.

No Capítulo 7, revisamos o trabalho desenvolvido, de modo a levantar problemas e temas que poderão ser tratados em estudos futuros.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Capítulo 2

Grafos cordais e grafos de comparabilidade

Neste capítulo, apresentamos uma revisão dos conceitos e resultados sobre Cordal e Comparabilidade que são empregados neste texto. Dividimos o capítulo em duas seções cujo conteúdo está descrito a seguir.

Na Seção 2.1, revisamos a definição e três resultados fundamentais referentes aos grafos cordais. Seguimos o roteiro clássico. Primeiro, apresentamos a definição usual, por meio da existência de cordas em ciclos de determinado tamanho. A seguir, apresentamos a definição de vértice simplicial e a caracterização dos grafos cordais pela existência de vértices simpliciais. Em seguida, apresentamos a definição de árvore característica e a caracterização dos grafos cordais como os grafos que possuem árvores características. Finalmente, exibimos a prova de que um grafo é cordal se, e somente se, é grafo de interseção de subárvores de uma árvore.

Na Seção 2.2, revisamos a definição e duas caracterizações dos grafos de comparabilidade. Aqui, também, seguimos o roteiro clássico. Primeiramente, revisamos a noção de ordem parcial e associamos a cada ordem parcial um grafo de comparabilidade. Em seguida, revisamos a caracterização dos grafos de comparabilidade por subgrafos induzidos proibidos. Finalmente, mostramos que os grafos de comparabilidade são os grafos de inclusão de subestrelas de uma estrela.

2.1 Grafos cordais

Os grafos cordais são definidos por meio da existência de cordas em ciclos de tamanho maior ou igual a 4, o que resulta em uma proibição de ciclos induzidos que não sejam triângulos.

Definição 1. Um grafo G é **cordal** se todo ciclo de tamanho pelo menos 4 em G possui uma corda, isto é, uma aresta que une dois vértices não consecutivos do ciclo.

Denotamos por **Cordal** a classe de todos os grafos cordais.

Podemos caracterizar os grafos cordais através de subgrafos induzidos proibidos.

Teorema 1. Um grafo G é cordal se, e somente se, não possui ciclos de tamanho pelo menos 4 como subgrafos induzidos.

PROVA. (\Rightarrow) Seja G um grafo cordal. Suponhamos, para uma contradição, que G possui um ciclo C_k como subgrafo induzido, com $k \geq 4$. Como G é cordal, por definição, existe uma corda entre dois vértices não consecutivos de C_k , contradizendo que C_k é subgrafo induzido.

(\Leftarrow) Seja G um grafo que não possui um ciclo C_k , com $k \geq 4$, como subgrafo induzido. Desta forma, todo ciclo de tamanho pelo menos 4 em G possui uma corda entre algum par de vértices não consecutivos. Logo, por definição, G é cordal. ■

Exemplo 1. Verifica-se diretamente que o grafo abaixo é cordal:

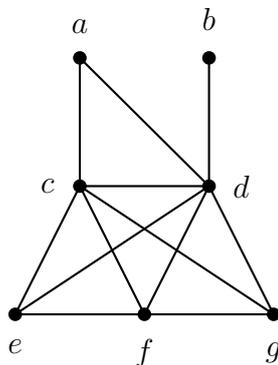


Figura 2.1: Um grafo cordal.

Por outro lado, o *Grafo de Petersen*, da Figura 2.2, não é cordal:

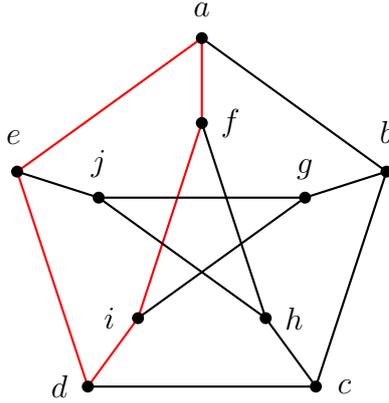


Figura 2.2: O grafo de Petersen não é cordal.

De fato, como indicado, os vértices a , f , i , d e e induzem um C_5 no grafo de Petersen.

Os grafos cordais foram introduzidos por A. Hajnal e J. Surányi [23], em 1958, pela proibição de *circuitos sem cordas*. Em 1961, G. Dirac [8] caracterizou os grafos cordais através de *separadores minimais*. Mais tarde, em 1962, C. G. Lekkerkerker e J. Ch. Boland [29] provaram que todo grafo cordal não completo possui dois *vértices simpliciais* não adjacentes. Usando este fato, D. R. Fulkerson e O. A. Gross [12] descreveram em 1965, de modo genérico, o processo iterativo de retirada de vértices simpliciais de um grafo cordal: retiramos um vértice simplicial do grafo, obtendo um outro grafo cordal a partir do qual repetimos o processo, iteradamente, até esgotarmos os vértices do grafo e obtermos uma sequência com todos os vértices do grafo original. Mais tarde, em 1970, este processo foi desenvolvido formalmente por D. J. Rose [39] que nomeou essa sequência de vértices como *esquema de eliminação perfeito*. Rose provou que a existência de um esquema de eliminação perfeito caracteriza o fato do grafo ser cordal. Rose, R. E. Tarjan e G. S. Leuker [40] desenvolveram o aspecto algorítmico dos esquemas de eliminação perfeito, reconhecendo os grafos cordais linearmente. Por outro lado, somente em 1973, F. Gavril [14] e, em 1974, P. Buneman [3], demonstraram que os grafos cordais são caracterizados em termos de *grafos de interseção*, de fato, os grafos cordais são os grafos de interseção de subárvores de uma árvore. Outros aspectos combinatórios e algorítmicos dos grafos cordais podem ser encontrados em [2, 17]. Em particular, os problemas do ciclo hamiltoniano, conjunto dominante e corte máximo são NP-completos na classe Cordal; existem algoritmos eficientes para os problemas de coloração, clique, conjunto independente e cobertura por cliques; e o problema de determinar se dois grafos cordais são isomorfos é GI-completo. Os livros [2, 17, 33] contêm estudos detalhados sobre os grafos cordais. Nos limitamos apenas a detalhar os conceitos e resultados que são empregados nos capítulos seguintes.

A classe dos grafos cordais é hereditária.

Proposição 1. Se G é um grafo cordal e H é um subgrafo induzido de G , então H é um grafo cordal.

PROVA. Suponha, para uma contradição, que existe subgrafo induzido H de G que possui um C_k como subgrafo induzido, com $4 \leq k$. Desta forma, C_k também é subgrafo induzido de G , uma contradição. ■

Lekkerkerker e Boland [29] introduziram o conceito de *vértice simplicial* e caracterizaram os grafos cordais através da existência destes vértices.

Definição 2. Seja G um grafo e $v \in V(G)$. Dizemos que v é **simplicial** se $N(v)$ é uma clique.

Todo grafo completo é grafo cordal e todos os vértices de um grafo completo são simpliciais. Veremos, agora, que todo grafo cordal possui um vértice simplicial. E mais, um grafo cordal que não é um grafo completo possui ao menos dois vértices simpliciais não adjacentes.

Proposição 2. [Lekkerkerker & Boland, 1962] Se G é um grafo cordal não completo, então G possui ao menos dois vértices simpliciais não adjacentes.

PROVA. Por indução em $|V(G)| = n$.

Base: Suponhamos que $n = 2$. Pela hipótese, $G = 2K_1$ e, pela definição, G tem dois vértices simpliciais não adjacentes.

Hipótese: Suponhamos que se G é um grafo cordal não completo com $|V(G)| \leq n$, então G possui ao menos dois vértices simpliciais não adjacentes.

Passo: Seja G um grafo cordal não completo com $|V(G)| = n + 1$.

Tomemos $a, b \in V(G)$ tais que $ab \notin E(G)$.

Consideremos S um ab -separador minimal em G , isto é, $S \subseteq V(G)$ tal que $G \setminus S$ é desconexo e a e b pertencem a componentes conexas distintas.

Sejam G_a e G_b as componentes conexas de $G \setminus S$ que contêm a e b , respectivamente.

Vamos provar que S é uma clique. De fato, suponhamos, para uma contradição, que existem $x, y \in S$ tais que $xy \notin E(G)$. Como S é minimal, x possui vizinhos x_a em G_a e x_b em G_b ; e, pela mesma razão, y possui vizinhos y_a em G_a e y_b em G_b . Tomemos um caminho P_a , em G_a , de x_a para y_a com o menor tamanho possível e um caminho P_b , em G_b , de x_b para y_b , também, com o menor tamanho possível. O

conjunto de vértices $\{x_a, x, x_b\} \cup V(P_b) \cup \{y_b, y, y_a\} \cup V(P_a)$ produz¹ um ciclo em G . Este ciclo tem tamanho maior ou igual a 4, uma contradição. Logo, S é uma clique.

Agora, consideremos os subgrafos induzidos $H_a = G[S \cup V(G_a)]$ e $H_b = G[S \cup V(G_b)]$, de G .

Vamos considerar quatro casos.

Caso 1. Se H_a e H_b são completos, todos os vértices de G_a e G_b são simpliciais em G . Em particular, $a \in V(G_a)$ e $b \in V(G_b)$ são simpliciais em G e não são adjacentes.

Caso 2. Se H_a é completo e H_b não é completo, pela hipótese de indução, H_b tem dois vértices simpliciais não adjacentes, digamos u e v . Como S é clique, pelo menos um destes vértices, digamos u , está em G_b e é simplicial de G . Por outro lado, como H_a é completo, todos os vértices de G_a são simpliciais de G . Portanto, u e a são vértices simpliciais não adjacentes de G .

Caso 3. Se H_a não é completo e H_b é completo, um raciocínio análogo ao do Caso 2 mostra que G possui dois vértices simpliciais não adjacentes.

Caso 4. Se H_a e H_b não são completos, pela hipótese de indução, H_a possui vértices simpliciais u_a e v_a não adjacentes e H_b possui vértices simpliciais u_b e v_b não adjacentes. Como S é clique, pelo menos um dos vértices u_a ou v_a , digamos u_a , está em G_a . Analogamente, u_b está em G_b . Logo, u_a e u_b são vértices simpliciais não adjacentes de G . ■

A Proposição 2 desempenha um papel fundamental em, pelo menos, duas caracterizações estruturais dos grafos cordais. A primeira, utiliza diretamente a noção de vértice simplicial.

Teorema 2. Um grafo G é cordal se, e somente se, todo subgrafo induzido de G tem ao menos um vértice simplicial.

PROVA. (\Rightarrow) Sejam G um grafo cordal e H um subgrafo induzido de G . Vamos considerar dois casos. Se H é completo, todo vértice de H é simplicial. Se H não é completo, pelas Proposições 1 e 2, H tem dois vértices simpliciais não adjacentes. Logo, H tem ao menos um vértice simplicial.

(\Leftarrow) Suponhamos que todo subgrafo induzido de G tem ao menos um vértice simplicial. Agora, suponhamos, para uma contradição, que G não é cordal. Portanto, existe um ciclo C_k , com $k \geq 4$, que é subgrafo induzido de G . Por ser um ciclo com

¹Este conjunto de vértices não induz, necessariamente, um ciclo em G , pois x pode ser adjacente a outros vértices de P_a ou P_b . Entretanto, mesmo que isto ocorra, existe um ciclo induzido — *produzido* — por tal conjunto de vértices.

mais de três vértices, C_k não possui vértices simpliciais, uma contradição. Portanto, G é cordal. ■

A segunda caracterização, devida a Fulkerson e Gross [12], utiliza a noção de *esquema de eliminação perfeito* (EEP).

Definição 3. Seja G um grafo e (v_1, \dots, v_n) uma permutação dos vértices de G . Dizemos que (v_1, \dots, v_n) é um **esquema de eliminação perfeito** de G se, para todo i , $1 \leq i \leq n$, v_i é vértice simplicial de $G[\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\}]$.

Teorema 3. [Fulkerson & Gross, 1965] Um grafo G é cordal se, e somente se, G possui um esquema de eliminação perfeito.

PROVA. (\Rightarrow) Seja G um grafo cordal. Pela Proposição 2, existe $v_1 \in V(G)$ tal que v_1 é simplicial. Consideremos $G - v_1 = (V(G) \setminus \{v_1\}, E(G) \setminus \{uv_1 : u \in V(G)\})$. Como $G - v_1$ é grafo cordal, pela Proposição 2, existe $v_2 \in V(G - v_1)$ tal que v_2 é simplicial. Consideremos, agora, $(G - v_1) - v_2$. Como $(G - v_1) - v_2$ é grafo cordal, pela Proposição 2, existe $v_3 \in V((G - v_1) - v_2)$ tal que v_3 é simplicial. Como $V(G)$ é finito, este processo deve terminar ao escolhermos o vértice, digamos v_n , em $V(G)$. Por construção, a sequência (v_1, \dots, v_n) é tal que para todo i com $1 \leq i \leq n$, v_i é vértice simplicial de $G[\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\}]$. Isto é, (v_1, \dots, v_n) é EEP.

(\Leftarrow) Seja (v_1, \dots, v_n) um EEP de G . Vamos provar que o grafo G é cordal por indução em n .

Base: Suponhamos que $n = 1$. Neste caso, $G = K_1$, que é cordal.

Hipótese: Suponhamos que todo grafo G que possui um esquema de eliminação perfeito (v_1, \dots, v_n) é cordal.

Passo: Seja G é um grafo que possui um esquema de eliminação perfeito $(v_1, \dots, v_n, v_{n+1})$.

Consideremos $G - v_1$. Como (v_2, \dots, v_n) é EEP de $G - v_1$, temos, pela hipótese de indução, que $G - v_1$ é cordal. Suponhamos, para uma contradição, que G não é cordal. Desta forma, existe C_k induzido em G , onde $4 \leq k$, com k o menor possível. Vamos considerar dois casos. Se $v_1 \notin V(C_k)$, então C_k é induzido de $G - v_1$, uma contradição. Se $v_1 \in V(C_k)$, tomemos $u, v \in V(C_k) \cap N(v_1)$. Como v_1 é simplicial de G , temos que $uv \in E(G)$, uma contradição com o fato de C_k ser um ciclo induzido. ■

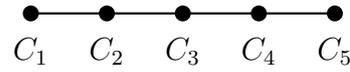
Mesmo tendo sido amplamente estudados desde 1960, foi apenas em meados de 1970 que os grafos cordais começaram a ser explorados como *grafos de interseção*. Recordamos que o *grafo de interseção* de uma família de conjuntos \mathcal{F} possui \mathcal{F} como

conjunto de vértices e dois vértices são adjacentes se, e somente se, têm interseção não vazia (cf. Seção 4.1). De maneira independente, Buneman [3], Gavril [14] e Walter [46] provaram que os grafos cordais são grafos de interseção de subárvores de uma árvore.

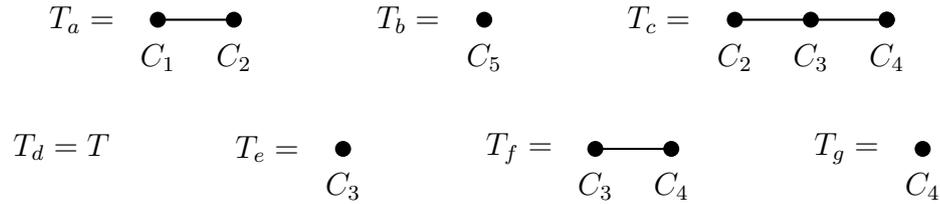
Definição 4. Seja G um grafo. Dizemos que G é **grafo de subárvores** se existem uma árvore T e uma família $\mathcal{F} = \{T_1, \dots, T_k\}$ de subárvores de T , tais que G é o grafo de interseção de \mathcal{F} .

Dizemos que duas subárvores T_i e T_j de T têm interseção não vazia quando T_i e T_j possuem pelo menos um vértice em comum, i.e, $V(T_i) \cap V(T_j) \neq \emptyset$.

Exemplo 2. Consideremos a árvore T :



E consideremos as seguintes subárvores de T :



O grafo cordal ilustrado na Figura 2.1 é o grafo de interseção de $\mathcal{F} = \{T_a, T_b, T_c, T_d, T_e, T_f, T_g\}$.

Dado um grafo G e $u, v \in V(G)$, denotamos por P_{uv} um caminho qualquer de u para v . Se G é árvore, então para todo par $u, v \in V(G)$, temos que P_{uv} é único. Além disso, quando conveniente, denotamos o conjunto $\{1, \dots, n\}$ por $[n]$.

Exemplo 3. O grafo C_4 não é grafo de subárvore.

De fato, suponhamos, para uma contradição que existem uma árvore T e uma família $\mathcal{F} = \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ de subárvores de T , tais que C_4 é o grafo de interseção de \mathcal{F} .

Pela estrutura do C_4 , temos $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$, $T_1 \cap T_3 \neq \emptyset$ e $T_2 \cap T_3 = \emptyset$. Logo, existem $a \in T_1 \cap T_2$ e $b \in T_1 \cap T_3$ tais que $a \neq b$.

Analogamente, como $T_2 \cap T_4 \neq \emptyset$, $T_3 \cap T_4 \neq \emptyset$ e $T_2 \cap T_3 = \emptyset$, existem $c \in T_2 \cap T_4$ e $d \in T_3 \cap T_4$ tais que $c \neq d$.

Agora, como $a \neq b \neq c \neq d$, os caminhos P_{ab} , P_{bd} , P_{dc} e P_{ca} formam um ciclo em T , uma contradição.

A caracterização dos grafos cordais como grafos de subárvores é baseada em dois resultados estruturais bem conhecidos:

- Se T é uma árvore e $u, v, w \in V(T)$, então $P_{uv} \subseteq P_{uw} \cup P_{vw}$. Além disso, existe $x \in V(T)$ tal que x pertence a P_{uv} , P_{uw} e P_{vw} .
- Se $p \geq 2$ e $\{T_1, \dots, T_p\}$ é uma família de subárvores de uma árvore tal que $T_i \cap T_j \neq \emptyset$, para quaisquer $i \neq j$ em $[p]$, então $\bigcap_{k=1}^p T_k \neq \emptyset$.

Agora, estamos aptos a caracterizar os grafos cordais como os grafos de subárvores.

Teorema 4. [Buneman 1972; Gavril, 1974; Walter, 1974] Um grafo G é cordal se, e somente se, G é grafo de subárvores.

PROVA. (\Rightarrow) Seja G um grafo cordal. Vamos provar, por indução em $n = |V(G)|$, que G é um grafo de subárvores.

Base: Suponhamos que $n = 1$. Neste caso, $G = K_1$. Daí, basta tomarmos $T = K_1$ como árvore e $\{T\}$ como a família de subárvores de T .

Hipótese: Suponhamos que se G é um grafo cordal com n vértices, então G é grafo de subárvores.

Passo: Seja G um grafo cordal com $V(G) = \{v_1, \dots, v_{n+1}\}$. Como G é cordal, G possui vértice simplicial v . Suponhamos, sem perda de generalidade, que $v = v_{n+1}$ e que $N(v_{n+1}) = \{v_1, \dots, v_k\}$. Como o grafo $G - v_{n+1}$ é cordal com n vértices, pela hipótese de indução, $G - v_{n+1}$ é grafo de subárvores. Isto é, existem uma árvore T' e uma família $\mathcal{F}' = \{T'_1, \dots, T'_n\}$ de subárvores de T' , tais que $G - v_{n+1}$ é grafo de interseção de \mathcal{F}' .

Como $G[\{v_1, \dots, v_k\}]$ é um grafo completo, o subconjunto $\{T'_1, \dots, T'_k\}$ de \mathcal{F}' é tal que $T'_i \cap T'_j \neq \emptyset$, para quaisquer $i \neq j$ em $[k]$. Daí, $\bigcap_{i=1}^k T'_i \neq \emptyset$. Tomemos $u \in \bigcap_{i=1}^k T'_i$.

Consideremos a árvore $T = (V(T') \cup \{y\}, E(T') \cup \{uy\})$ obtida a partir de T' ao adicionarmos o vértice y e a aresta uy . E consideremos T_1, \dots, T_{n+1} as subárvores de T definidas do seguinte modo:

$$\begin{cases} T_{n+1} &= T[y], \\ T_i &= T'_i, \text{ para cada } i \in \{k+1, \dots, n\}, \\ T_i + uy &= (V(T'_i) \cup \{y\}, E(T'_i) \cup \{uy\}), \text{ para cada } i \in \{1, \dots, k\}. \end{cases}$$

Vamos mostrar que G é o grafo de interseção da família $\{T_1, \dots, T_{n+1}\}$. De fato, vamos considerar dois casos.

Caso 1. Suponhamos que $v_i, v_j \in V(G)$ são tais que $i, j \neq n+1$. Neste caso, $v_i v_j \in E(G)$ se, e somente se, $v_i v_j \in E(G - v_{n+1})$. Mas, pela hipótese de indução, $v_i v_j \in E(G - v_{n+1})$ se, e somente se, $T'_i \cap T'_j \neq \emptyset$. Assim, pela definição das subárvores acima, $T'_i \cap T'_j \neq \emptyset$ se, e somente se, $T_i \cap T_j \neq \emptyset$.

Caso 2. Suponhamos que $v_i v_j \in V(G)$ são tais que $i = n+1$ ou $j = n+1$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $i = n+1$, daí $v_i v_j \in E(G)$ se, e somente se, $j \in \{1, \dots, k\}$. Mas, pela definição das subárvores acima, $j \in \{1, \dots, k\}$ se, e somente se, $T_j = (V(T'_j) \uplus \{y\}, E(T'_j) \uplus \{uy\})$. Porém, isto acontece se, e somente se, $T_i \cap T_j \neq \emptyset$.

(\Leftarrow) Seja G o grafo de subárvores da família $\{T_1, \dots, T_n\}$, onde, para cada $i \in [n]$, T_i é uma subárvore da árvore T .

Suponhamos, para uma contradição, que G não é cordal. Isto é, suponhamos que existem $v_1, \dots, v_k \in V(G)$, com $k \geq 4$, tal que $G[\{v_1, \dots, v_k\}] = C_k$.

Desta forma, C_k é o grafo de interseção da família de subárvores $\{T_1, \dots, T_k\}$ de T . Ou seja, C_k é grafo de subárvores.

Agora, mostraremos que, se C_k é grafo de subárvores, então C_{k-1} é grafo de subárvores.

De fato, tomemos $u \in T_{k-1} \cap T_k$ e $v \in T_k \cap T_1$. Como T é árvore, existe um único caminho de u para v , denotado por $P_{uv} = x_1 \dots x_r$, com $x_1 = u$ e $x_r = v$. Pela unicidade do caminho e pelo fato de P_{uv} também estar contido em T_k , pois $u, v \in V(T_k)$, obtemos $\{x_1, \dots, x_r\} \subseteq V(T_k)$. Agora, consideremos $\{T_1, \dots, T_{k-2}, T^*\}$, onde a subárvore

$$T^* = (V(T_{k-1}) \uplus \{x_2, \dots, x_r\}, E(T_{k-1}) \uplus \{ux_2, x_2x_3, \dots, x_{r-1}x_r\})$$

é obtida através da subárvore T_{k-1} ao adicionar o caminho P_{uv} . O grafo C_{k-1} é o grafo de interseção de $\{T_1, \dots, T_{k-2}, T^*\}$. Com efeito, as subárvores T_i , $i \in [k-2]$, geram um caminho induzido com $k-2$ vértices, pela hipótese, i.e, C_k ser grafo de interseção de $\{T_1, \dots, T_k\}$. Por outro lado, $T^* \cap T_{k-1} \neq \emptyset$, pois $T_{k-1} \cap T_{k-2} \neq \emptyset$, pela hipótese e pela construção de $V(T^*)$. Em adição, $T^* \cap T_1 \neq \emptyset$, pois $x_r = v \in T^k \cap T_1$ e $x_r \in V(T^*)$. Por outro lado, para todo $i \in \{2, \dots, k-3\}$, temos $T^* \cap T_i = \emptyset$. De fato, para todo $v \in V(T^*)$, temos $v \in V(T_{k-1})$ ou $v \in \{x_2, \dots, x_r\}$. Suponhamos que $v \in V(T_{k-1})$, daí, pela hipótese, $T_{k-1} \cap T_i = \emptyset$, para todo $i \in \{2, \dots, k-3\}$. Assim, $v \notin V(T_i)$, para todo $i \in \{2, \dots, k-3\}$. Suponhamos que $v \in \{x_2, \dots, x_r\}$. Como $\{x_2, \dots, x_r\} \subset V(T_k)$ e $T_k \cap T_i = \emptyset$, para todo $i \in \{2, \dots, k-3\}$, obtemos

que $v \notin V(T_i)$. Desta forma, T^* inclui, ao caminho induzido com $k - 2$ vértices já obtido através de $\{T_1, \dots, T_{k-2}\}$, um vértice e duas arestas a mais que formam um ciclo de tamanho $k - 1$.

Concluimos que se C_k é grafo de subárvores, então C_{k-1} é grafo de subárvores.

Aplicando este raciocínio iteradamente, concluimos que C_4 é grafo de subárvores. Uma contradição com o Exemplo 2.

Logo, os ciclos não são grafos de subárvore. Desta forma, G não pode ter ciclos como subgrafos induzidos e portanto G é cordal. ■

A última caracterização dos grafos cordais que vamos considerar também foi encontrada, de maneira independente, por Buneman [3], Gavril [14] e Walter [46]. Eles associaram a cada grafo cordal G uma árvore, possuindo uma certa característica, cujos vértices são as cliques maximais de G e provaram que os grafos cordais são os únicos grafos que possuem tais árvores denominadas por *árvores características*.

Seja G um grafo. O conjunto formado pelas cliques maximais de G será denotado por \mathcal{CM}_G . Ao longo do texto, caso não haja ambiguidade, utilizaremos apenas \mathcal{CM} . Além disso, dado $v \in V(G)$, o subconjunto de \mathcal{CM} formado pelas cliques maximais que contém v será denotado por $\mathcal{CM}_{G(v)}$. De maneira análoga, caso não haja ambiguidade, utilizaremos apenas \mathcal{CM}_v .

Definição 5. Seja G um grafo e T uma árvore. Dizemos que T é uma **árvore característica** de G se $V(T) = \mathcal{CM}_G$ e para cada $v \in V(G)$ existe uma subárvore T_v de T tal que $T_v = T[\mathcal{CM}_v]$.

Um mesmo grafo pode possuir árvores características não isomorfas.

Exemplo 4. Consideremos o grafo cordal G da Figura 2.3.

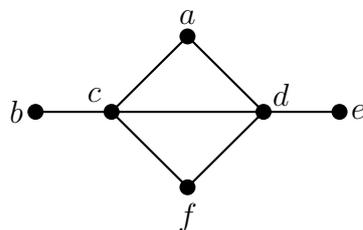


Figura 2.3: Um grafo cordal G com duas árvores características.

As duas árvores apresentadas na Figura 2.4 são árvores características de G .

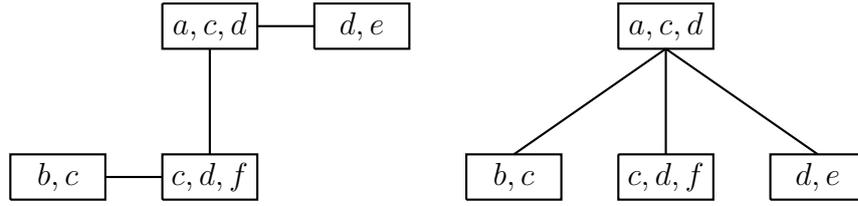


Figura 2.4: Duas árvores características para G .

A propriedade de possuir uma árvore característica caracteriza um grafo como cordal.

Teorema 5. [Buneman, 1972; Gavril, 1974; Walter, 1974] Um grafo G é cordal se, e somente se, possui uma árvore característica.

PROVA. (\Rightarrow) Seja G um grafo cordal. Vamos demonstrar, por indução em $n = |V(G)|$, que G possui uma árvore característica T_G .

Base: Suponhamos que $n = 1$. Como $\mathcal{CM}_G = \{\{v_1\}\}$, basta definir T_G e T_{v_1} do seguinte modo: $V(T_G) = V(T_{v_1}) = \mathcal{CM}_G$ e $E(T_G) = E(T_{v_1}) = \emptyset$. De fato, $T_{v_1} = T_G[\mathcal{CM}_G]$.

Hipótese: Suponhamos que todo grafo cordal G com $|V(G)| < n$ possui uma árvore característica T_G .

Passo: Seja G um grafo cordal com $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Vamos considerar três casos.

Caso 1. Suponhamos que G é um grafo completo. Como $\mathcal{CM}_G = \{\{v_1, \dots, v_n\}\}$, basta definir T_G e, para cada $i \in [n]$, T_{v_i} do seguinte modo: $V(T_G) = V(T_{v_i}) = \mathcal{CM}_G$ e $E(T_G) = E(T_{v_i}) = \emptyset$. De fato, dado $v_i \in V(G)$, temos $T_{v_i} = T[\mathcal{CM}_G]$.

Caso 2. Suponhamos que G não é completo e é desconexo. Sejam G_1, \dots, G_k as componentes conexas de G . Para cada $i \in [k]$, temos que G_i é cordal e $|V(G_i)| < n$. Daí, pela hipótese de indução, existe uma árvore característica T_{G_i} para G_i . Tomemos, para cada $i \in [k]$, uma clique maximal qualquer \mathcal{C}_i de G_i . Consideremos T_G definida do seguinte modo: $V(T_G) = \bigcup_{i=1}^k V(T_{G_i})$ e $E(T_G) = \bigcup_{i=1}^k E(T_{G_i}) \cup \{\mathcal{C}_i \mathcal{C}_{i+1} : 1 \leq i \leq k-1\}$. Pela hipótese de indução, $\bigcup_{i=1}^k V(T_{G_i}) = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{CM}_{G_i} = \mathcal{CM}_G$ e, para cada $u \in V(G)$, por G ser desconexo, existe $i \in [k]$ tal que $u \in V(G_i)$ onde $T_u = T_{G_i}[\mathcal{CM}_{G_i(u)}] = T_G[\mathcal{CM}_{G(u)}]$.

Caso 3. Suponhamos que G não é completo e é conexo, pela Proposição 2, como G é cordal, existem $a, b \in V(G)$ simpliciais tais que $ab \notin E(G)$. Tomemos $A = G[\{a\} \cup N(a)]$, a única clique maximal a qual a pertence. Seja $U = \{u \in A : N(u) \subset A\}$. Como a é simplicial, $N(a) \subset A$ e, portanto, $a \in U$. Desta forma, $U \neq \emptyset$.

Consideremos $Y = A - U$. Temos que $Y \neq \emptyset$. De fato, caso contrário, para todo $v \in A$ teríamos $N(v) \subset A$. Desta forma, G seria completo ou desconexo, uma contradição.

Agora, seja $G' = G - U = (V(G) \setminus U, E(G) \setminus \{uv : u \in U \text{ e } v \in V(G)\})$. Como G' é um grafo cordal com $|V(G')| < n$, pela hipótese de indução, G' possui árvore característica $T_{G'}$ onde $T_{G'(w)}$ é a subárvore de $T_{G'}$ associada ao vértice $w \in V(G')$ induzida por todas as cliques maximais que possuem w .

Se $Y \in \mathcal{CM}_{G'}$, então $\mathcal{CM}_G = (\mathcal{CM}_{G'} \setminus \{Y\}) \cup \{A\}$. Se $Y \notin \mathcal{CM}_{G'}$, então $\mathcal{CM}_G = \mathcal{CM}_{G'} \cup \{A\}$.

Vamos considerar dois subcasos.

3.1. Se $Y \in \mathcal{CM}_{G'}$, consideremos a árvore T_G construída como segue:

$$V(T_G) = (V(T_{G'}) \setminus Y) \cup \{A\}$$

$$E(T_G) = (E(T_{G'}) \setminus \{CY : C \in N_{T_{G'}}(Y)\}) \cup \{CA : C \in N_{T_{G'}}(Y)\}$$

Ou seja, a árvore T_G é obtida através de $T_{G'}$ ao trocar $Y \in V(T_{G'})$ por A .

Como $\mathcal{CM}_G = (\mathcal{CM}_{G'} \setminus \{Y\}) \cup \{A\}$ temos que $V(T_G) = \mathcal{CM}_G$.

Ainda precisamos demonstrar a existência das subárvores $T_{G(w)}$ de T_G tal que $V(T_{G(w)})$ é o conjunto das cliques maximais de G que possuem w .

Suponhamos que $w \notin U$. Desta forma, $w \notin Y$ ou $w \in Y$.

Se $w \notin Y$, então a subárvore $T_{G'(w)}$ de $T_{G'}$, dada pela hipótese de indução, é tal que $V(T_{G'(w)})$ é o conjunto de todas as cliques maximais de G' que possuem w . Pela hipótese, $T_{G'(w)}$ é subárvore de T_G tal que $V(T_{G'(w)})$ é o conjunto das cliques maximais de G que possuem w . Daí, basta tomar $T_{G(w)} = T_{G'(w)}$.

Se $w \in Y$, então a subárvore $T_{G'(w)}$ de $T_{G'}$, dada pela hipótese de indução, é tal que $V(T_{G'(w)})$ é o conjunto de todas as cliques maximais de G' , portanto, $Y \in V(T_{G'(w)})$. Daí, basta tomar $T_{G(w)}$ obtida através de $T_{G'(w)}$ ao substituir a clique maximal Y por A . Assim, pela construção de T_G , $T_{G(w)}$ é subárvore de T_G com $V(T_{G(w)})$ conjunto das cliques maximais de G que possuem w .

Suponhamos que $w \in U$. Neste caso, basta tomar $T_{G(w)} = T_G[A]$.

3.2. Se $Y \notin \mathcal{CM}_{G'}$, tomemos $B \in \mathcal{CM}_{G'}$ tal que $Y \subset B$.

Consideremos a árvore $T_G = (V(T_{G'}) \uplus \{A\}, E(T_{G'}) \uplus \{AB\})$. Neste caso, como $\mathcal{CM}_G = \mathcal{CM}_{G'} \cup \{A\}$, concluímos que $V(T_G) = \mathcal{CM}_G$.

Ainda precisamos demonstrar a existência das subárvores $T_{G(w)}$ de T_G tal que $V(T_{G(w)})$ é o conjunto das cliques maximais de G que possuem w .

Suponhamos que $w \notin U$. Desta forma, $w \notin Y$ ou $w \in Y$.

Se $w \notin Y$, então a subárvore $T_{G'(w)}$ de $T_{G'}$, dada pela hipótese de indução, é tal que $V(T_{G'(w)})$ é o conjunto de todas as cliques maximais de G' que possuem w . Pela hipótese, $T_{G'(w)}$ é subárvore de T_G tal que $V(T_{G'(w)})$ é o conjunto das cliques maximais de G que possuem w . Daí, basta tomar $T_{G(w)} = T_{G'(w)}$.

Se $w \in Y$, então a subárvore $T_{G'(w)}$ de $T_{G'}$, dada pela hipótese de indução, é tal que $V(T_{G'(w)})$ é o conjunto de todas as cliques maximais de G' , portanto, $B \in V(T_{G'(w)})$. Daí, basta tomar $T_{G(w)}$ obtida através de $T_{G'(w)}$ ao substituir a clique maximal Y por A e mais a aresta AB de T_G . Assim, pela construção de T_G , $T_{G(w)}$ é subárvore de T_G com $V(T_{G(w)})$ conjunto das cliques maximais de G que possuem w .

Suponhamos que $w \in U$. Neste caso, basta tomar $T_{G(w)} = T_G[B]$.

(\Leftarrow) Seja um grafo G com árvore característica T_G . Considere a família $\mathcal{F} = \{T_v : v \in V(G)\}$. Temos que, para quaisquer $u \neq v \in V(G)$, $T_u \cap T_v \neq \emptyset$ se, e somente se, existe $\mathcal{C} \in \mathcal{CM}_G$ tal que $u, v \in \mathcal{C}$. Mas $u, v \in \mathcal{C}$ se, e somente se, $uv \in E(G)$. ■

2.2 Grafos de comparabilidade

Os *grafos de comparabilidade* são definidos por meio da noção de *conjunto parcialmente ordenado*.

Sejam V um conjunto não vazio e R uma relação em V . Dizemos que R é uma **ordem parcial sobre V** , se R é:

- (1) **reflexiva** sobre V , isto é, para todo $x \in V$, temos $(x, x) \in R$.
- (2) **antissimétrica** sobre V , isto é, para todos $x, y \in V$, se $(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R$, então $x = y$.
- (3) **transitiva** sobre V , isto é, para todos $x, y, z \in V$, se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$ então $(x, z) \in R$.

Como usual, denotamos ordens parciais genéricas por símbolos sugestivos como \leq , \leq' , \leq'' , etc.

Um **conjunto parcialmente ordenado** é um par (V, \leq) , onde V é um conjunto não vazio e \leq é uma relação de ordem parcial sobre V .

Quando todos os elementos de V estão relacionados segundo uma relação de ordem parcial R , denominamos R de ordem total.

Definição 6. Seja R uma relação de ordem parcial sobre um conjunto finito V . Dizemos que R é **de ordem total**, ou **linear**, se para todos $x, y \in V$, temos $(x, y) \in R$ ou $(y, x) \in R$.

Os exemplos canônicos de conjuntos parcialmente ordenados são as *ordens de conjuntos*, obtidas através da relação \subseteq de continência entre conjuntos.

Proposição 3. Se \mathcal{F} é uma família de conjuntos, então (\mathcal{F}, \subseteq) é um conjunto parcialmente ordenado.

PROVA. É um fato bem conhecido que \subseteq é reflexiva, antissimétrica e transitiva sobre qualquer família de conjuntos. ■

Um **isomorfismo** de um conjunto parcialmente ordenado (V, \leq) em um conjunto parcialmente ordenado (V', \leq') é uma bijeção $f : V \rightarrow V'$, tal que, para todos $x, y \in V$, $x \leq y$ se, e somente se, $f(x) \leq' f(y)$. A existência de um isomorfismo é uma relação de equivalência na classe de todos os conjuntos parcialmente ordenados. Dois conjuntos parcialmente ordenados são **isomorfos** se existe um isomorfismo entre eles.

Do ponto de vista estrutural — ou seja, *a menos de isomorfismo* —, as ordens de conjuntos são as únicas ordens parciais que existem.

Teorema 6. [Representação das ordens parciais] Se (V, \leq) é um conjunto parcialmente ordenado, então existe uma família \mathcal{F} de subconjuntos de V tal que (V, \leq) e (\mathcal{F}, \subseteq) são isomorfos.

PROVA. Seja (V, \leq) um conjunto parcialmente ordenado. Para cada $x \in V$ definimos o conjunto $x_{\downarrow} = \{y \in V : y \leq x\}$. Tomemos $\mathcal{F} = \{x_{\downarrow} : x \in V\}$.

Pela Proposição 3, (\mathcal{F}, \subseteq) é um conjunto parcialmente ordenado.

Agora, definimos $\phi : V \rightarrow \mathcal{F}$ tal que $\phi(x) = x_{\downarrow}$, para todo $x \in V$. Vamos provar que ϕ é um isomorfismo de (V, \leq) em (\mathcal{F}, \subseteq) .

1. ϕ é injetiva. Sejam $x, y \in V$. Suponhamos que $\phi(x) = \phi(y)$. Daí, $x_{\downarrow} = y_{\downarrow}$. Como \leq é reflexiva em V , temos $x \leq x$. Daí, $x \in x_{\downarrow}$. Assim, $x \in y_{\downarrow}$. Logo, $x \leq y$. De maneira análoga, $y \leq x$. Agora, como \leq é antissimétrica em V , temos $x = y$.
2. ϕ é sobrejetiva. Seja $x_{\downarrow} \in \mathcal{F}$. Como $x \in V$, por definição, $\phi(x) = x_{\downarrow}$.
3. Para todos $x, y \in V$, $x \leq y$ se, e somente se, $x_{\downarrow} \subseteq y_{\downarrow}$. Sejam $x, y \in V$.

(\Rightarrow) Suponhamos que $x \leq y$. Seja $z \in x_{\downarrow}$. Daí, $z \leq x$. Assim, como \leq é transitiva em V , temos $z \leq y$. Daí, $z \in y_{\downarrow}$. Logo, $x_{\downarrow} \subseteq y_{\downarrow}$.

(\Leftarrow) Suponhamos que $x_{\downarrow} \subseteq y_{\downarrow}$. Como \leq é reflexiva em V , temos $x \leq x$. Daí, $x \in x_{\downarrow}$. Assim, $x \in y_{\downarrow}$. Logo, $x \leq y$.

Isto conclui a prova. ■

Toda ordem parcial sobre um conjunto finito possui, de maneira natural, um grafo associado.

Definição 7. Seja $P = (V, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. O **grafo de comparabilidade de P** é o grafo $G_P = (V, E_P)$ tal que, para todos $x \neq y \in V$, temos $xy \in E_P$ se, e somente se, $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Dado um conjunto parcialmente ordenado (V, \leq) , como \leq é antisimétrica em V , o “ou” na Definição 7 é exclusivo. Além disso, como \leq é transitiva em V , para todos $u, v, w \in V$, distintos dois a dois, se $uv, vw \in E_P$, então $uw \in E_P$. Caso não haja ambiguidade, denotamos G_P simplesmente por G .

Os grafos de comparabilidade são os grafos dos conjuntos parcialmente ordenados.

Definição 8. Um grafo $G = (V, E)$ é **de comparabilidade** se existe um conjunto parcialmente ordenado $P = (V, \leq)$, tal que G é G_P . Neste caso, dizemos que P **corresponde a G** , e vice-versa.

Denotamos por **Comparabilidade** a classe de todos os grafos de comparabilidade.

Exemplo 5. O grafo da Figura 2.5 é de comparabilidade.

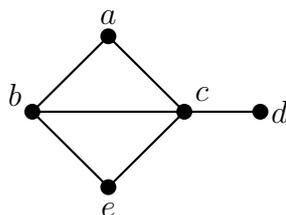


Figura 2.5: Grafo de comparabilidade G .

Verifica-se diretamente que, por exemplo, o conjunto parcialmente ordenado (V, \leq) , onde $V = \{a, b, c, d, e\}$ e $\leq = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, b), (a, c), (b, c), (e, b), (e, c), (d, c)\}$ corresponde a G .

Por outro lado, o grafo *net* abaixo não é um grafo de comparabilidade.

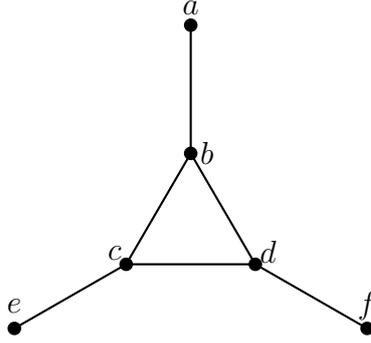


Figura 2.6: O grafo net não é grafo de comparabilidade.

De fato, suponhamos, para uma contradição, que o grafo da Figura 2.6 é de comparabilidade. Seja (V, \leq) um conjunto parcialmente ordenado que corresponde a G . Como ab é uma aresta do grafo *net*, temos $a \leq b$ ou $b \leq a$.

Vamos considerar os dois casos.

Caso 1. Suponhamos que $a \leq b$. Como \leq é transitiva em V e $ac, ad \notin E(G)$, necessariamente, $c \leq b$ e $d \leq b$. Analogamente, temos $c \leq e$ e $d \leq f$.

Agora, vamos considerar dois subcasos.

1.1 Suponhamos $c \leq d$. Como $d \leq f$, pela transitividade de \leq , temos $c \leq f$. Contradição com $cf \notin E(G)$.

1.2 Suponhamos $d \leq c$. Como $c \leq e$, pela transitividade de \leq , temos $d \leq e$. Contradição com $de \notin E(G)$.

Caso 2. Suponhamos que $b \leq a$. Por um raciocínio análogo ao empregado no Caso 1, obtemos uma contradição.

Logo, o grafo *net* não é de comparabilidade.

Exemplo 6. Para relações de ordens totais, de acordo com a Definição 6, obtemos grafos de comparabilidade completos. Isto é, para todos $x, y \in V(G)$ distintos, como estão relacionados segundo R , então $xy \in E(G)$.

Recordamos que, dados um conjunto não vazio V e uma relação R sobre V , a **reversa de R** é a relação $R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\}$. Temos que R é de ordem parcial sobre V se, e somente se, R^{-1} é de ordem parcial sobre V . Além disso, $(R^{-1})^{-1} = R$. Deste modo, G_R é grafo de comparabilidade se, e somente se, $G_{R^{-1}}$ é grafo de comparabilidade.

Dado um grafo de comparabilidade G e um conjunto parcialmente ordenado P que lhe deu origem, obtemos de maneira direta um digrafo associado a G (e P).

Definição 9. Seja $G_P = (V, E_P)$ o grafo de comparabilidade associado ao conjunto parcialmente ordenado $P = (V, \leq)$. O **digrafo associado a G** é $D_P = (V, A_P)$ tal que, para todos $x, y \in V$, temos: $(x, y) \in A_P$ se, e somente se, $x \neq y$ e $x \leq y$.

Dado um digrafo associado $D_P = (V, A_P)$ e $x, y \in V$, escrevemos $x \rightarrow_P y$ ou $x <_P y$ no lugar de $(x, y) \in A_P$. Caso não haja ambiguidade, escrevemos apenas $x \rightarrow y$ ou $x < y$; e denotamos D_P simplesmente por D .

Exemplo 7. O digrafo associado ao grafo de comparabilidade G com a ordem parcial apresentada no Exemplo 5 é:

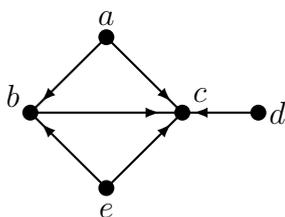


Figura 2.7: Digrafo D associado ao grafo G da Figura 2.5.

O próximo resultado é simples e útil. De certa maneira, ele mostra que a construção do digrafo transitivo associado a um grafo garante que o grafo é de comparabilidade.

Proposição 4. Um grafo $G = (V, E)$ é de comparabilidade se, e somente se, existe uma relação transitiva O sobre V tal que, para todos $x \neq y \in V$ temos: $xy \in E$ se, e somente se, $(x, y) \in O$ ou (exclusivo) $(y, x) \in O$.

PROVA. (\Rightarrow) Suponhamos que G é o grafo de comparabilidade associado ao conjunto parcialmente ordenado $P = (V, \leq)$.

Definimos a relação O sobre V como segue: para todos $x, y \in V$, $(x, y) \in O$ se, e somente se, $x \neq y$ e $x \leq y$.

1. O é transitiva em V .

Sejam $x, y, z \in V$ tais que $(x, y) \in O$ e $(y, z) \in O$. Pela definição de O , $x \neq y$, $x \leq y$, $y \neq z$ e $y \leq z$. Daí, como \leq é transitiva em V , temos $x \leq z$. Agora, suponhamos, para uma contradição, que $x = z$. Desta forma, $z \leq y$ e $y \leq z$. Daí, como \leq é antisimétrica em V , temos $y = z$, uma contradição com $y \neq z$. Logo $x \neq z$ e $x \leq z$, isto é, $(x, z) \in O$.

2. Para todos $x \neq y \in V$, $xy \in E$ se, e somente se, $(x, y) \in O$ ou (exclusivo) $(y, x) \in O$.

Sejam $x \neq y \in V$. Para provarmos a implicação da esquerda para a direita, suponhamos que $xy \in E$. Daí, como G é de comparabilidade, $x \leq y$ ou $y \leq x$. Assim, como $x \neq y$, temos $(x, y) \in O$ ou $(y, x) \in O$. Agora, suponhamos, para uma contradição, que $(x, y) \in O$ e $(y, x) \in O$. Daí, $x \leq y$ e $y \leq x$. E, pela antissimetria de \leq , temos $x = y$, uma contradição com $x \neq y$. Para provarmos a recíproca, suponhamos que $(x, y) \in O$ ou (exclusivo) $(y, x) \in O$. Pela definição de O , temos $x \neq y$, onde $x \leq y$ ou (exclusivo) $y \leq x$. Em ambos os casos $xy \in E$.

(\Leftrightarrow) Suponhamos que existe relação transitiva O sobre V tal que para todos $x \neq y \in V$ temos $xy \in E$ se, e somente se, $(x, y) \in O$ ou (exclusivo) $(y, x) \in O$.

Definimos a relação \leq sobre V tal que, para todos $x, y \in V$: $x \leq y$ se, e somente se, $(x, y) \in O$ ou $x = y$.

Vamos mostrar que $P = (V, \leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado.

1. \leq é reflexiva sobre V . Segue direto da definição de \leq .
2. \leq é antissimétrica sobre V . Sejam $x, y \in V$ tais que $x \leq y$ e $y \leq x$. Suponhamos, para uma contradição, que $x \neq y$. Assim, pela definição de \leq , temos $(x, y) \in O$ e $(y, x) \in O$, contradizendo o “ou (exclusivo)” na definição de O .
3. \leq é transitiva sobre V . Sejam $x, y, z \in V$. Suponhamos que $x \leq y$ e $y \leq z$.

Vamos considerar dois casos.

- (a) Suponhamos que $x = y$. Desta forma, $x = y \leq z$.
- (b) Suponhamos que $x \neq y$. Vamos considerar dois subcasos. Se $y = z$, temos $x \leq y = z$. Se $y \neq z$, temos $(x, y) \in O$, $(y, z) \in O$. Mas, como O é transitiva em V , temos $(x, z) \in O$. Logo, $x \leq z$.

Finalmente, dados $x \neq y \in V$, temos: $xy \in E$ se, e somente se, $(x, y) \in O$ ou (exclusivo) $(y, x) \in O$ se, e somente se, $[(x, y) \in O \text{ ou } x = y]$ ou (exclusivo) $[(y, x) \in O \text{ ou } y = x]$ se, e somente se, $x \leq y$ ou (exclusivo) $y \leq x$. Assim, $G = (V, E)$ está associado ao conjunto parcialmente ordenado $P = (V, \leq)$. Portanto, G é de comparabilidade. ■

Seja $G = (V, E)$ um grafo e O uma relação em V . Dizemos que O é uma **orientação transitiva de G** se:

- (1) para todos $x, y \in V$: $xy \in E$ se, e somente se, $(x, y) \in O$ ou (exclusivo) $(y, x) \in O$;

(2) O é transitiva em V .

Dizemos que **as arestas de G podem ser orientadas transitivamente** se existe uma orientação transitiva de G . Neste contexto, a Proposição 4 garante que um grafo é de comparabilidade se, e somente se, suas arestas podem ser orientadas transitivamente.

Os grafos de comparabilidade foram introduzidos por M. A. Ghouila-Houri [15], em 1962, como os grafos subjacentes das *ordens parciais*. Em 1964, P. C. Gilmore e A. J. Hoffman [16] caracterizaram os grafos de comparabilidade por meio de certas estruturas proibidas, denominadas por eles de *ciclos ímpares sem cordas triangulares*. Além disso, a prova da condição suficiente desta caracterização fornece um algoritmo para orientar transitivamente as arestas do grafo. Em 1967, T. Gallai [13] descreveu diversas propriedades importantes dos grafos de comparabilidade e caracterizou os grafos de comparabilidade por meio de uma lista infinita de *subgrafos induzidos proibidos*.

Sobre o reconhecimento dos grafos de comparabilidade, A. Pnueli, A. Lempel e S. Even [38], em 1971, descreveram um algoritmo que decide se um grafo é de comparabilidade e, em caso afirmativo, exibe uma orientação transitiva deste grafo. Segundo os autores, este algoritmo é mais simples e eficiente do que o apresentado por Gilmore e Hoffman. No livro [17], Golumbic utiliza das técnicas de decomposição dos grafos de comparabilidade dadas por Pnueli, Lempel e Even, e descreve um algoritmo que determina se um dado grafo é de comparabilidade ou não. Como corolário, Golumbic afirma que os grafos de comparabilidade podem ser reconhecidos em $O(\Delta \cdot m)$, onde Δ é o grau máximo do grafo e m é seu número de arestas.

Os problemas do ciclo hamiltoniano e conjunto dominante são NP-completos na classe dos grafos de comparabilidade; existem algoritmos eficientes para os problemas de coloração, clique, conjunto independente e cobertura por cliques; e o problema de determinar se dois grafos de comparabilidade são isomorfos é GI-completo. Os livros [2, 17, 25, 33, 42, 44] contêm estudos detalhados sobre grafos de comparabilidade. Nos limitamos apenas a revisar os conceitos e resultados que são empregados nos capítulos seguintes.

A classe **Comparabilidade** é hereditária.

Proposição 5. Se G é um grafo de comparabilidade e H é um subgrafo induzido de G , então H é grafo de comparabilidade.

PROVA. Seja G um grafo de comparabilidade e H um subgrafo induzido de G , tal que $V(H) = \{v_1, \dots, v_k\}$.

Tomemos D um digrafo transitivo associado a G , que exibe a orientação O transitiva das arestas de G . Temos que $D[\{v_1, \dots, v_k\}]$ é digrafo transitivo associado a uma orientação O' transitiva obtida de O ao se restringir aos vértices $\{v_1, \dots, v_k\}$. Caso contrário D não seria transitivo. Logo, H é de comparabilidade. ■

Como toda classe hereditária, Comparabilidade possui caracterização por subgrafos induzidos proibidos. Esta caracterização é dada por uma lista infinita de grafos conhecida como *família de Gallai*, foi exibida por Gallai em [13].

Teorema 7. [Gallai, 1967] Um grafo é de comparabilidade se, e somente se, não possui nem os grafos listados nas Figuras 2.8, 2.9, 2.10, 2.11 e 2.12 nem os complementos dos grafos listados na Figura 2.13 como subgrafos induzidos.

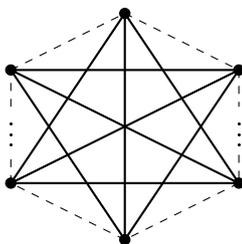


Figura 2.8: Grafos \overline{C}_n , para $n \geq 6$.

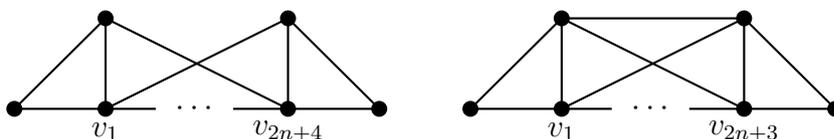


Figura 2.9: Grafos XF_5^{2n+3} e XF_6^{2n+2} , para $n \geq 0$, respectivamente.

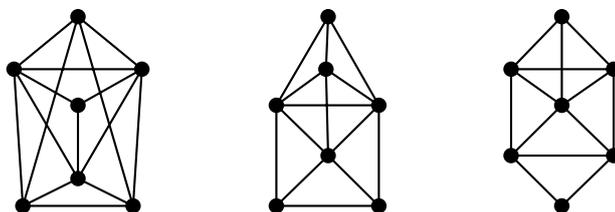


Figura 2.10: Grafos \overline{T}_2 , \overline{X}_2 e \overline{X}_3 .

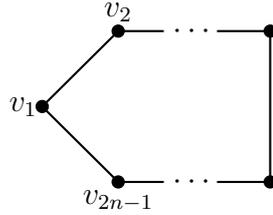


Figura 2.11: Grafos C_{2n-1} , para $n \geq 3$.

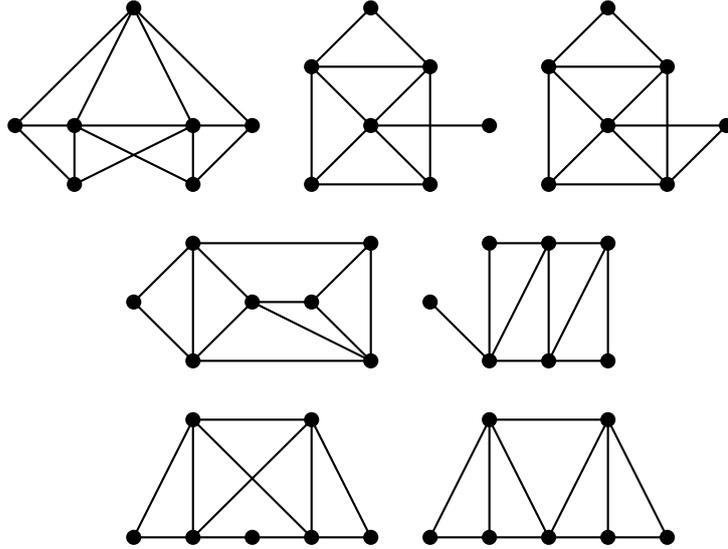


Figura 2.12: Grafos \overline{X}_{30} , \overline{X}_{31} , \overline{X}_{32} , \overline{X}_{33} , \overline{X}_{34} , \overline{X}_{35} e \overline{X}_{36} .

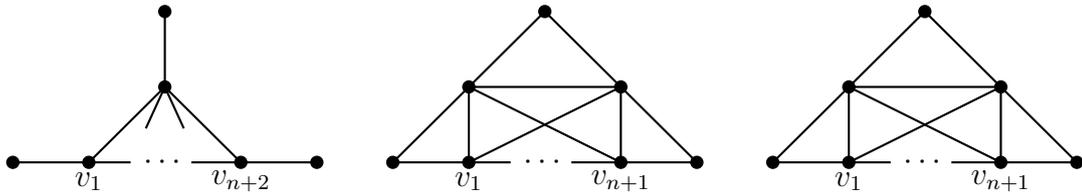


Figura 2.13: Grafos XF_2^{n+1} , XF_3^n e XF_4^n , para $n \geq 0$.

Uma prova detalhada deste resultado é extensa demais para ser apresentada aqui.

Ao contrário do que acontece com os grafos cordais, não conhecemos uma caracterização dos grafos de comparabilidade como grafos de interseção. Observamos que, na Seção 4.1, provamos que Comparabilidade é classe de interseção. Alternativamente, em 1989, Golumbic e Scheinerman [18] provaram que um grafo é de comparabilidade se, e somente se, é um *grafo de inclusão*.

Recordamos que, dada uma família $\mathcal{F} = \{S_1, \dots, S_n\}$, possivelmente com elementos repetidos, o **grafo de inclusão de \mathcal{F}** , denotado por $\Psi(\mathcal{F})$, é o grafo cujo conjuntos de vértices é \mathcal{F} e tal que, para todos $i \neq j \in [n]$, S_i e S_j são adjacentes se,

e somente se, $S_i \subseteq S_j$ ou $S_j \subseteq S_i$. Um grafo G é um **grafo de inclusão** se existe uma família \mathcal{F} tal que G é isomorfo a $\Psi(\mathcal{F})$.

Golumbic e Scheinerman exibiram um *modelo de inclusão* para os grafos de comparabilidade cujos elementos são subestrelas de uma estrela (e, portanto, subárvores de uma árvore), o que, pelo Teorema 4, relaciona de uma certa maneira os grafos de comparabilidade com os grafos cordais.

Vamos provar este resultado como um corolário do Teorema 6.

Teorema 8. [Golumbic & Scheinerman, 1989] Um grafo G é de comparabilidade se, e somente se, é um grafo de inclusão. Em adição, existem uma estrela T e uma família \mathcal{F} de subestrelas de T tais que G é o grafo de inclusão de \mathcal{F} .

PROVA. Seja G um grafo com $V(G) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

(\Rightarrow) Suponhamos que G é um grafo de comparabilidade associado ao conjunto parcialmente ordenado $P = (V(G), \leq)$.

Pela Proposição 6, $(V(G), \leq)$ é isomorfo a (\mathcal{F}, \subseteq) , onde $\mathcal{F} = \{x_\downarrow : x \in V(G)\}$.

Assim, para quaisquer $x, y \in V(G)$: $xy \in E(G)$ se, e somente se, $x \leq y$ ou $y \leq x$ se, e somente se, $x_\downarrow \subseteq y_\downarrow$ ou $y_\downarrow \subseteq x_\downarrow$. Logo, G é grafo de inclusão de \mathcal{F} .

(\Leftarrow) Suponhamos que G é grafo de inclusão de uma família $\mathcal{F} = \{S_x, \dots, S_y\}$.

Consideremos a orientação das arestas de G definida, para todos $x \neq y \in V$, por: $x \rightarrow y$ se, e somente se, $S_x \subseteq S_y$.

Dados $x, y \in V$, se $x \rightarrow y$, temos $S_x \subseteq S_y$ e, daí, $xy \in E(G)$. Além disso, dados $x, y, z \in V(G)$, se $x \rightarrow y$ e $y \rightarrow z$, temos $S_x \subseteq S_y$ e $S_y \subseteq S_z$. Daí, $S_x \subseteq S_z$. E assim, $x \rightarrow z$.

Logo, pela Proposição 4, G é um grafo de comparabilidade.

Adicionalmente, vamos construir uma estrela T e uma família \mathcal{F} de subestrelas de T tais que G é grafo de inclusão de \mathcal{F} .

Definimos a estrela S_G com conjunto de vértices $V(S_G) = V(G) \cup \{w\}$ e conjunto de arestas $E(S_G) = \{wx : x \in V(G)\}$. Além disso, para cada $v \in V(G)$, consideremos a subestrela S_v de S_G com conjunto de vértices $V(S_v) = v_\downarrow \cup \{w\}$ e conjunto de arestas $E(S_v) = \{wx : x \in v_\downarrow\}$.

Agora, sejam $u, v \in V(G)$. Como $w \notin V(G)$, temos $u_\downarrow \subseteq v_\downarrow$ se, e somente se, $u_\downarrow \cup \{w\} \subseteq v_\downarrow \cup \{w\}$ se, e somente se, $V(S_u) \subseteq V(S_v)$. Além disso, $u_\downarrow \subseteq v_\downarrow$ se, e somente se, $\{wx : x \in u_\downarrow\} \subseteq \{wy : y \in v_\downarrow\}$ se, e somente se, $E(S_u) \subseteq E(S_v)$. Ou seja, $u_\downarrow \subseteq v_\downarrow$ se, e somente se, S_u é subestrela de S_v .

Sendo assim, para quaisquer $u, v \in V(G)$: $uv \in E(G)$ se, e somente se, $u \leq v$ ou $v \leq u$ se, e somente se, $u_\downarrow \subseteq v_\downarrow$ ou $v_\downarrow \subseteq u_\downarrow$ se, e somente se, S_u é subestrela de S_v ou S_v é subestrela de S_u . Logo, G é grafo de inclusão de $\mathcal{F} = \{S_v : v \in V(G)\}$. ■

Na Seção 4.2, vamos nos basear nos Teoremas 5 e 8 para exibir um modelo de interseção para os grafos cordais comparabilidade.

Capítulo 3

Grafos cordais comparabilidade

Neste capítulo, revisamos a definição da classe Cordal comparabilidade e apresentamos dois resultados sobre os grafos cordais comparabilidade. Dividimos o capítulo em duas seções cujo conteúdo está descrito a seguir.

Na Seção 3.1, motivamos o estudo da classe Cordal comparabilidade no contexto das classes de grafos definidas pela aplicação da operação complemento de um grafo ou da operação conjuntista de interseção entre duas classes, por exemplo, a classe Cocordal é a classe composta pelos grafos cujos complementos são cordais e a classe $\text{Cordal} \cap \text{Cocordal}$, composta pelos grafos que são cordais e cocordais, concomitantemente.

Na Seção 3.2, exibimos a lista infinita de grafos que caracteriza os grafos cordais comparabilidade por subgrafos induzidos proibidos, devida a Borie e Spinrad [1]. Este resultado é uma simples junção da definição dos grafos cordais e do resultado de Gallai [13], que caracteriza os grafos de comparabilidade por subgrafos induzidos proibidos.

3.1 Grafos cordais comparabilidade

Classes de grafos caracterizadas pela aplicação da operação complemento a um grafo e de operações conjuntistas — interseção e união — a outras classes, surgem frequentemente em Teoria dos Grafos. Exemplos bem conhecidos são as classes dos grafos *de intervalo* [24], *de permutação* [38] e *split* [11]. Cada uma destas classe possui uma caracterização como uma classe de *grafos de interseção*. De fato:

- Hajós [24] definiu os grafos de intervalo como aqueles que possuem um modelo de interseção cujos elementos são intervalos da reta real.
- Pnueli, Lempel e Even [38] definiram os grafos de permutação como aqueles

que possuem um modelo de interseção cujos elementos são segmentos de retas com extremos em duas retas paralelas distintas.

- Folder e Hammer [11] definiram os grafos *split* como aqueles com conjunto de vértices que podem ser particionado em conjunto independente e uma clique. Além disso, provaram que um grafo é *split* se, e somente se, é grafo de interseção de subestrelas de uma estrela.

Porém, todas estas classes de grafos possuem caracterizações por meio das operações conjuntistas aplicadas às classes dos grafos cordais e de comparabilidade. De fato, denotando as classes dos grafos de intervalo, de permutação e *split* por *Intervalo*, *Permutação* e *Split*, respectivamente, temos:

- Pnueli, Lempel e Even [38] provaram que um grafo é de permutação se, e somente se, é, simultaneamente, de comparabilidade e de cocomparabilidade. Em outras palavras, $\text{Permutação} = \text{Comparabilidade} \cap \text{Cocomparabilidade}$.
- Gilmore e Hoffman [16] provaram que um grafo é de intervalo se, e somente se, é cordal e cocomparabilidade. Em outras palavras, $\text{Intervalo} = \text{Cordal} \cap \text{Cocomparabilidade}$. Em adição, provaram também que um grafo é de intervalo se, e somente se, suas cliques maximais podem ser linearmente ordenadas, i.e, possui uma árvore característica que é um caminho.
- Gilmore e Hoffman [16] provaram que um grafo é *split* se, e somente se, é cordal e cocordal. Em outras palavras, $\text{Split} = \text{Cordal} \cap \text{Cocordal}$.

No livro [17], Golumbic abordou os grafos de intervalo, os grafos de permutação e os grafos *split*, mas deixou — sob o prisma das operações conjuntistas aplicadas a classe de grafos — pelo menos uma lacuna importante: o estudo da classe $\text{Cordal} \cap \text{Comparabilidade}$, em destaque na Figura 1.1. Assim surge o interesse no objeto de estudo deste trabalho.

Definição 10. Um grafo é **cordal comparabilidade** se é, simultaneamente, cordal e de comparabilidade. A classe dos grafos cordais comparabilidade é denotada por *Cordal comparabilidade*.

Nosso objetivo principal foi estudar a classe *Cordal comparabilidade*, de modo a produzir um texto contendo, de maneira organizada, resultados estruturais que possam contribuir com propriedades inerentes ao fato de um grafo ser cordal e de comparabilidade, concomitantemente. Durante este processo, fizemos um levantamento bibliográfico sobre a classe (cf. Capítulo 1) e obtivemos alguns resultados

relacionados à estruturas dos grafos cordais comparabilidade, especificamente, no que tange a sua representação por modelos de interseção e no que tange a uma propriedade interessante sobre suas árvores características (cf. Seções 4.2 e 5.2).

3.2 Caracterização por subgrafos induzidos proibidos

Existe uma caracterização dos grafos cordais comparabilidade pela proibição de subgrafos induzidos, devida a Borie e Spinrad [1]. Ela é bastante natural uma vez que decorre, de maneira direta, das classes *Cordal* e *Comparabilidade* possuírem, cada uma, caracterização por subgrafos induzidos proibidos.

Teorema 9. [Borie & Spinrad, 1999] Um grafo G é cordal comparabilidade se, e somente se, não possui os grafos das Figuras 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4 como subgrafos induzidos.

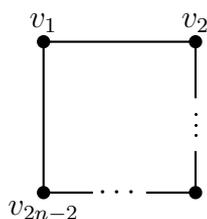


Figura 3.1: Ciclos C_n para $n \geq 4$

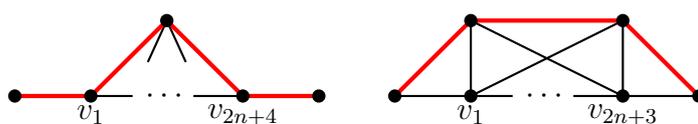


Figura 3.2: Grafos XF_1^{2n+3} e XF_6^{2n+2} , para $n \geq 0$.

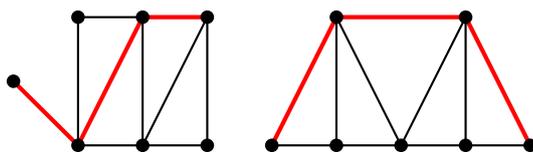


Figura 3.3: Grafos $\overline{X_{34}}$ e $\overline{X_{36}}$.

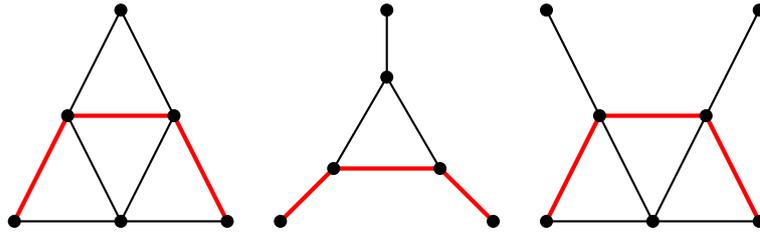


Figura 3.4: Grafos de Hajós, net e co-rising-sun.

PROVA. As classes Cordal e Comparabilidade possuem caracterizações por subgrafos proibidos (cf. Seções 2.1 e 2.2). Unindo as listas de proibidos em ambas as caracterizações e retirando os grafos redundantes, obtemos a lista de grafos induzidos proibidos para Cordal comparabilidade. ■

Capítulo 4

Grafos de interseção

Neste capítulo, provamos que a classe **Cordal comparabilidade** é uma classe de interseção. Este resultado foi apresentado no IX Encontro de Teoria da Computação (ETC 2024) [5]. Dividimos o capítulo em duas seções cujo conteúdo está descrito a seguir.

Na Seção 4.1, revisamos os conceitos e resultados básicos sobre grafos de interseção e classes de interseção. Em particular, descrevemos o Teorema de Scheinerman, que caracteriza as classes de grafos que são classes de interseção. Como uma aplicação deste resultado, provamos que a classe **Comparabilidade** é uma classe de interseção. Apesar disto, ainda é uma questão sem resposta se existe uma classe \mathcal{C} de famílias \mathcal{F} geometricamente, ou, combinatoriamente interessantes tal que um grafo G é de comparabilidade se, e somente se, existe $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ tal que G é grafo de interseção de \mathcal{F} . Isto porque o Teorema de Scheinerman produz uma classe de famílias, de certa maneira, bastante artificial que mostra que **Comparabilidade** é classe de interseção.

Na Seção 4.2, provamos que a classe **Cordal comparabilidade** é uma classe de interseção. Este é um problema proposto por Ma e Spinrad [30] e, posteriormente, novamente proposto por Borie e Spinrad em [1]. Ao invés de aplicarmos o Teorema de Scheinerman, fazemos isto de maneira direta, definindo uma classe de famílias de subárvores \mathcal{T} tal que os grafos cordais comparabilidade são os grafos de interseção de \mathcal{T} . Nosso resultado pode ser entendido como uma junção de dois resultados: a caracterização dos grafos cordais como os grafos que possuem árvores características (cf. Teorema 5) e a representação dos conjuntos parcialmente ordenados como as ordens de conjuntos (cf. Teorema 6).

4.1 A classe Comparabilidade é classe de interseção

Uma maneira natural de definirmos um grafo é como um *grafo de interseção*, i.e., considerarmos uma família de conjuntos como seu conjunto de vértices e conectarmos dois tais vértices se, e somente se, eles possuírem interseção não vazia. Dada uma classe de grafos \mathcal{G} — definida por propriedades algébricas, combinatórias, geométricas, etc. —, é natural perguntarmos se existe uma classe de famílias \mathcal{C} tais que os grafos de \mathcal{G} são exatamente os grafos de interseção das famílias $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$.

Os grafos e as classes de interseção são parte importante da Teoria dos Grafos. Com seus próprios conceitos e resultados, contribuem de maneira significativa para o estudo das propriedades estruturais dos grafos. Também possuem aplicações nas áreas de biologia, computação, análise de matrizes e estatística. Detalhes sobre os grafos e as classes de interseção podem ser encontrados em [33].

No que segue, consideramos que famílias $\mathcal{F} = \{S_1, \dots, S_n\}$ são multiconjuntos, isto é, há a possibilidade de termos $S_i = S_j$ mesmo que $i \neq j$, para alguns $i, j \in [n]$.

Definição 11. Seja \mathcal{F} uma família de conjuntos. O **grafo de interseção de \mathcal{F}** , denotado por $\Omega(\mathcal{F})$, é o grafo cujo conjunto de vértices é \mathcal{F} e para todos $S_i, S_j \in \mathcal{F}$, com $i \neq j$, temos que S_i é adjacente a S_j se, e somente se, $S_i \cap S_j \neq \emptyset$.

Seja G um grafo. Dizemos que G é **grafo de interseção** se existe família \mathcal{F} tal que G é isomorfo a $\Omega(\mathcal{F})$.

Exemplo 8. Seja $\mathcal{F} = \{\{x_1\}, \{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_3, x_4, x_5\}, \{x_4\}, \{x_1\}\}$. A Figura 4.1 ilustra o grafo de interseção de \mathcal{F} .

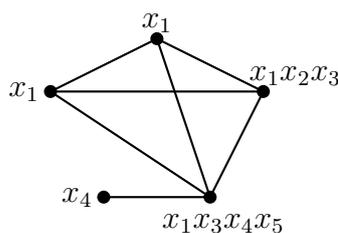


Figura 4.1: O grafo $\Omega(\mathcal{F})$

Definição 12. Sejam \mathcal{G} uma classe de grafos e \mathcal{C} uma classe de famílias de conjuntos de um certo tipo. Dizemos que **os grafos em \mathcal{G} são os grafos de interseção de \mathcal{C}** se para todo grafo G , temos $G \in \mathcal{G}$ se, e somente se, existe $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ tal que G é o grafo de interseção de \mathcal{F} .

Dizemos que \mathcal{G} é **classe de interseção** se existe uma classe de famílias de conjuntos \mathcal{C} tal que os grafos de \mathcal{G} são os grafos de interseção de \mathcal{C} .

Como vimos no Teorema 4, **Cordal** é a classe de interseção das subárvores das árvores. Entretanto, nem toda classe de grafos é classe de interseção (cf. o parágrafo após o Teorema 10).

Em 1985 [41], Scheinerman caracterizou as classes de interseção através dos conceitos de monotocidade, expansão de vértices e composição em séries.

Definição 13. Seja \mathcal{G} uma classe de grafos. Dizemos que \mathcal{G} é **monótona** se, para todo $G \in \mathcal{G}$ e para todo H subgrafo induzido de G , temos $H \in \mathcal{G}$.

Definição 14. Sejam G um grafo e $v \in V(G)$. Uma **expansão do vértice** v é uma substituição de v por uma clique $\{v_1, \dots, v_n\}$ de forma que, para todo $u \in V(G)$ tal que $uv \in E(G)$, temos que u é adjacente a v_i , para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Seja H um grafo. Dizemos que H é **obtido de G por meio da expansão de vértices** se H é obtido de G após uma expansão de algum vértice $v \in V(G)$.

Seja \mathcal{G} uma classe de grafos. Dizemos que \mathcal{G} é **fechada para expansão de vértices** se, para todos $G \in \mathcal{G}$ e $v \in V(G)$, o grafo obtido de G pela expansão do vértice v pertence a \mathcal{G} .

Definição 15. Seja \mathcal{G} uma classe de grafos. Uma **série de composição de \mathcal{G}** é uma sequência contável (G_1, \dots, G_n, \dots) de grafos de \mathcal{G} tal que (1) para qualquer $i \geq 1$, o grafo G_i é subgrafo induzido do grafo G_{i+1} e (2) para todo $G \in \mathcal{G}$, existe $i \geq 1$ tal que G é subgrafo induzido de G_i .

O principal resultado do trabalho de Scheinerman [41] é o seguinte.

Teorema 10. Se \mathcal{G} é uma classe de grafos, então \mathcal{G} é classe de interseção se, e somente se, \mathcal{G} é monótona, fechada para expansão de vértices e possui série de composição.

O Teorema 10 não será demonstrado pois foge do tema do texto, que versa sobre os grafos cordais comparabilidade.

Um exemplo de uma classe de grafos \mathcal{G} que não é classe de interseção é a classe dos grafos que não possuem nem C_4 e nem C_5 como subgrafos induzidos. De fato, em [41] está provado que \mathcal{G} não possui série de composição.

Como corolário do Teorema 10, demonstramos o seguinte resultado do folclore:

Teorema 11. Comparabilidade é classe de interseção.

PROVA. De acordo com o Teorema 10 precisamos provar que a classe Comparabilidade é monótona, fechada para expansão de vértices e possui série de composição.

Comparabilidade é monótona, pela Proposição 5.

Comparabilidade é fechada para expansão de vértices. De fato, sejam G grafo de comparabilidade e $v \in V(G)$. Tomemos O , uma orientação transitiva de G . Consideremos H o grafo obtido de G através da expansão do vértice v . Definimos O' , uma orientação para H , da seguinte maneira:

- Para todos $u, w \in V(H) \setminus \{v_1, \dots, v_n\}$ temos $(u, w) \in O'$ se, e somente se, $(u, w) \in O$.
- Para todos $u \in V(G) \setminus \{v_1, \dots, v_n\}$ e $i \in \{1, \dots, n\}$, $(u, v_i) \in O'$ (resp. $(v_i, u) \in O'$) se, e somente se, $(u, v) \in O$ (resp. $(v, u) \in O$).
- Para todos $i \neq j$ em $\{1, \dots, n\}$, $(v_i, v_j) \in O'$ se, e somente se, $i \leq j$.

É de imediata verificação que a orientação O' é transitiva e portanto H é grafo de comparabilidade.

Comparabilidade possui série de composição. Consideremos $G_i^{(1)}, \dots, G_i^{(k_i)}$ todos os grafos de comparabilidade com i vértices, para $i \geq 1$. Tomemos $G_i = G_i^{(1)} \uplus \dots \uplus G_i^{(k_i)}$, i.e, G_i é o grafo obtido pela união disjunta de todos os grafos de comparabilidade com i vértices, para $i \geq 1$.

O grafo G_i é de comparabilidade. De fato, tomemos O_i^p orientação transitiva de $G_i^{(p)}$, para todo $p \in \{1, \dots, k_i\}$. Consideremos a orientação $O_i = O_i^{(1)} \uplus \dots \uplus O_i^{(k_i)}$ de G_i , i.e, a orientação obtida através da união disjunta das orientações transitivas dos grafos de comparabilidade com i vértices. É de imediata verificação que O_i é transitiva e, portanto, G_i é de comparabilidade.

Agora, vamos mostrar que, para todo $i \geq 1$, temos que G_i é subgrafo induzido de G_{i+1} . Um primeiro fato é que, para todo $p \in \{1, \dots, k_i\}$, existe algum $l_p \in \{1, \dots, k_{i+1}\}$, tal que $G_{i+1}^{(l_p)}$ é o grafo de comparabilidade com $i+1$ vértices obtido através da união disjunta de $G_i^{(p)}$ com um vértice isolado. Desta forma, $G_i = G_i^{(1)} \uplus \dots \uplus G_i^{(k_i)}$ é subgrafo induzido de $G_{i+1}^{(l_1)} \uplus \dots \uplus G_{i+1}^{(l_{k_i})}$, que, por sua vez, é subgrafo induzido de G_{i+1} , pela definição de G_{i+1} . Daí, pela transitividade de subgrafos induzidos, G_i é subgrafo induzido de G_{i+1} .

Por último, vamos mostrar que, dado qualquer G de comparabilidade, existe $i \geq 1$ tal que G é subgrafo induzido de G_i . De fato, neste caso, basta tomar $i = |V(G)|$, pela definição de G_i . ■

Apesar do Teorema 11 ainda não conhecemos um modelo de interseção baseado em *propriedades combinatórias naturais* ou *propriedades geométricas* para a classe

Comparabilidade. Ao contrário do que ocorre para a classe Cordal, que é classe de interseção, e, possui um modelo de interseção combinatoriamente ou geometricamente significativo, como vimos no Teorema 4.

4.2 Grafos cordais comparabilidade como grafos de interseção

Nesta seção, provamos que os grafos cordais comparabilidade são grafos de interseção. Mais especificamente, associamos a cada grafo cordal comparabilidade G , com orientação transitiva O , uma árvore T — com determinada configuração — e uma família \mathcal{F} de subárvores de T — com determinadas propriedades — e mostramos que G é o grafo de interseção de \mathcal{F} .

A árvore T e a família \mathcal{F} são o resultado da implementação das seguintes ideias.

Em primeiro lugar, para construir a árvore T , tomamos como ponto de partida a árvore característica T_G de G , que existe, pelo Teorema 5. Em seguida, adicionamos folhas a T_G , para obter T , da maneira a seguir. Para cada $\mathcal{C}_i \subseteq V(G)$ e para cada $x \in \mathcal{C}_i$ acrescentamos um novo vértice x_i e uma nova aresta $x_i\mathcal{C}_i$.

Em segundo lugar, para construir as subárvores de \mathcal{F} , usamos como ponto de partida os modelos de inclusão de subestrelas de uma estrela dos grafos completos induzidos pelas cliques maximais de G , que existem, pelo Teorema 8.

Para facilitar a compreensão do se que segue, vamos exemplificar estes procedimentos.

Exemplo 9. Consideremos o grafo cordal comparabilidade *rising-sun* munido da orientação transitiva, ilustrados abaixo.

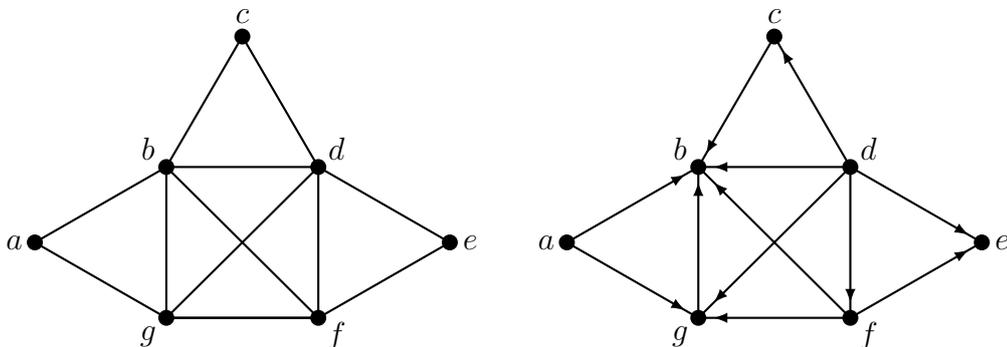


Figura 4.2: O grafo *rising-sun*, G , e uma orientação transitiva, O , de G .

Seguindo o raciocínio esboçado acima, consideremos, como ponto de partida,

T_G , a única árvore característica de G (cf. Exemplo 12), onde $\mathcal{C}_1 = \{b, c, d\}$, $\mathcal{C}_2 = \{a, b, g\}$, $\mathcal{C}_3 = \{b, d, f, g\}$, $\mathcal{C}_4 = \{d, e, f\}$ e $V(T_G) = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4\}$.

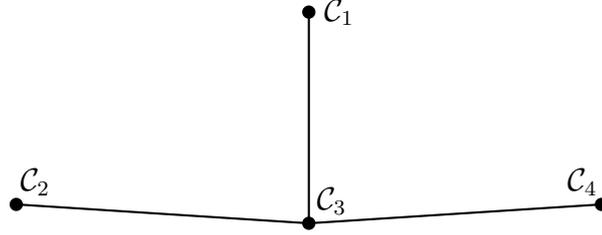


Figura 4.3: Árvore característica T_G do rising-sun.

Agora, vamos criar T , a partir de T_G . Para isto, a cada clique maximal \mathcal{C}_i de G , acrescentamos novos vértices a T_G que serão folhas em T . Ou seja, para cada $x \in \mathcal{C}_i$, criamos uma cópia x_i — com o mesmo índice que \mathcal{C}_i — tal que x_i é adjacente somente a \mathcal{C}_i em T . Por exemplo, como $\mathcal{C}_1 = \{b, c, d\}$, acrescentamos as folhas b_1, c_1, d_1 adjacentes somente a \mathcal{C}_1 . A Figura 4.4 mostra a árvore T obtida após executarmos este procedimento para todos os vértices de G .

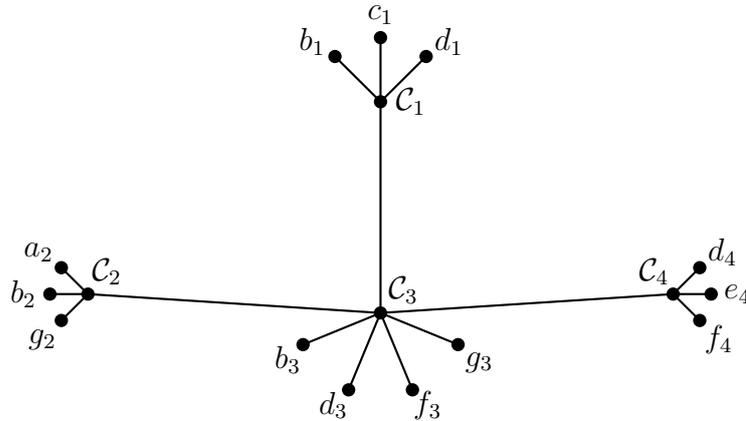


Figura 4.4: A árvore T construída a partir de T_G .

Nesta última etapa, construiremos a família \mathcal{F} de subárvores de T de modo que G é o grafo de interseção de \mathcal{F} . Para isto, vamos associar a cada $v \in V(G)$ a subárvore T_v de T , definida da maneira a seguir. Dado $v \in V(G)$, consideremos o subgrafo T_v de T induzido pelo seguinte conjunto de vértices:

$$\{\mathcal{C}_i : i \in [k] \text{ e } v \in \mathcal{C}_i\} \cup \{v_i : i \in [k] \text{ e } v \in \mathcal{C}_i\} \cup \{x_i : i \in [k] \text{ e } v \in \mathcal{C}_i \text{ e } x \rightarrow_O v\}.$$

Ou seja, T_v é induzido pelas cliques maximais \mathcal{C}_i tais que $v \in \mathcal{C}_i$; pelas folhas v_i — que são cópias de v — tais que $v \in \mathcal{C}_i$; e pelas folhas x_i — que não são cópias de v — tais

que $x \rightarrow_O v \in \mathcal{C}_i$. Como T_G é árvore característica de G e os vértices acrescentados a T_G para formar T são folhas de T , existe um único caminho entre quaisquer dois vértices de T_v . Desta forma, T_v é, de fato, uma subárvore de T . Por exemplo, a subárvore associada a b é $T_b = T[\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, b_1, b_2, b_3, c_1, d_1, a_2, g_2, d_3, f_3, g_3]$, em destaque na Figura 4.5.

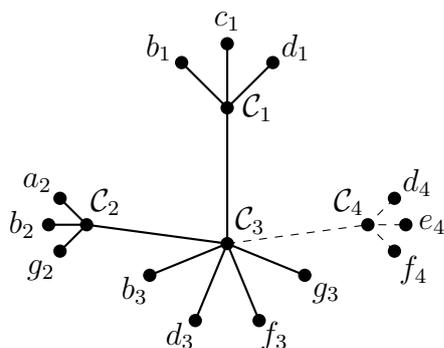


Figura 4.5: A subárvore T_b associada ao vértice b .

De fato, b pertence exatamente às cliques $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$; as folhas que são cópias de b em $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ e \mathcal{C}_3 são b_1, b_2 e b_3 , respectivamente; as setas que apontam para b em O são $a \rightarrow b, c \rightarrow b, d \rightarrow b, f \rightarrow b, g \rightarrow b$.

A Figura 4.6 mostra todas as subárvores T_v de T obtidas após efetuarmos esta construção para todos os vértices de G , orientado por O , como na Figura 4.2.

Vamos mostrar que G é o grafo de interseção de \mathcal{F} , i.e, para quaisquer $u, v \in V(G)$, $uv \in E(G)$ se, e somente se $T_u \cap T_v \neq \emptyset$. Para provarmos a implicação da esquerda para a direita, suponhamos que $uv \in E(G)$. Daí, existe uma clique maximal \mathcal{C}_i , tal que $u, v \in \mathcal{C}_i$. Assim, pela definição de T_u , temos $\mathcal{C}_i \in T_u$. De maneira análoga, $\mathcal{C}_i \in T_v$. Logo, $T_u \cap T_v \neq \emptyset$. Para provarmos a recíproca, suponhamos que $T_u \cap T_v \neq \emptyset$. Seja $w \in T_u \cap T_v$. Daí, $w \in T_u$ e $w \in T_v$. Desta forma, pela construção de T , temos duas possibilidades: $w = \mathcal{C}_i$, para algum $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ou w é uma folha da forma x_i , com $x \in \mathcal{C}_i$, para algum $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Assim, vamos considerar dois casos.

Caso 1. Suponhamos que $w = \mathcal{C}_i$, para algum $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Assim, pela construção de T_u e T_v , sabemos que $u, v \in \mathcal{C}_i$ e, portanto, $uv \in E(G)$.

Caso 2. Suponhamos que w é uma folha da forma x_i , com $x \in \mathcal{C}_i$, para algum $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Assim, pela construção de T_u e T_v , temos $\mathcal{C}_i \in T_u \cap T_v$. Então, por um raciocínio completamente análogo ao caso anterior, temos $uv \in E(G)$.

O Exemplo 9 mostra como podemos construir um modelo de interseção para o grafo *rising-sun* munido de uma orientação transitiva. Nosso objetivo, agora, é

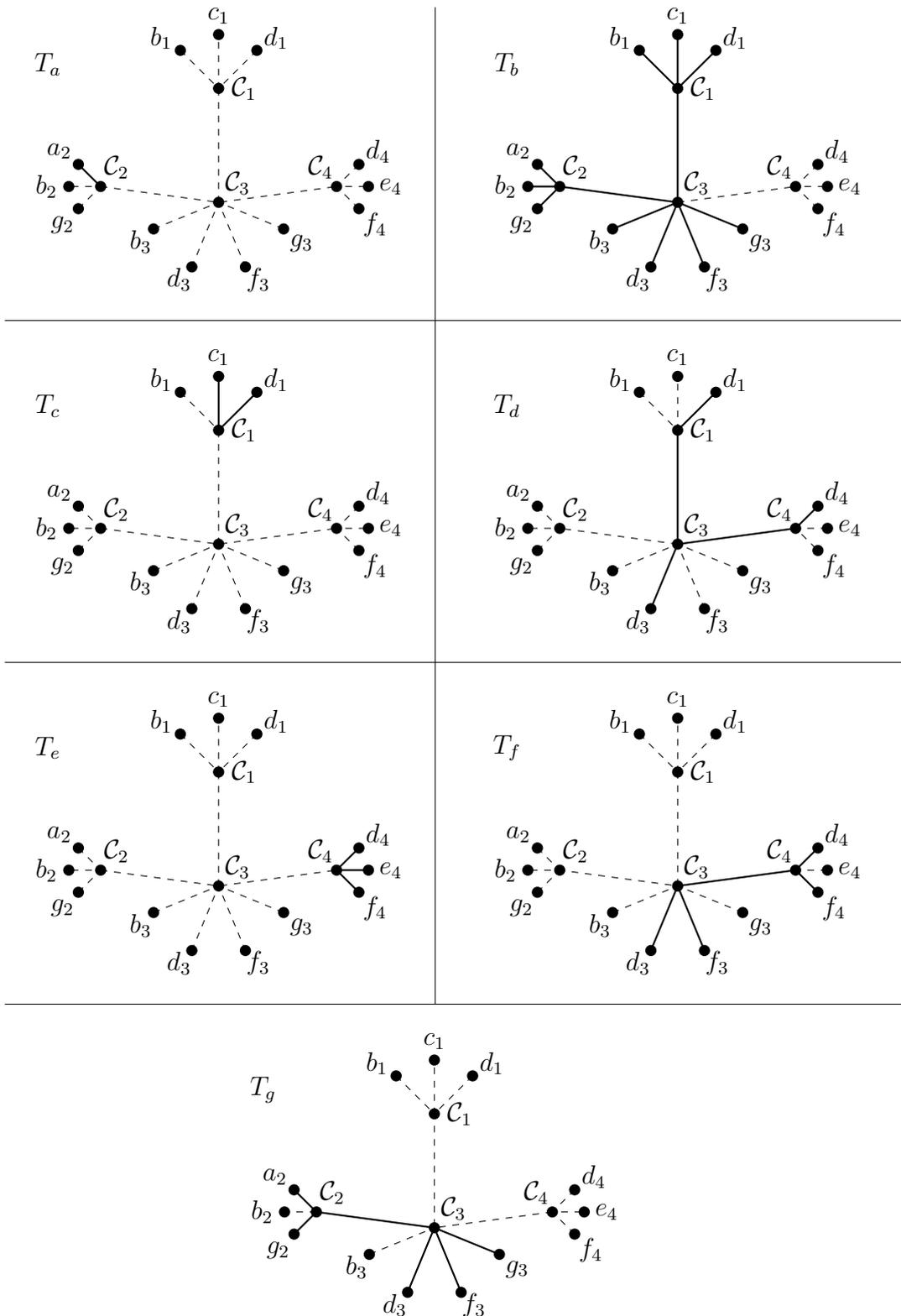


Figura 4.6: Família \mathcal{F} das subárvores de T .

descrever esta construção de forma geral, para qualquer grafo cordal comparabilidade munido de qualquer orientação transitiva.

Teorema 12. Se G é um grafo com conjunto de cliques maximais $\{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_k\}$, tal que $|\mathcal{C}_i| = n_i$, para cada $i \in [k]$, então, as seguintes condições são equivalentes:

- (a) G é cordal comparabilidade.
- (b) G é o grafo de interseção de uma família $\mathcal{F} = \{T_v : v \in V(G)\}$ de subárvores de uma árvore T que satisfazem as seguintes propriedades:

P1. Existem conjuntos não vazios $\{c_1, \dots, c_k\}$, $\{f_1^{(1)}, \dots, f_{n_1}^{(1)}\}$, \dots , $\{f_1^{(i)}, \dots, f_{n_i}^{(i)}\}$, \dots , $\{f_1^{(k)}, \dots, f_{n_k}^{(k)}\}$, dois a dois disjuntos, tais que $V(T) = \{c_1, \dots, c_k\} \cup \bigcup_{i=1}^k \{f_1^{(i)}, \dots, f_{n_i}^{(i)}\}$, $T[c_1, \dots, c_n]$ é subárvore de T e $f_j^{(i)}$ são folhas.

Em geral, denotamos $H \preceq G$ quando o grafo H é subgrafo induzido do grafo G . No que segue, para todos $T_v \in \mathcal{F}$ e $i \in [k]$, se $c_i \in V(T_v)$, o subgrafo induzido $T_v[\{c_i\} \cup \{f_j^{(i)} : f_j^{(i)} \in V(T_v)\}]$ é denotado por $T_v^{(c_i)}$.

P2. Para todos $T_u, T_v \in \mathcal{F}$ e $i \in [k]$, se $c_i \in V(T_u) \cap V(T_v)$, então $T_u^{(c_i)} \preceq T_v^{(c_i)}$ ou (exclusivo) $T_v^{(c_i)} \preceq T_u^{(c_i)}$.

P3. Para todos $T_v \in \mathcal{F}$ e $i \in [k]$, se existe $j \in [n_i]$ tal que $f_j^{(i)} \in V(T_v)$, então $c_i \in V(T_v)$.

P4. Para todas $T_u, T_v, T_w \in \mathcal{F}$, se existem c_i e c_j tais que $T_u^{(c_i)} \preceq T_v^{(c_i)}$ e $T_v^{(c_j)} \preceq T_w^{(c_j)}$, então $c_i, c_j \in V(T_u) \cap V(T_v) \cap V(T_w)$.

P5. Para todas $T_u, T_v \in \mathcal{F}$ tais que $c_i, c_j \in V(T_u) \cap V(T_v)$, se $T_u^{(c_i)} \preceq T_v^{(c_i)}$, então $T_u^{(c_j)} \preceq T_v^{(c_j)}$.

PROVA. Seja G um grafo com conjunto de cliques maximais $\{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_k\}$, tal que $|\mathcal{C}_i| = n_i$, para todo $i \in [k]$. Desta maneira, para cada $i \in [k]$, podemos assumir que $\mathcal{C}_i = \{v_1^{(i)}, \dots, v_{n_i}^{(i)}\}$.

(\Rightarrow) Suponhamos que G é cordal comparabilidade.

Sejam T_G uma árvore característica de G com $V(T_G) = \{c_1, \dots, c_k\}$ e \leq uma orientação transitiva de G .

Para definirmos T e \mathcal{F} , tomamos os conjuntos não vazios e disjuntos dois a dois $\{c_1, \dots, c_k\}$, $\{f_1^{(1)}, \dots, f_{n_1}^{(1)}\}$, \dots , $\{f_1^{(i)}, \dots, f_{n_i}^{(i)}\}$, \dots , $\{f_1^{(k)}, \dots, f_{n_k}^{(k)}\}$. Além disso, assumimos que os elementos de $\{c_1, \dots, c_k\}$ correspondem aos elementos de $\{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_k\}$ e, para cada $i \in [k]$, que os elementos de $\{f_1^{(i)}, \dots, f_{n_i}^{(i)}\}$ correspondem aos elementos de $\{v_1^{(i)}, \dots, v_{n_i}^{(i)}\}$

A partir daí, definimos a árvore T como segue:

$$V(T) = \{c_1, \dots, c_k\} \cup \bigcup_{i=1}^k \{f_1^{(i)}, \dots, f_{n_i}^{(i)}\}$$

e

$$E(T) = \{c_i c_j : \mathcal{C}_i \mathcal{C}_j \in E(T_G)\} \cup \bigcup_{i=1}^k \{c_i f_1^{(i)}, \dots, c_i f_{n_i}^{(i)}\}.$$

Isto é, para cada clique maximal \mathcal{C}_i de G , a árvore T possui o vértice c_i correspondente a \mathcal{C}_i e os n_i vértices $f_1^{(i)}, \dots, f_{n_i}^{(i)}$ correspondentes aos elementos de \mathcal{C}_i . Além disso, T possui arestas de dois tipos: as do tipo $c_i c_j$, correspondentes às arestas da árvore característica de G , e as do tipo $c_i f_j^{(i)}$, correspondentes à pertinência dos vértices de G às cliques maximais de G .

Agora, para cada $v \in V(G)$, definimos:

$$T_v = T \left[\{c_i : i \in [k] \text{ e } v \in \mathcal{C}_i\} \cup \{f_j^{(i)} : i \in [k], j \in [n_i], v \in \mathcal{C}_i \text{ e } v_j^{(i)} \leq v\} \right]$$

Isto é, para cada vértice v de G , o grafo T_v é induzido em T pelos seguintes vértices: os vértices c_i correspondentes às cliques maximais de G que possuem v como elemento; para cada clique maximal \mathcal{C}_i , de G , que possui v como elemento, a folha de T que corresponde a v e, também, as folhas de T que correspondem aos vértices que apontam para v (menores que v), de acordo com a orientação transiva \leq .

Como T_G é árvore característica de G e os vértices acrescentados a T_G para formar T são folhas de T , existe um único caminho entre quaisquer dois vértices de T_v . Desta forma, T_v é subárvore de T .

Seja $\mathcal{F} = \{T_v : v \in V\}$.

Por definição, T satisfaz P1. Vamos, agora, provar que G é o grafo de interseção de \mathcal{F} e que \mathcal{F} satisfaz às condições P2, P3, P4 e P5.

G é o grafo de interseção de \mathcal{F} . Sejam $u, v \in V(G)$. Vamos provar que $uv \in E(G)$ se, e somente se, $T_u \cap T_v \neq \emptyset$.

Para provarmos a implicação da esquerda para a direita, suponhamos que $uv \in E(G)$. Daí, existe um clique maximal \mathcal{C}_i de G tal que $u, v \in \mathcal{C}_i$. Assim, pela definição de T_u , temos $c_i \in V(T_u)$. Analogamente, $c_i \in V(T_v)$. Logo, $T_u \cap T_v \neq \emptyset$.

Para provarmos a recíproca, suponhamos que $T_u \cap T_v \neq \emptyset$. Daí, existe $w \in V(T)$ tal que $w \in V(T_u)$ e $w \in V(T_v)$. Pela construção de T , temos duas possibilidades: $w = c_i$, para algum $i \in [k]$, ou, $w = f_j^{(i)}$, para algum $i \in [k]$ e para algum $j \in [n_i]$. Assim, vamos considerar dois casos:

Caso 1. Suponhamos que $w = c_i$, para algum $i \in [k]$. Assim, $u, v \in \mathcal{C}_i$. Logo, $uv \in E(G)$.

Caso 2. Suponhamos que $w = f_j^{(i)}$, para alguns $i \in [k]$ e $j \in [n_i]$. Assim, pela construção de T_u e T_v , obtemos que $c_i \in T_u \cap T_v$. Desta forma, um raciocínio completamente análogo ao caso anterior garante o resultado.

\mathcal{F} satisfaz às condições P2–P5. Sejam $T_u, T_v, T_w \in \mathcal{F}$ e $i \in [k]$.

P2. Suponhamos que $c_i \in V(T_u) \cap V(T_v)$. Daí, pela definição de T_u , temos $u \in \mathcal{C}_i$. Analogamente, $v \in \mathcal{C}_i$. Assim, como \mathcal{C}_i é clique, temos $uv \in E(G)$.

Agora, como $<$ é uma orientação transitiva de G , vamos considerar dois casos exclusivos.

Caso 1. Suponhamos $u < v$, vamos provar que $V(T_u^{(c_i)}) \subset V(T_v^{(c_i)})$. Para isto, tomemos $w \in V(T_u^{(c_i)})$. Daí, pela definição de $T_u^{(c_i)}$, existe $i \in [k]$ tal que $w = c_i$ ou existem $i \in [k]$ e $j \in [n_i]$ tais que $w = f_j^{(i)}$. Assim, vamos considerar dois subcasos.

1.1. Se existe $i \in [k]$ tal que $w = c_i$, então, como $c_i \in V(T_v)$ temos $w \in T_v^{(c_i)}$, pela definição de $T_v^{(c_i)}$.

1.2. Se existem $i \in [k]$ e $j \in [n_i]$ tais que $w = f_j^{(i)}$, então $f_j^{(i)}$ corresponde a um vértice $v_j^{(i)} \in \mathcal{C}_i$ tal que $v_j^{(i)} \leq u$, pela definição de $T_u^{(c_i)}$.

Por outro lado, pela definição de $T_u^{(c_i)}$, existe $v_i^{(k)}$ correspondente ao vértice u , para algum $k \in [n_i]$. Pela hipótese, $v_i^{(k)} \in T_v^{(c_i)}$ e, desta forma, $u \leq v$, pela definição de $T_v^{(c_i)}$.

Desta forma, $v_j^{(i)} \leq u < v$. Logo $w = f_j^{(i)} \in T_v^{(c_i)}$, pela definição de $T_v^{(c_i)}$.

Assim, em ambos os subcasos, concluímos que $V(T_u^{(c_i)}) \subset V(T_v^{(c_i)})$.

Para demonstrar que $T_u^{(c_i)} \preceq T_v^{(c_i)}$, resta-nos provar que, dados $x, y \in V(T_v^{(c_i)})$ tais que $xy \in E(T_v^{(c_i)})$, temos $xy \in E(T_u^{(c_i)})$. De fato, se $xy \in E(T_v^{(c_i)})$, então, sem perda de generalidade, podemos considerar $x = c_i$ e $y = f_j^{(i)}$, para algum $j \in [n_i]$. Assim, $c_i f_j^{(i)} \in E(T_u^{(c_i)})$, pela construção das subárvores.

Caso 2. Suponhamos que $v \leq u$. Este caso é inteiramente análogo ao caso $u < v$, o que demonstra $T_v^{(c_i)} \preceq T_u^{(c_i)}$.

P3. Suponhamos que existe $j \in [n_i]$ tal que $f_j^{(i)} \in V(T_v)$. Daí, pela definição de T_v , temos $v \in \mathcal{C}_i$. Logo, $c_i \in V(T_v)$.

P4. Suponhamos que existem c_i e c_j tais que $T_u^{(c_i)} \preceq T_v^{(c_i)}$ e $T_v^{(c_j)} \preceq T_w^{(c_j)}$.

Daí, pela definição de $T_u^{(c_i)}$, existe $k \in [n_i]$ tal que $f_k^{(i)} \in V(T_u^{(c_i)})$ correspondente ao vértice u . Pela hipótese, temos que $f_k^{(i)} \in V(T_v^{(c_i)})$. Assim, pela definição de $T_v^{(c_i)}$, obtemos que $u \leq v$.

Analogamente, pelo fato de $T_v^{(c_j)} \preceq T_w^{(c_j)}$, obtemos que $v \leq w$.

Pela transitividade de \leq , temos $u \leq w$. Assim, $uw \in E(G)$. Logo $uv, uw, vw \in E(G)$ e portanto $u, v, w \in \mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j$. De onde podemos concluir, pela definição de T_u, T_v e T_w , que $c_i, c_j \in V(T_u) \cap V(T_v) \cap V(T_w)$.

P5. Suponhamos que $c_i, c_j \in V(T_u) \cap V(T_v)$ e $T_u^{(c_i)} \preceq T_v^{(c_i)}$.

Vamos demonstrar que $V(T_u^{(c_j)}) \subset V(T_v^{(c_j)})$.

Seja $x \in V(T_u^{(c_j)})$. Pela construção de T , vamos considerar dois casos, $x = c_j$ ou $x = f_k^{(j)}$, para algum $k \in [n_j]$.

Caso 1. Suponhamos que $x = c_j$. Assim, pela definição de $T_v^{(c_j)}$, temos que $x \in V(T_v^{(c_j)})$.

Caso 2. Suponhamos que $x = f_k^{(j)}$, para algum $k \in [n_j]$. Assim, pela definição de $T_u^{(c_j)}$, x corresponde a algum $v_k^{(j)} \in \mathcal{C}_j$ tal que $v_k^{(j)} \leq u$.

Além disso, pela definição de $T_u^{(c_i)}$, existe $f_l^{(i)}$ correspondente ao vértice $v_l^{(i)} = u$. Assim, pela hipótese, $v_l^{(i)} \in V(T_v^{(c_i)})$ e, pela definição de $T_v^{(c_i)}$, temos $v_l^{(i)} = u \leq v$.

Desta forma, pela transitividade de \leq , obtemos $v_k^{(j)} \leq u \leq v$. Daí, pela definição de $T_v^{(c_j)}$, $x = f_k^{(j)} \in V(T_v^{(c_j)})$.

Assim, fica demonstrado que $V(T_u^{(c_j)}) \subset V(T_v^{(c_j)})$.

Falta-nos demonstrar que, para todos $x, y \in V(T_u^{(c_j)})$ tais que $xy \in E(T_v^{(c_j)})$, temos $xy \in E(T_u^{(c_j)})$. Mas aqui, o raciocínio será omitido pois é completamente análogo ao utilizado em P₂.

(\Leftarrow) Seja T uma árvore e $\mathcal{F} = \{T_u, \dots, T_v\}$ uma família de subárvores de T satisfazendo às propriedades P1 – P5, listadas no enunciado do Teorema 12. Vamos provar que $\Omega(\mathcal{F})$ é um grafo cordal comparabilidade.

$\Omega(\mathcal{F})$ é grafo cordal. De fato, como \mathcal{F} é uma família de subárvores de uma árvore, pelo Teorema 4, $\Omega(\mathcal{F})$ é cordal.

$\Omega(\mathcal{F})$ é grafo de comparabilidade. Seja \rightarrow a relação sobre \mathcal{F} , definida do seguinte modo, para todas $T_u, T_v \in \mathcal{F}$:

$$T_u \rightarrow T_v \text{ se, e somente se, existe } c_i \in V(T_u) \cap V(T_v) \text{ tal que } T_u^{(c_i)} \subset T_v^{(c_i)}.$$

Vamos provar que \rightarrow é orientação transitiva de $\Omega(\mathcal{F})$.

Em primeiro lugar, vamos provar que \rightarrow é uma orientação de $\Omega(\mathcal{F})$, ou seja, que para todas $T_u, T_v \in \mathcal{F}$, temos $T_u T_v \in E(\Omega(\mathcal{F}))$ se, e somente se, $T_u \rightarrow T_v$ ou (exclusivo) $T_v \rightarrow T_u$.

Sejam $T_u, T_v \in \mathcal{F}$.

Para provarmos a implicação da esquerda para a direita, suponhamos que $T_u T_v \in E(\Omega(\mathcal{F}))$. Daí, $T_u \cap T_v \neq \emptyset$. Seja $w \in V(T_u) \cap V(T_v)$. Como $w \in V(T)$, por P1, $V(T) = \{c_1, \dots, c_k\} \cup \bigcup_{i=1}^k \{f_1^{(i)}, \dots, f_{n_i}^{(i)}\}$. Vamos considerar dois casos.

Caso 1. Suponhamos que existe $i \in [k]$ tal que $w = c_i$. Assim, $c_i \in V(T_u) \cap V(T_v)$. Então, por P2, $T_u^{(c_i)} \preceq T_v^{(c_i)}$ ou (exclusivo) $T_v^{(c_i)} \preceq T_u^{(c_i)}$. Logo, pela definição de \rightarrow , temos $T_u \rightarrow T_v$ ou (exclusivo) $T_v \rightarrow T_u$.

Caso 2. Suponhamos que existem $i \in [k]$ e $j \in [n_i]$ tais que $w = f_j^{(i)}$, como $w \in V(T_u)$ e $w \in V(T_v)$, por P3, temos $c_i \in V(T_u)$ e $c_i \in V(T_v)$, ou seja, $c_i \in V(T_u) \cap V(T_v)$. Assim, por P2, $T_u^{(c_i)} \rightarrow T_v^{(c_i)}$ ou (exclusivo) $T_v^{(c_i)} \rightarrow T_u^{(c_i)}$. Logo, pela definição de \rightarrow , temos $T_u \rightarrow T_v$ ou (exclusivo) $T_v \rightarrow T_u$.

Para provarmos a recíproca, suponhamos que $T_u T_v \notin E(\Omega(\mathcal{F}))$. Daí, $V(T_u) \cap V(T_v) = \emptyset$. Assim, não existe $i \in [k]$ tal que $c_i \in V(T_u) \cap V(T_v)$. Daí, pela definição de \rightarrow , temos $T_u \not\rightarrow T_v$ e, também, $T_v \not\rightarrow T_u$. Logo, não é o caso que $T_u \rightarrow T_v$ ou (exclusivo) $T_v \rightarrow T_u$.

Em segundo lugar, vamos provar que \rightarrow é transitiva sobre $\Omega(\mathcal{F})$, ou seja, que para todas $T_u, T_v, T_w \in \mathcal{F}$, se $T_u \rightarrow T_v$ e $T_v \rightarrow T_w$, então $T_u \rightarrow T_w$.

De fato, sejam $T_u, T_v, T_w \in \mathcal{F}$. Suponhamos que $T_u \rightarrow T_v$ e $T_v \rightarrow T_w$. Daí, pela definição de \rightarrow , existem $c_i \in V(T_u) \cap V(T_v)$ e $c_j \in V(T_v) \cap V(T_w)$ tais que $T_u^{(c_i)} \preceq T_v^{(c_i)}$ e $T_v^{(c_j)} \preceq T_w^{(c_j)}$. Daí, por P4, $c_i, c_j \in V(T_u) \cap V(T_v) \cap V(T_w)$. Assim, como $c_i, c_j \in V(T_v) \cap V(T_w)$ e $T_v^{(c_j)} \preceq T_w^{(c_j)}$, por P5, $T_v^{(c_i)} \preceq T_w^{(c_i)}$. Daí, pela transitividade de \preceq , temos $T_u^{(c_i)} \preceq T_w^{(c_i)}$. Assim, existe c_i tal que $T_u^{(c_i)} \preceq T_w^{(c_i)}$. Logo, pela definição de \rightarrow , temos $T_u \rightarrow T_w$. ■

Capítulo 5

Árvores características

Neste capítulo, provamos que as árvores características dos grafos cordais comparabilidade não possuem grau limitado. Este resultado foi apresentado no VIII Encontro de Teoria da Computação (ETC 2023) [4]. Dividimos o capítulo em duas seções cujo conteúdo está descrito a seguir.

Na Seção 5.1, motivamos o problema, a partir do resultado de Gilmore e Hoffman [16] que mostram que um grafo G é de intervalo se, e somente se, possui uma árvore característica com grau máximo menor ou igual a 2. A seguir, ilustramos a construção e o raciocínio que será empregado para mostrar que um resultado análogo, limitando o grau das árvores características, não se estabelece para os grafos cordais comparabilidade.

Na Seção 5.2, apresentamos a construção e o resultado geral, baseados nos exemplos anteriormente apresentados.

5.1 Árvores características dos grafos RS_1, \dots, RS_4

Uma das principais caracterizações dos grafos de intervalo — ou seja, os grafos de interseção de intervalos da reta real — é dada por Gilmore e Hoffman [16] que mostram que um grafo G é de intervalo se, e somente se, é cordal cocomparabilidade se, e somente se, possui uma árvore característica que é um caminho.

Dado um grafo G , denotamos o grau máximo dos seus vértices por $\Delta(G)$ e uma árvore característica qualquer de G por T_G . Com estas notações, o resultado de Gilmore e Hoffman garante que um grafo G é de intervalo se, e somente se, existe uma árvore característica T_G tal que $\Delta(T_G) \leq 2$.

Como o nosso estudo é dedicado à classe Cordal comparabilidade, é natural que investiguemos se um resultado análogo ao de Gilmore e Hoffman é verdadeiro para

os grafos cordais comparabilidade. Neste capítulo, respondemos esta pergunta negativamente, provando que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um grafo cordal comparabilidade RS_n , tal que RS_n possui uma única árvore característica T_{RS_n} isomorfa a $K_{1,n}$, com $\Delta(T_{RS_n}) = n$.

Para facilitar a compreensão do se que segue, nesta seção, examinamos alguns valores iniciais de n . Na Seção 5.2, apresentamos a construção geral.

Exemplo 10. Para $n = 1$, tomemos o grafo $RS_1 = K_1$ ilustrado na Figura 5.1 e definido por uma clique central com $2 \cdot n - 2 = 2 \cdot 1 - 2$ vértices e mais $n = 1$ vértice adicional que formam cliques simpliciais de tamanho $n = 1$, conforme ilustrado abaixo. Assim, $V(RS_1) = \{a_1\}$ e $E(RS_1) = \emptyset$.

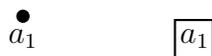


Figura 5.1: Grafo RS_1 e sua árvore característica T_{RS_1} .

Temos que RS_1 é cordal. De fato, como RS_1 possui um único vértice, não possui ciclos induzidos. Além disso, RS_1 é de comparabilidade. De fato, como RS_1 não possui arestas, \emptyset é uma orientação transtiva de RS_1 . Finalmente, RS_1 possui $T_{RS_1} = K_1$, com $\Delta(T_{RS_1}) = 0$, ilustrada na figura 5.1, como única árvore característica. De fato, $\{a_1\}$ é a única clique de RS_1 .

Exemplo 11. Para $n = 2$, tomemos o grafo $RS_2 = P_3$, ilustrado na Figura 5.2 e definido por uma clique central com $2 \cdot n - 2 = 2 \cdot 2 - 2$ vértices e mais $n = 2$ vértices adicionais que formam cliques simpliciais de tamanho $n = 2$. Assim, $V(RS_2) = \{v_1, v_2, a_1, a_2\}$ e $E(RS_2) = \{v_1v_2, v_1a_1, v_2a_2\}$.

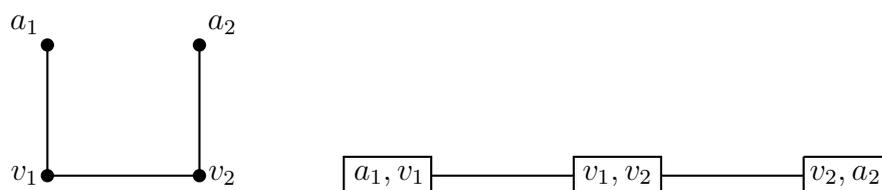


Figura 5.2: Grafo RS_2 e sua árvore característica T_{RS_2} .

Temos que RS_2 é cordal. De fato, como RS_2 é um caminho, não possui ciclos induzidos. Além disso, RS_2 é de comparabilidade. De fato, $O = \{(a_1, v_1), (v_2, v_1), (v_2, a_2)\}$ é uma orientação transtiva de RS_2 . Finalmente, RS_2 possui a estrela $T_{RS_2} = K_{1,2}$, com $\Delta(T_{RS_2}) = 2$, ilustrada na Figura 5.2, como única árvore característica. De fato, as cliques maximais de RS_2 são as simpliciais $\mathcal{C}_1 = \{a_1, v_1\}$, $\mathcal{C}_2 = \{a_2, v_2\}$ e a central $\mathcal{C} = \{v_1, v_2\}$. A aresta $\mathcal{C}_1\mathcal{C}$ de T_{RS_2} é forçada pelo vértice v_1 de RS_2 e a aresta $\mathcal{C}_2\mathcal{C}$ é forçada pelo vértice v_2 .

Exemplo 12. Para $n = 3$, tomemos o grafo *rising-sun*, RS_3 , ilustrado na Figura 5.3 e definido por uma clique central com $2 \cdot n - 2 = 2 \cdot 3 - 2 = 4$ vértices centrais e mais $n = 3$ vértices adicionais que formam cliques simpliciais de tamanho $n = 3$. Assim, $V(RS_3) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, a_1, a_2, a_3\}$ e $E(RS_3)$ tem como elementos as arestas da clique central $\mathcal{C} = \{v_1, \dots, v_4\}$ e, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, as arestas associadas da clique simplicial $\mathcal{C}_i = \{a_i, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}\}$.

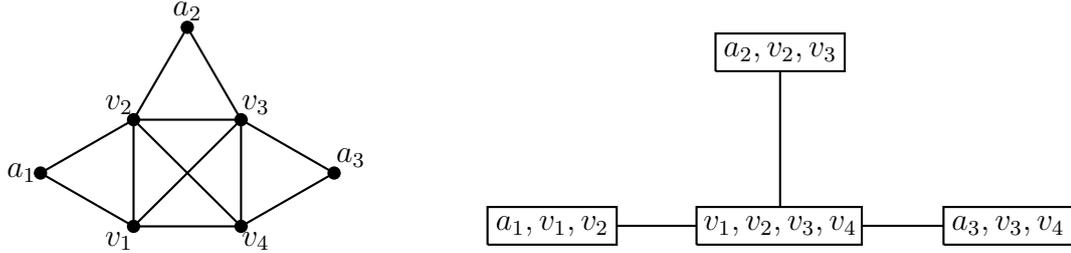


Figura 5.3: Grafo RS_3 e sua árvore característica T_{RS_3} .

Temos que RS_3 é cordal. De fato, por inspeção, vemos que todos os ciclos induzidos de RS_3 são triângulos. Além disso, RS_3 é de comparabilidade. De fato, uma orientação transitiva de RS_3 é dada pela seguinte orientação: $a_1 \rightarrow v_2$, $a_2 \rightarrow v_2$, $v_3 \rightarrow v_2$, $v_4 \rightarrow v_2$, $v_5 \rightarrow v_2$, $v_3 \rightarrow a_2$, $v_3 \rightarrow v_5$, $v_3 \rightarrow v_4$, $v_3 \rightarrow a_3$, $a_1 \rightarrow v_5$, $v_4 \rightarrow a_3$ e $v_4 \rightarrow v_5$.

Finalmente, RS_3 possui $T_{RS_3} = K_{1,3}$, com $\Delta(T_{RS_3}) = 3$, ilustrada na Figura 5.3, como única árvore característica. De fato, $T_{RS_3} = K_{1,3}$ ou $T_{RS_3} = P_4$. Suponhamos, para uma contradição, que $T_{RS_3} = P_4$. Desta forma, RS_3 é um grafo de intervalo. Assim, por [16], RS_3 é de cocomparabilidade. Obtemos, pois, uma contradição, uma vez que o complemento de RS_3 é um subgrafo induzido proibido para comparabilidade, de acordo com a Figura 2.13.

Concluimos que $K_{1,3}$ é a única árvore característica de T_{RS_3} .

Os Exemplos 10, 11 e 12 mostram que, para $n \in \{0, 1, 2, 3\}$, existe um grafo cordal comparabilidade RS_n tal que RS_n possui uma única árvore característica T_{RS_n} com $\Delta(T_{RS_n}) = n$. Vamos, agora, mostrar que a construção apresentada no Exemplo 12 pode ser generalizada para todo n . Continuamos apresentando as ideias passo a passo, exibindo em primeiro lugar, no Exemplo 13, o grafo cordal comparabilidade RS_4 — uma generalização do *rising-sun* — que possui a estrela $K_{1,4}$, com $\Delta(T_{RS_4}) = 4$, como única árvore característica. Em seguida, generalizamos o RS_4 , provando o Teorema 13. O Exemplo 13 está redigido de modo a ilustrar as ideias usadas na prova do Teorema 13.

Exemplo 13. Para $n = 4$, tomemos o grafo RS_4 ilustrado na Figura 5.4, definido por uma clique central com $2 \cdot n - 2 = 2 \cdot 4 - 2 = 6$ vértices e mais $n = 4$ vértices adicionais que formam cliques simpliciais de tamanho $n = 4$. Assim, $V(RS_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, a_1, a_2, a_3, a_4\}$ e $E(RS_4)$ tem como elementos as arestas da clique central $\mathcal{C} = \{v_1, \dots, v_6\}$ e, para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, as arestas da clique simplicial $\mathcal{C}_i = \{a_i, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}\}$.

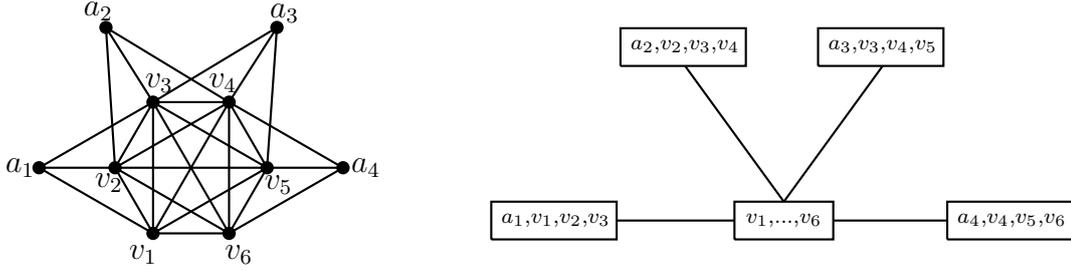


Figura 5.4: O grafo RS_4 e sua árvore característica T_{RS_4} .

Vamos mostrar que RS_4 é cordal, isto é, qualquer ciclo de RS_4 com pelo menos quatro vértices possui uma corda. Seja C um ciclo em RS_4 com pelo menos quatro vértices consecutivos x, y, z, w . Vamos considerar dois casos:

Caso 1. Suponhamos que $x, y, z, w \in \mathcal{C}$. Assim, como \mathcal{C} é clique, xz é uma corda em C .

Caso 2. Suponhamos que existe algum elemento em $\{x, y, z, w\}$ que não pertence a \mathcal{C} . Assim, supomos, sem perda de generalidade, que $x \notin \mathcal{C}$. Daí, pela definição de RS_4 , temos $y \in V(\mathcal{C})$. Vamos considerar três possíveis subcasos.

2.1 Se $z, w \in V(\mathcal{C})$, como \mathcal{C} é clique, então yw é uma corda em C .

2.2 Se $z \in V(\mathcal{C})$ e $w \notin V(\mathcal{C})$, então, como $x, w \notin \mathcal{C}$, temos que $xw \notin E(RS_4)$. Daí, como C é ciclo e cada vértice que não pertence a \mathcal{C} é adjacente a vértices em \mathcal{C} , existe vértice s do ciclo tal que $s \in \mathcal{C}$ adjacente a w . Logo, como $s \in \mathcal{C}$, obtemos que zs é uma corda em C .

2.3 Se $z \notin V(\mathcal{C})$ e $w \in V(\mathcal{C})$, então, por um raciocínio análogo ao Subcaso 2.2, existe $s \in \mathcal{C}$ tal que $s \in \mathcal{C}$ e $zs \in E(RS_4)$. Daí, ys é uma corda em C .

Agora, mostraremos que RS_4 é de comparabilidade, isto é, RS_4 possui uma orientação transitiva. Seja \leq a orientação do RS_4 ilustrada na Figura 5.5:

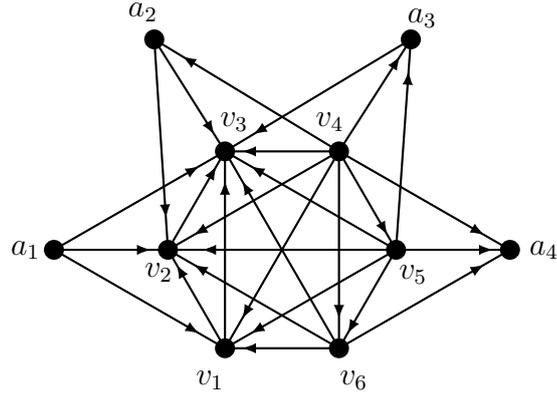


Figura 5.5: Orientação das arestas de RS_4 .

Mais especificamente, \leq pode ser descrita da seguinte maneira:

- as arestas da clique central \mathcal{C} formam uma ordem total, orientadas como segue:

$$v_4 \leq v_5 \leq v_6 \leq v_1 \leq v_2 \leq v_3;$$

- as arestas $a_i v_j$, onde $i \in [4]$ e $j \in \{i, i+2, i+3\}$, estão orientadas como segue:

$$\begin{cases} a_1 \leq v_j, \text{ para todo } j \in \{1, 2, 3\}, \\ a_2 \leq v_j, \text{ para todo } j \in \{2, 3\}, \text{ e } v_4 \leq a_2, \\ a_3 \leq v_3 \text{ e } a_3 \leq v_j, \text{ para todo } j \in \{4, 5\}, \\ v_j \leq a_4, \text{ para todo } j \in \{4, 5, 6\}. \end{cases} \quad (5.1)$$

Uma ilustração mais clara de \leq é dada na Figura 5.5, esta figura possui uma *parte esquerda* e uma *parte direita*. Além disto, os arcos estão classificados como os que *apontam para baixo*, os que *apontam para cima*, os da clique central que *apontam da esquerda para a direita* e os da clique central que *apontam da direita para a esquerda*.

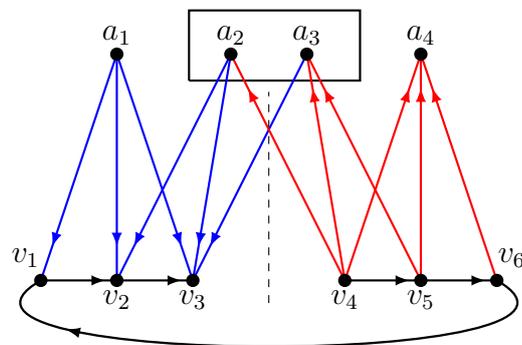


Figura 5.6: Outra ilustração para a orientação das arestas de RS_4 .

Vamos mostrar que \leq é transitiva, isto é, vamos mostrar que para todos $x, y, z \in V(RS_4)$, se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $xz \in E(RS_4)$ e $x \leq z$. Sejam $x, y, z \in V(RS_4)$. Suponhamos que $x \leq y$ e $y \leq z$. Vamos considerar quatro casos.

Caso 1. Suponhamos que $x, y, z \in \mathcal{C}$. Assim, como \leq restrita a \mathcal{C} é uma ordem total, obtemos $x \leq z$.

Caso 2. Suponhamos que $x \notin \mathcal{C}$. Assim, como $x \leq y$ e a_4 não aponta para baixo, existem $i \in \{1, 2, 3\}$ e $j \in \{i, \dots, 3\}$ tais que $x = a_i$ e $y = v_j$, ou seja, $x \leq y$ é um arco que aponta para baixo na Figura 5.6. Por outro lado, como $y \leq z$ e v_3 é um sumidouro, $y \neq v_3$. Daí, como para todo $i, j \in \{1, 2, 3\}$ temos $v_j \not\leq a_i$, existe $k \in \{j + 1, \dots, 3\}$ tal que $z = v_k$, ou seja, $y \leq z$ é um arco que aponta da esquerda para a direita na parte esquerda da Figura 5.6. Desta forma, temos a_i com $i \in \{1, 2, 3\}$, $i \leq j$ com $j \in \{i, \dots, 3\}$ e v_k com $k \in \{j + 1, \dots, 3\}$. Além disso, $\{a_i, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}\}$ é uma clique e, pela definição de \leq , a_i aponta para todos os v_l 's tais que $i < l \leq 3$. Logo, existe $a_i v_k \in E(RS_4)$ tal que $a_i \leq v_k$, ou seja, $x \leq z$.

Caso 3. Suponhamos que $y \notin \mathcal{C}$. Assim, como $x \leq y$ e a_1, a_2, a_3 apontam para baixo, existem $i \in \{4, 5, 6\}$ e $j \in \{2, 3, 4\}$ tais que $x = v_i$ e $y = a_j$, ou seja, $x \leq y$ é um arco que aponta para cima na Figura 5.6. Por outro lado, como $y \leq z$, existe $k \in \{1, 2, 3\}$ tal que $z = v_k$, ou seja, $y \leq z$ é um arco que aponta para baixo na Figura 5.6. Assim, temos v_i tal que $i \in \{4, 5, 6\}$ e v_k com $k \in \{1, 2, 3\}$. Agora, por ser uma ordem total quando restrita à clique \mathcal{C} , existe $v_i v_k \in E(RS_4)$ que, pela definição de \leq , é orientada de v_i para v_k , ou seja, $x \leq z$.

Caso 4. Suponhamos que $z \notin \mathcal{C}$. Assim, $z = a_i$ com $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Como existe um vértice y tal que $y \leq z$, pela Figura 5.6, temos que $i \in \{2, 3, 4\}$ e $y = v_j$ com $j \in \{4, 5, 6\}$. Suponhamos, para uma contradição, que $y = v_4$. Pela hipótese, existe $x \in V(RS_4)$ tal que $x \leq y$, uma contradição, pois, pela Figura 5.6, v_4 é fonte de RS_4 . Assim, podemos concluir que $x = a_i$ e $y = v_j$ com $i \in \{3, 4\}$ e $j \in \{5, 6\}$. Pela hipótese, existe $x \in V(RS_4)$ tal que $x \leq y$. Como $y = v_j$, com $j \in \{5, 6\}$, obtemos que $x = v_k$ com $4 \leq k < j$. Desta forma, $\{a_i, v_j, v_k\}$ é uma clique e, portanto, pela Figura 5.6, v_k aponta para a_i , isto é, $v_k = x \leq z = a_i$.

Finalmente, vamos provar que RS_4 possui a estrela $K_{1,4}$, com $\Delta(T_{RS_4}) = 4$ como única árvore característica. De fato, em primeiro lugar, a árvore $T_{RS_4} = K_{1,4}$ ilustrada na Figura 5.4 é uma árvore característica para RS_4 . Com efeito, $V(T_{RS_4})$ é

o conjunto de cliques maximais de RS_4 e tomando as seguintes subárvores de T_{RS_4} :

$$\begin{aligned} T_{v_1} &= T_{RS_4}[\mathcal{C}, \mathcal{C}_1], \\ T_{v_2} &= T_{RS_4}[\mathcal{C}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2], \\ T_{v_3} &= T_{RS_4}[\mathcal{C}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3], \\ T_{v_4} &= T_{RS_4}[\mathcal{C}, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4], \\ T_{v_5} &= T_{RS_4}[\mathcal{C}, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4], \\ T_{v_6} &= T_{RS_4}[\mathcal{C}, \mathcal{C}_4], \\ T_{a_i} &= T_{RS_4}[\mathcal{C}_i], \text{ para } i \in [4], \end{aligned}$$

verificamos diretamente que $\mathcal{F} = \{T_{v_1}, \dots, T_{v_6}, T_{a_1}, \dots, T_{a_4}\}$ satisfaz à Definição 5 e que RS_4 é o grafo de interseção de \mathcal{F} .

Em segundo lugar, vamos mostrar que não existe outra árvore característica para RS_4 . Com efeito, suponhamos, para uma contradição, que existe uma outra árvore característica T'_{RS_4} de RS_4 diferente de $K_{1,4}$. Daí, existem $\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j \in V(T'_{RS_4})$ com $\mathcal{C}_i \mathcal{C}_j \in E(T'_{RS_4})$, para $i \neq j \in [4]$.

Pela construção de RS_4 , existem vértices $v_i, v_{j+2} \in V(RS_4)$ tais que $v_i \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}_i$, $v_i \notin \mathcal{C}_j$, $v_{j+2} \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}_j$ e $v_{j+2} \notin \mathcal{C}_i$.

Consideremos T'_{v_i} e $T'_{v_{j+2}}$ as subárvores de T'_{RS_4} associadas a v_i e v_{j+2} , respectivamente.

Desta forma, existe um único caminho $P_i = C_{i_0} \dots C_{i_k}$ em T'_{v_i} , com $k \geq 1$, $C_{i_0} = \mathcal{C}$ e $C_{i_k} = \mathcal{C}_i$ (P_i também é único em T'_{RS_4}).

Temos, analogamente, um único caminho $P_j = C_{j_0} \dots C_{j_r}$ em $T'_{v_{j+2}}$, com $r \geq 1$, $C_{j_0} = \mathcal{C}$ e $C_{j_r} = \mathcal{C}_j$ (P_j também é único em T'_{RS_4}).

Tomemos os maiores índices $[p]$ e j_s , com $p \in [k]$ e $s \in [r]$, tais que $C_{[p]} = C_{j_s}$. Desta forma, consideremos os respectivos subcaminhos de P_i e P_j : $P'_i = C_{[p]} \dots C_{i_k}$ e $P'_j = C_{j_s} \dots C_{j_r}$. Ao concatenar P'_i, P'_j com $\mathcal{C}_j \mathcal{C}_i \in E(T'_{RS_4})$, obtemos um ciclo em T'_{RS_4} , uma contradição. Logo, a única árvore característica de RS_4 é T_{RS_4} , isto é, o $K_{1,4}$.

5.2 Árvores características dos grafos RS_n

Nesta seção, generalizamos a construção do grafo RS_4 , analisado no Exemplo 13, definindo, para cada n , o grafo RS_n que é cordal comparabilidade e possui uma única árvore característica $T_{RS_n} = K_{1,n}$, cujo grau máximo é igual a n .

Teorema 13. Para todo $n \in \mathbb{N}$, existe um grafo RS_n , tal que RS_n é cordal comparabilidade e RS_n possui uma única árvore característica T_{RS_n} com $\Delta(T_{RS_n}) = n$.

PROVA. Tomemos o grafo RS_n ilustrado na figura 5.7. Observamos que $V(RS_n) = \{v_1, \dots, v_{2n-2}, a_1, \dots, a_n\}$, $E(RS_n) = \{v_i v_j : i, j \in I_{2n-2}\} \cup \{a_i v_j : i \in [n] \text{ e } j \in \{i, \dots, n+i-2\}\}$. Além disso, RS_n possui $n+1$ cliques maximais. Uma destas é a clique central $\mathcal{C} = \{v_1, \dots, v_{2n-2}\}$, que induz em RS_n o subgrafo completo K_{2n-2} , ilustrado no centro da Figura 5.7. As outras n cliques maximais são as cliques simpliciais $\mathcal{C}_i = \{a_i, v_i, \dots, v_{n+i-2}\}$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, que induzem os subgrafos completos K_n 's na borda da Figura 5.7.

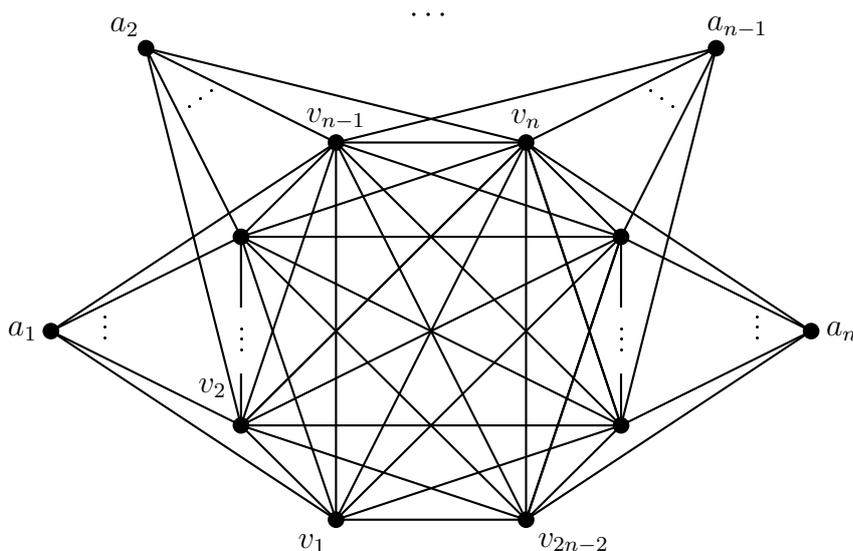


Figura 5.7: Grafo RS_n .

Uma árvore característica T_{RS_n} de RS_n está ilustrada abaixo (cf. Proposição 8).

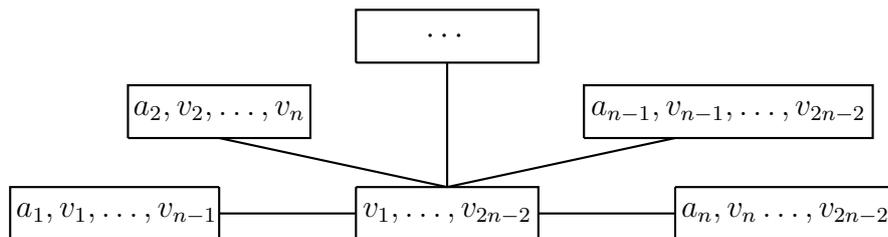


Figura 5.8: Árvore característica T_{RS_n} de RS_n .

A prova termina nas Proposições 6, 7 e 8 que mostram, respectivamente, que RS_n é cordal, é de comparabilidade e possui T_{RS_n} , com $\Delta(T_{RS_n}) = n$, como única árvore característica. ■

Proposição 6. O grafo RS_n é cordal.

PROVA. Seja C um ciclo em RS_n com pelo menos quatro vértices consecutivos x, y, z, w . Vamos considerar dois casos:

Caso 1. Suponhamos que $x, y, z, w \in \mathcal{C}$. Assim, como \mathcal{C} é clique, xz é uma corda em \mathcal{C} .

Caso 2. Suponhamos que existe algum elemento em $\{x, y, z, w\}$ que não pertence a \mathcal{C} . Assim, supomos, sem perda de generalidade, que $x \notin \mathcal{C}$. Daí, pela definição de RS_n , temos $y \in V(\mathcal{C})$. Vamos considerar três possíveis subcasos.

2.1 Se $z, w \in V(\mathcal{C})$, como \mathcal{C} é clique, então yw é uma corda em \mathcal{C} .

2.2 Se $z \in V(\mathcal{C})$ e $w \notin V(\mathcal{C})$, então, como $x, w \notin \mathcal{C}$, temos que $xw \notin E(RS_n)$. Daí, como \mathcal{C} é ciclo e cada vértice que não pertence a \mathcal{C} é adjacente a vértices em \mathcal{C} , existe vértice s do ciclo tal que $s \in \mathcal{C}$ adjacente a w . Logo, como $s \in \mathcal{C}$, obtemos que zs é uma corda em \mathcal{C} .

2.3 Se $z \notin V(\mathcal{C})$ e $w \in V(\mathcal{C})$, então, por um raciocínio análogo ao Subcaso 2.2, existe $s \in \mathcal{C}$ tal que $s \in \mathcal{C}$ e $zs \in E(RS_n)$. Daí, ys é uma corda em \mathcal{C} .

Fica demonstrado que RS_n é cordal. ■

Proposição 7. O grafo RS_n é de comparabilidade.

PROVA. Agora, consideremos a orientação das arestas de RS_n de acordo com a Figura 5.9 (que é uma generalização da orientação transitiva de RS_4 apresentada na Figura 5.6).

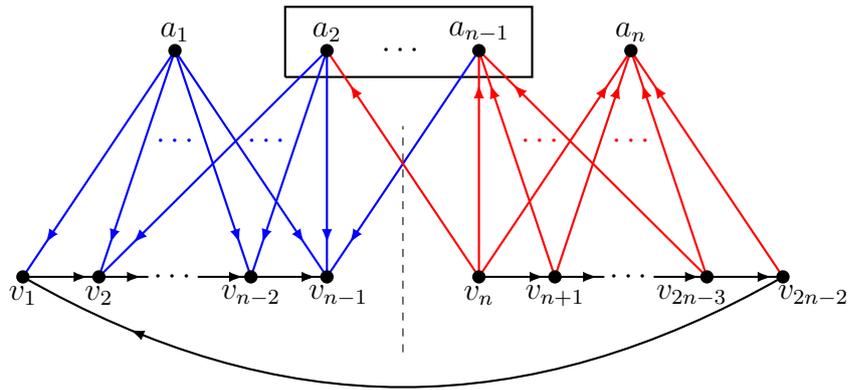


Figura 5.9: Outra ilustração para a orientação transitiva das arestas de RS_n .

Descrevemos esta orientação da seguinte maneira: em primeiro lugar, as arestas $a_i v_j \in E(RS_n)$, onde $i \in \{1, \dots, n\}$ e $j \in \{1, \dots, 2n - 2\}$, estão orientadas como

Assim, existe a transitividade da ordem total em \mathcal{C} garante que $x \rightarrow z$ (i.e, existe arco $x \rightarrow z$ da clique central que aponta da direita para a esquerda, especificamente na parte direita para a parte esquerda da Figura 5.9).

2.3 Se $z \notin \mathcal{C}$.

Como existe $y \in V(RS_n)$ tal que $y \rightarrow z$ temos que $y = v_i$ e $z = a_j$ para $i \in \{n, \dots, 2n - 2\}$ e $j \in \{2, \dots, n\}$ (i.e $y \rightarrow z$ é um arco que aponta para cima na Figura 5.9). Por outro lado, como $x \rightarrow y$, obtemos $y \neq v_n$ (já que v_n é fonte de RS_n) e $x = v_k$ para $k \in \{n, \dots, i - 1\}$ (i.e, $x \rightarrow y$ é um arco da clique central que aponta para a direita na parte direita da Figura 5.9, com x anterior ao y). Assim, existe $v_k a_j \in E(RS_n)$ tal que $v_k \rightarrow a_j$, ou seja, $x \rightarrow z$ (i.e, existe $x \rightarrow z$ um arco que aponta para cima na Figura 5.9).

Fica demonstrado que RS_n é comparabilidade. ■

Proposição 8. A única árvore característica T_{RS_n} do RS_n é o $K_{1,n}$.

PROVA. Em primeiro lugar, T_{RS_n} é uma árvore característica para RS_n , e, T_{RS_n} é $K_{1,n}$ (Figura 5.8).

De fato, $V(T_{RS_n})$ é o conjunto de cliques maximais de RS_n e existem as seguintes subárvores de T_{RS_n} que satisfazem à Definição 5:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{v_1} = T_{RS_n} [\mathcal{C}, \mathcal{C}_1] \\ T_{v_2} = T_{RS_n} [\mathcal{C}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2] \\ T_{v_3} = T_{RS_n} [\mathcal{C}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3] \\ \quad \quad \quad \vdots \\ T_{v_{n-1}} = T_{RS_n} [\mathcal{C}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \dots, \mathcal{C}_{n-1}] \\ T_{v_n} = T_{RS_n} [\mathcal{C}, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \dots, \mathcal{C}_n] \\ T_{v_{n+1}} = T_{RS_n} [\mathcal{C}, \mathcal{C}_3, \dots, \mathcal{C}_n] \\ \quad \quad \quad \vdots \\ T_{v_{2n-2}} = T_{RS_n} [\mathcal{C}, \mathcal{C}_n] \\ T_{a_i} = T_{RS_n} [\mathcal{C}_i] \text{ para } i \in \{1, \dots, n\} \end{array} \right. \quad (5.4)$$

Verificamos diretamente que o grafo RS_n é grafo de interseção da família de subárvores $\{T_{v_1}, \dots, T_{v_{2n-2}}, T_{a_1}, \dots, T_{a_n}\}$.

Em segundo lugar, vamos mostrar que não existe outra árvore característica para RS_n .

Com efeito, suponhamos, para uma contradição, que exista uma outra árvore característica T'_{RS_n} de RS_n diferente de $K_{1,n}$. Daí, existem $\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j \in V(T'_{RS_n})$ com $\mathcal{C}_i\mathcal{C}_j \in E(T'_{RS_n})$, para $i \neq j$ em $[n]$.

Pela construção de RS_n , existem vértices $v_i, v_{n+j-2} \in V(RS_n)$ tais que $v_i \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}_i$, $v_i \notin \mathcal{C}_j$, $v_{n+j-2} \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}_j$ e $v_{n+j-2} \notin \mathcal{C}_i$.

Consideremos T'_{v_i} e $T'_{v_{n+j-2}}$ as subárvores de T'_{RS_n} associadas a v_i e v_{n+j-2} , respectivamente.

Desta forma, existe um único caminho $P_i = C_{i_0} \dots C_{[k]}$ em T'_{v_i} , com $k \geq 1$, $C_{i_0} = \mathcal{C}$ e $C_{[k]} = \mathcal{C}_i$ (P_i também é único em T'_{RS_n}).

Temos, analogamente, um único caminho $P_j = C_{j_0} \dots C_{j_r}$ em T'_{v_j} , com $r \geq 1$, $C_{j_0} = \mathcal{C}$ e $C_{j_r} = \mathcal{C}_j$ (P_j também é único em T'_{RS_n}).

Tomemos os maiores índices $[p]$ e j_s , com $p \in [k]$ e $s \in I_r$, tais que $C_{[p]} = C_{j_s}$. Desta forma, consideremos os seguintes subcaminhos de P_i e P_j , respectivamente: $P'_i = C_{[p]} \dots C_{[k]}$ e $P'_j = C_{j_s} \dots C_{j_r}$. Ao concatenar P'_i, P'_j com $\mathcal{C}_j\mathcal{C}_i \in E(T'_{RS_n})$, obtemos um ciclo em T'_{RS_n} , uma contradição. Logo, a única árvore característica de RS_n é T_{RS_n} , isto é, o $K_{1,n}$. ■

Capítulo 6

Dimensão linear

Neste capítulo, revisamos os resultados de Ma e Spinrad [30] e de Kierstead, Trotter e Qin [28] que mostram, respectivamente, que um grafo cordal comparabilidade possui dimensão linear no máximo 4 e existe um grafo cordal comparabilidade cuja dimensão linear é exatamente 4. Além disso, como uma complementação a este estudo, provamos que se um grafo é split comparabilidade, então sua dimensão linear é no máximo 3. Observamos que os grafos RS_n são split, comparabilidade e possuem dimensão exatamente 3. Dividimos o capítulo em duas seções cujo conteúdo está descrito a seguir.

Na Seção 6.1, revisamos a definição de relação de ordem *livre de ciclos* — que é a relação de ordem parcial que define os grafos cordais comparabilidade —, a definição de dimensão de uma ordem parcial e algumas de suas propriedades fundamentais. Baseados nisto, apresentamos uma prova detalhada do resultado de Ma e Spinrad [30]. Para complementar o resultado de Ma e Spinrad, apresentamos grafos cordais comparabilidade de dimensões 1, 2, 3 e 4, sendo este último caso uma apresentação detalhada da construção, de Kierstead, Trotter e Qin [28], que apresenta o único exemplo conhecido de grafo cordal comparabilidade cuja dimensão é exatamente 4

Na Seção 6.2, motivados pelos resultados apresentados ao longo deste capítulo e curiosos por investigar a dimensão dos grafos RS_n , provamos que todo grafo split comparabilidade tem dimensão no máximo 3. Para isto, apresentamos uma prova detalhada da caracterização dos grafos split comparabilidade, de C. Ortiz e M. Villanueva [35].

6.1 Dimensão linear dos grafos cordais comparabilidade

Para toda relação de ordem parcial R sobre um conjunto finito, existe um conjunto L de *extensões lineares* de R tal que R é igual a interseção dos elementos de L . A cardinalidade do menor L com esta propriedade é chamada a *dimensão linear* de R . Este conceito de dimensão foi introduzido, em 1941, por Dushnik e Miller [9] e investigado mais detalhadamente no livro [44].

Como cada grafo de comparabilidade G está associado a uma relação de ordem parcial R e cada ordem parcial associada a G possui a mesma dimensão [45], naturalmente, utilizamos a dimensão de R para definirmos a dimensão de G . Neste âmbito, podemos considerar alguns problemas, como, por exemplo, o de determinarmos a dimensão dos grafos de comparabilidade ou, mais restritamente, determinarmos a dimensão de grafos de comparabilidade pertencentes a outras classes de grafos. Neste contexto, é que se insere os resultados apresentados nesta seção e na Seção 6.2.

Seguimos aqui a nomenclatura adotada em [30]. Iniciamos revisando a definição do tipo de relação de ordem parcial que está associada aos grafos cordais comparabilidade.

Definição 16. Uma relação de ordem parcial P é **livre de ciclos** se o grafo G_P — i.e., o grafo comparabilidade associado a P — é cordal.

Para abreviar, denominamos uma relação de ordem parcial livre de ciclos apenas por *relação livre de ciclos*.

Segue da definição que uma relação P é relação livre de ciclos se, e somente se, o grafo G_P é cordal comparabilidade.

Exemplo 14. Considere a relação de ordem parcial livre de ciclos P descrita abaixo,

$$P = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (c, b), (c, d), (e, d)\}$$

sobre $\{a, b, c, d, e\}$. A Figura 6.1 ilustra o grafo G_P e o digrafo D_P .

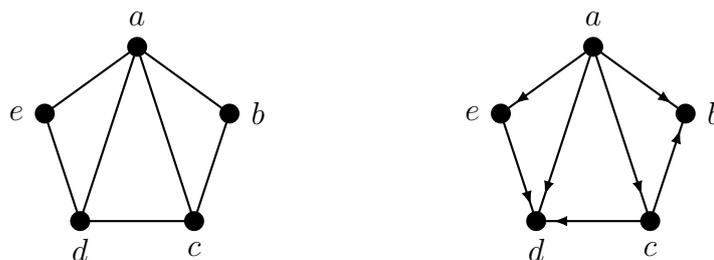


Figura 6.1: Grafo cordal comparabilidade G_P e seu digrafo D_P .

Definição 17. Sejam Q e R relações de ordens parciais sobre um conjunto finito V . Dizemos que R é **extensão** de Q se $Q \subseteq R$.

Se a extensão de uma ordem parcial é uma ordem total, a denominamos de extensão *total* ou, ainda, *linear*.

Definição 18. Seja R uma relação de ordem parcial e R_1, \dots, R_k extensões totais de R . Dizemos que $\{R_1, \dots, R_k\}$ é **gerador** de R , ou que $\{R_1, \dots, R_k\}$ **gera** R , se $R = \bigcap_{i=1}^k R_i$.

Outro termo utilizado para conjunto gerador é *conjunto realizador* ou, apenas, *realizador*.

Proposição 9. Se R é uma relação de ordem parcial sobre um conjunto finito V , então R possui um gerador.

PROVA. Seja R uma relação de ordem parcial sobre um conjunto finito V . Vamos considerar dois casos.

Suponhamos que R é total. Daí, $R = \bigcap_{i=1}^1 R_i$.

Suponhamos que R não é total. Tomemos $x, y \in V$ tais que $(x, y), (y, x) \notin R$. Vamos considerar R_1 e R_2 as duas extensões de R , definidas abaixo:

$$\begin{aligned} R_1 &= R \cup \{(x, y)\} \cup \{(a, y) : (a, x) \in R\} \cup \{(x, b) : (y, b) \in R\} \\ R_2 &= R \cup \{(y, x)\} \cup \{(y, a) : (x, a) \in R\} \cup \{(b, x) : (b, y) \in R\} \end{aligned}$$

Vamos considerar quatro casos.

Caso 1. Suponhamos que R_1 e R_2 são ordens totais. Daí, $R = \bigcap_{i=1}^2 R_i$.

Caso 2. Suponhamos que R_1 não é total e R_2 é total. Neste caso, repetimos o raciocínio anterior, tomamos $x_1, y_1 \in V$ tais que $(x_1, y_1), (y_1, x_1) \notin R_1$ e construímos R_3 e R_4 extensões de R_1 definidas abaixo:

$$\begin{aligned} R_3 &= R \cup \{(x_1, y_1)\} \cup \{(a, y_1) : (a, x_1) \in R_1\} \cup \{(x_1, b) : (y_1, b) \in R_1\} \\ R_4 &= R \cup \{(y_1, x_1)\} \cup \{(y_1, a) : (x_1, a) \in R_1\} \cup \{(b, x_1) : (b, y_1) \in R_1\} \end{aligned}$$

Se R_3 e R_4 são ordens totais, então $R = \bigcap_{i=2}^4 R_i$. Caso contrário, se R_i não é total, para algum $i \in \{3, 4\}$, basta repetir o processo para cada R_i .

Ao repetir este processo, vamos considerar dois casos. Suponhamos que as extensões obtidas de R_3 e R_4 são totais, daí o resultado segue. Suponhamos que as

extensões obtidas de R_i não são totais. Neste caso, realizamos todo o processo novamente para R_i

Como V é finito, este processo iterado deve terminar em alguma etapa. E, ao terminar, o resultado segue.

Caso 3. Suponhamos que R_1 é total e R_2 não é total. Este caso é análogo ao anterior.

Caso 4. Suponhamos que R_1 e R_2 não são totais. Neste caso, repetimos o raciocínio anterior, tomamos $x_1, y_1, x_2, y_2 \in V$ tais que $(x_1, y_1), (y_1, x_1) \notin R_1$ e $(x_2, y_2), (y_2, x_2) \notin R_2$ e construímos R_3, R_4 extensões de R_1 , R_5 e R_6 extensões de R_2 definidas abaixo:

$$\begin{aligned} R_3 &= R \cup \{(x_1, y_1)\} \cup \{(a, y_1) : (a, x_1) \in R_1\} \cup \{(x_1, b) : (y_1, b) \in R_1\} \\ R_4 &= R \cup \{(y_1, x_1)\} \cup \{(y_1, a) : (x_1, a) \in R_1\} \cup \{(b, x_1) : (b, y_1) \in R_1\} \\ R_5 &= R \cup \{(x_2, y_2)\} \cup \{(a, y_2) : (a, x_2) \in R_2\} \cup \{(x_2, b) : (y_2, b) \in R_2\} \\ R_6 &= R \cup \{(y_1, x_1)\} \cup \{(y_1, a) : (x_1, a) \in R_2\} \cup \{(b, x_1) : (b, y_1) \in R_2\} \end{aligned}$$

Se R_3, R_4, R_5 e R_6 são totais, então $R = \bigcap_3^6 R_i$. Caso contrário, se R_i não é total, para algum $i \in \{3, 4, 5, 6\}$, basta repetir o processo novamente para cada R_i que não é total.

Ao repetir este processo, vamos considerar dois subcasos.

4.1 Se as extensões de R_i são totais, para todo $i \in \{3, 4, 5, 6\}$. Daí o resultado segue.

4.2 Se existe uma extensão total obtida de R_i que não é total, para algum $i \in \{3, 4, 5, 6\}$, então, neste caso, realizamos todo o processo novamente.

Como V é finito, este processo iterado deve terminar em alguma etapa. E, ao terminar, o resultado segue.

Sendo assim, fica demonstrado que toda relação de ordem parcial é interseção de algumas de suas extensões totais. Isto é, toda relação de ordem parcial tem conjunto gerador. ■

A Proposição 9 garante que o conceito abaixo está bem definido.

Definição 19. Seja R uma relação de ordem parcial. A **dimensão** de R é o menor número natural k para o qual existe um conjunto gerador de R com k elementos. A dimensão de R é denotada por $\dim(R)$.

Definição 20. Seja G um grafo de comparabilidade. A **dimensão** de G é o menor número natural k para o qual existe uma relação R associada a G de modo que $\dim(R) = k$. A dimensão de G é denotada por $\dim(G)$.

Dado um grafo de comparabilidade G , podem existir ordens parciais distintas R_1, \dots, R_k tais que G é o grafo de comparabilidade de R_i , onde $i \in \{1, \dots, k\}$. Neste caso, seria natural definirmos $\dim(G) = \min\{\dim(R_i) : i \in [k]\}$. Porém, Trotter, J. I. Moore e D. P. Sumner [45] provaram que se P e Q são relações de ordem parciais tais que os grafos de comparabilidade G_P de P e G_Q de Q são iguais, então $\dim(P) = \dim(Q)$. Ou seja, a dimensão de um grafo de comparabilidade é um *invariante*, pois basta calcularmos a dimensão de apenas uma relação associada ao grafo, para sabermos a dimensão deste grafo.

Exemplo 15. A relação P do digrafo D_P da Figura 6.1 admite duas extensões totais P_1 e P_2 que são, respectivamente:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \{(a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (c, b), (d, b), (e, b), (c, d), (e, c), (e, d)\} \cup \\
 &\quad \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)\} \\
 P_2 &= \{(a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (c, b), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e), (e, d)\} \cup \\
 &\quad \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)\}
 \end{aligned}$$

Como $P = P_1 \cap P_2$, temos que $\dim(P) = 2$. Logo, o digrafo G_P da Figura 6.1 é tal que $\dim(G_P) = 2$.

Por outro lado, também podemos concluir que $\dim(G_P) = 2$ a partir do grafo de comparabilidade G_P .

Por exemplo, vamos considerar os digrafos D_{P_1} e D_{P_2} da Figura 6.2, que são construídos a partir de D_P da Figura 6.1 ao adicionar as arestas abaixo, de forma que os grafos G_{P_1} e G_{P_2} — associados a D_{P_1} e D_{P_2} , respectivamente — sejam completos.

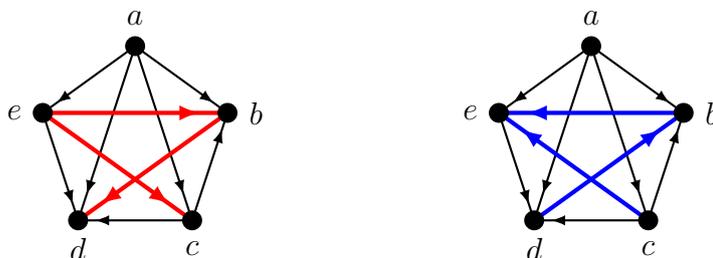


Figura 6.2: Digrafos D_{P_1} e D_{P_2} .

O digrafo D_P é tal que $V(D_P) = V(D_{P_1}) \cap V(D_{P_2})$ e $A(D_P) = A(D_{P_1}) \cap A(D_{P_2})$.

Nesta situação, diremos que o digrafo D_P é a interseção dos digrafos D_{P_1} com D_{P_2} e denotaremos por $D_P = D_{P_1} \cap D_{P_2}$.

Como os digrafos D_{P_1} e D_{P_2} estão associados a G_{P_1} e G_{P_2} completos e $D_P = D_{P_1} \cap D_{P_2}$, há um paralelo com $P = P_1 \cap P_2$. Logo, podemos dizer que $\dim(G_P) = 2$.

Existem classes de grafos que podem ser caracterizadas pelas dimensões dos seus elementos. Por exemplo, a classe **Permutação**, apresentada no Capítulo 3, é composta pelos grafos que têm dimensão menor ou igual a 2 (cf. [9]).

Para demonstrar que todo grafo cordal comparabilidade tem dimensão no máximo 4, vamos usar alguns conceitos e propriedades que serão definidos e demonstrados a seguir.

Definição 21. Um digrafo D é **acíclico** se não possui ciclo orientado como subdigrafo induzido.

Definição 22. Sejam D_1 e D_2 digrafos com o mesmo conjunto de vértices. Dizemos que D_2 é **fecho transitivo** de D_1 se D_1 é subdigrafo de D_2 e D_2 é transitivo.

Proposição 10. Se D_1 é um digrafo acíclico, então existe um digrafo D_2 tal que D_2 é fecho transitivo de D_1 .

PROVA. Seja D_1 um digrafo acíclico. Vamos provar o resultado por indução em n número de vértices de D_1 .

Base: Suponhamos que $n = 1$. Assim, $D_1 = K_1$. Desta forma, tomando $D_2 = K_1$, o resultado segue.

Hipótese: Suponhamos que se D_1 é um digrafo acíclico com n vértices, então existe um digrafo D_2 tal que D_2 é fecho transitivo de D_1 .

Passo: Seja D_1 um digrafo acíclico com $n+1$ vértices. Como D_1 é acíclico, D_1 possui ao menos uma fonte v . Vamos considerar o digrafo $D_1 - v$ que é acíclico e possui n vértices. Assim, pela hipótese de indução, existe um digrafo D_2 tal que D_2 é fecho transitivo de $D_1 - v$. O digrafo $D_3 = (V(D_2) \uplus \{v\}, A(D_2) \uplus \{(v, u) : u \in V(D_2)\})$ — obtido de D_2 pelo acréscimo do vértice v e dos arcos que apontam de v para todos os vértices de D_2 — é transitivo. De fato, sejam $u_1, u_2, u_3 \in V(D_3)$ tais que $(u_1, u_2), (u_2, u_3) \in A(D_3)$. Vamos considerar dois casos.

Caso 1. Suponhamos que $v \notin \{u_1, u_2, u_3\}$. Assim, pela hipótese de indução, temos $(u_1, u_3) \in A(D_2) \subset A(D_3)$.

Caso 2. Suponhamos que $v \in \{u_1, u_2, u_3\}$. Assim, pela construção de $A(D_3)$, como v é fonte e aponta para todos os vértices de D_2 , $v = u_1$ e, desta forma, $(v, u_2) = (u_1, u_2) \in A(D_3)$.

O digrafo D_1 é subdigrafo de D_3 , uma vez que $V(D_1) = V(D_2) \uplus \{v\} = V(D_3)$ e $A(D_1) = A(D_2) \uplus \{(v, u) : u \in N(v)\} \subseteq A(D_2) \uplus \{(v, u) : u \in V(D_2)\} = A(D_3)$. ■

Proposição 11. Se D_1 é um digrafo transitivo, então existe um digrafo D_2 tal que D_2 é extensão total de D_1 .

PROVA. Vamos provar o resultado por indução em n número de vértices de D_1 .

Base: Suponhamos que $n = 1$. Assim, $D_1 = K_1$. Desta forma, tomando $D_2 = K_1$, o resultado segue.

Hipótese: Suponhamos que se D_1 é um digrafo transitivo com n vértices, então existe um digrafo D_2 tal que D_2 extensão total de D_1 .

Passo: Seja D_1 um digrafo transitivo com $n + 1$ vértices. Como D_1 é transitivo, D_1 é acíclico e, portanto, possui uma fonte v . Vamos considerar o digrafo $D_1 - v$, que é transitivo e tem n vértices. Portanto, pela hipótese de indução, existe D_2 extensão total de $D_1 - v$. Tomemos $D_3 = (V(D_2) \uplus \{v\}, A(D_2) \uplus \{(v, u) : u \in V(D_2)\})$.

O digrafo D_3 é completo, uma vez que D_2 é completo e adicionamos v a D_2 tornando-o adjacente a todos os vértices $u \in V(D_2)$.

O digrafo D_3 é transitivo. De fato, tomemos $u_1, u_2, u_3 \in V(D_3)$ tais que $(u_1, u_2), (u_2, u_3) \in A(D_3)$. Vamos considerar dois casos.

Caso 1. Suponhamos que $v \notin \{u_1, u_2, u_3\}$. Assim, $u_1, u_2, u_3 \in V(D_2)$ e como D_2 é completo e transitivo, $(u_1, u_3) \in A(D_3)$.

Caso 2. Suponhamos que $v \in \{u_1, u_2, u_3\}$. Assim, como v é fonte de D_3 , temos $v = u_1$. Desta forma, pela construção de $A(D_3)$, temos $(v, u_3) = (u_1, u_3) \in A(D_3)$. ■

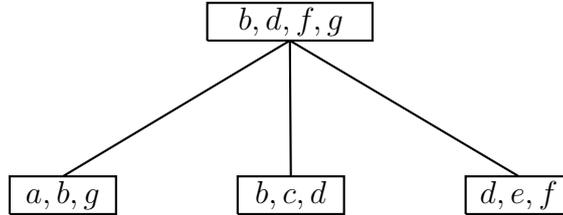
Neste capítulo, queremos demonstrar que todo grafo cordal comparabilidade tem dimensão no máximo igual a 4. Isto será feito utilizando o fato que um grafo G é cordal se, e somente se, possui uma árvore característica T_G . Sabemos que a árvore característica está associada a uma família $\mathcal{F} = \{T_v : v \in G\}$, onde $T_v = T_G[\mathcal{CM}_v]$, tal que G é isomorfo a $\Omega(\mathcal{F})$ (cf. Seção 2.1). Provaremos algumas propriedades das subárvores T_v .

A partir de agora, neste capítulo, vamos utilizar $G = G_P = (V(G), E(G))$ para denotar o grafo cordal comparabilidade associado a uma relação livre de ciclos P .

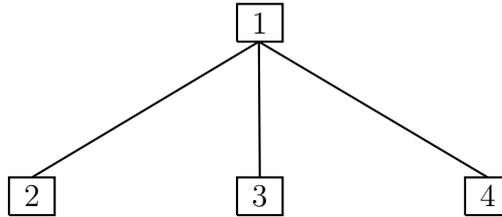
Consideramos T_G enraizada. Um algoritmo de busca em profundidade rotula $V(T_G)$ em *pré-ordem*, rotulando cada vértice visitado com números consecutivos a partir de 1, isto é, assinala 1 para a raiz de T_G e, percorre T_G , rotulando com números naturais consecutivos todos os vértices do ramo mais a esquerda antes de rotular os vértices do próximo ramo, mais a direita.

O rótulo assinalado pelo algoritmo para $v \in V(T_G)$, denominado *número de busca em profundidade de v* , será denotado por $\text{NBP}(v)$.

Exemplo 16. Tomemos G o grafo da Figura 4.2. Neste caso, considere a árvore característica de G é T_G ilustrada abaixo de maneira enraizada.



A busca em profundidade considerada anteriormente, vai rotular os vértices de T_G do seguinte modo:



O número da busca em profundidade do vértice $\{b, c, d\}$ de T_G é 3, denotado por $\text{NBP}(\{b, c, d\}) = 3$.

O menor NBP dos vértices de uma árvore característica T_G é denotado por $\min(T_G)$. O maior é denominado por $\max(T)$.

Proposição 12. [Ma & Spinrad, 1991] Sejam G um grafo cordal com árvore característica T_G e $T_u, T_v \in \mathcal{F}$ tal que $T_u \cap T_v = \emptyset$. Se $\min(T_u) < \min(T_v)$ então apenas uma das duas condições se verifica:

- (a) $\max(T_u) < \min(T_v)$
- (b) $\max(T_u) > \max(T_v)$ e nenhum $v \in V(T_u)$ tem NBP entre $\min(T_v)$ e $\max(T_v)$

PROVA. Sejam G grafo cordal com árvore característica T_G e $T_u, T_v \in \mathcal{F}$ tal que $T_u \cap T_v = \emptyset$.

Suponhamos que $\min(T_u) < \min(T_v)$, então pela busca em profundidade considerada, T_u começa a ser rotulada antes de T_v . Vamos considerar dois casos:

Caso 1. Suponhamos que a subárvore T_u é inteiramente rotulada antes de se iniciar a rotulação de T_v . Neste caso, obtemos que todos os rótulos de T_u são menores que os rótulos de T_v . Logo $\max(T_u) < \min(T_v)$.

Caso 2. Suponhamos que a subárvore T_u não é inteiramente rotulada antes de se iniciar a rotulação de T_v . Neste caso, sem perda de generalidade, T_u deve começar a ser rotulada antes de T_v , mas não é rotulada por completo. Ou seja, T_v começa a ser rotulada após o início da rotulação dos vértices de T_u mas antes do término de T_u . Como ambas subárvores são conexas, T_v tem que ser completamente rotulada antes de terminar T_u , isto é, T_v tem seus rótulos totalmente preenchidos no meio da assinalação de rótulos para T_u . Daí, $\max(T_u) > \max(T_v)$ e nenhum $v \in V(T_u)$ possui NBP entre $\min(T_v)$ e $\max(T_v)$.

Isto conclui a prova. ■

Agora, sejam Q' e R' as seguintes relações sobre $V(G)$, definidas com base na Proposição 12:

$$\begin{aligned} Q' &= \{(u, v) : uv \notin E(G), \min(T_u) < \min(T_v) \text{ e } \max(T_u) < \min(T_v)\}, \\ R' &= \{(u, v) : uv \notin E(G), \min(T_u) < \min(T_v) \text{ e } \max(T_u) > \max(T_v)\}. \end{aligned}$$

Estendendo a definição de Q' e R' a fim de obtermos a reflexividade, construímos Q e R definidas abaixo:

$$\begin{aligned} Q &= Q' \cup \{(x, x), (y, y) : (x, y) \in Q'\}, \\ R &= R' \cup \{(x, x), (y, y) : (x, y) \in R'\}. \end{aligned}$$

Pelo modo que Q e R foram construídos, para quaisquer $x, y \in V(G)$, temos que x e y estão relacionados segundo uma, e apenas uma, das relações P , Q ou R .

Proposição 13. [Ma & Spinrad, 1991] As relações Q e R são de ordem parcial.

PROVA. Segundo a definição de ordem parcial, precisamos demonstrar que Q e R são reflexivas, antissimétricas e transitivas.

Q e R são reflexivas. Pela construção de Q e R .

Q e R são antissimétricas. Sejam $u, v \in V(G)$. Vamos considerar dois casos.

Caso 1. Suponhamos que $(u, v) \in Q$. Assim, $\min(T_u) < \max(T_u) < \min(T_v) < \max(T_v)$. Deste modo, $(v, u) \notin Q$, o que implica em Q antissimétrica, por vacuidade.

Caso 2. Suponhamos que $(u, v) \in R$. Assim, $\max(T_u) > \max(T_v)$. Deste modo, $(v, u) \notin R$, o que implica em R antissimétrica, por vacuidade.

Q e R são transitivas. Sejam u, v e w vértices do grafo G . Vamos considerar dois casos.

Caso 1. Suponhamos que $(u, v) \in Q$ e $(v, w) \in Q$. Assim, $\min(T_u) < \min(T_v)$ e $\min(T_v) < \min(T_w)$. Portanto $\min(T_u) < \min(T_w)$ e $\max(T_u) < \min(T_v)$ e $\max(T_v) < \min(T_w)$. Desta forma, $\max(T_u) < \min(T_v) \leq \max(T_v) < \min(T_w)$. Daí $(u, w) \in Q$.

Caso 2. Suponhamos que $(u, v) \in R$ e $(v, w) \in R$. Assim, $\min(T_u) < \min(T_v) < \min(T_w)$ e $\max(T_u) > \max(T_v) > \max(T_w)$. Como nenhum vértice de T_u tem NBP entre $\min(T_v)$ e $\max(T_v)$, pela Proposição 12, os vértices de T_v foram totalmente rotulados entre o preenchimento de rótulos para os vértices de T_u . Analogamente, T_w foi totalmente rotulada entre o preenchimento com rótulos para os vértices de T_v . Deste modo, T_w foi completamente preenchida com rótulos entre a rotulação dos vértices de T_v . Portanto, $(u, w) \in R$.

Isto conclui a prova. ■

Proposição 14. [Ma & Spinrad, 1991] O digrafo $D_{P \cup Q}$ é acíclico.

PROVA. Suponhamos, para uma contradição, que existe C_k ciclo orientado induzido no digrafo $D_{P \cup Q}$, com $k \geq 4$ menor possível. Sabemos que o comprimento do ciclo é par. Assim, existem u_1, u_2, u_3 e u_4 vértices de C_k tais que $(u_1, u_2), (u_3, u_4) \in P$ e $(u_2, u_3) \in Q$. Se $k = 4$, então $(u_4, u_1) \in Q$. Se $k > 4$, então $u_1 u_4 \notin E(D_{P \cup Q})$ e existem $u_5, u_{k-1} \in V(D_{P \cup Q})$ tais que $(u_{k-1}, u_1), (u_4, u_5) \in Q$.

Temos que $(u_2, u_4), (u_4, u_2) \notin P \cup Q$. Vamos considerar quatro casos.

Caso 1. Suponhamos que $(u_2, u_4) \in P$. Neste caso, pela transitividade de P , obtemos $(u_1, u_4) \in P$, uma contradição com $(u_4, u_1) \in Q$ (se $k = 4$) ou com a minimalidade de k (se $k > 4$).

Caso 2. Suponhamos que $(u_4, u_2) \in P$. Neste caso, pela transitividade de P , obtemos $(u_3, u_2) \in P$, uma contradição com $(u_2, u_3) \in Q$.

Caso 3. Suponhamos que $(u_2, u_4) \in Q$. Vamos considerar mais dois subcasos. Suponhamos que $k = 4$. Desta forma, pela transitividade de Q , $(u_2, u_1) \in Q$, uma contradição com $(u_1, u_2) \in P$. Suponhamos que $k > 4$. Desta forma, pela transitividade de Q , $(u_2, u_5) \in Q$, uma contradição com a minimalidade de k .

Caso 4. Suponhamos que $(u_4, u_2) \in Q$. Neste caso, pela transitividade de Q , obtemos $(u_4, u_3) \in Q$, uma contradição.

Analogamente, podemos afirmar que $(u_1, u_3), (u_3, u_1) \notin P \cup Q$.

Desta forma, ou $(u_2, u_4) \in R$ ou $(u_4, u_2) \in R$. Daí, vamos considerar dois casos.

Caso 1. Suponhamos que $(u_2, u_4) \in R$.

Pela definição de R , $\min(T_{u_2}) < \min(T_{u_4})$, nenhum vértice de T_{u_2} tem NBP entre $[\min(T_{u_4}), \max(T_{u_4})]$ e $\max(T_{u_2}) > \max(T_{u_4})$.

Por outro lado, como $(u_2, u_3) \in Q$, $\max(T_{u_2}) < \min(T_{u_3})$. Logo, $\min(T_{u_4}) \leq \max(T_{u_4}) < \min(T_{u_3})$, isto é, $(u_4, u_3) \in Q$, uma contradição.

Caso 2. Suponhamos que $(u_4, u_2) \in R$.

Neste caso, $T_{u_1} \cap T_{u_4} = \emptyset$. De fato, analisaremos dois subcasos simples.

Suponhamos que $k = 4$. Neste subcaso, $(u_4, u_1) \in Q$. Logo $u_1 u_4 \notin E(G)$.

Suponhamos que $k > 4$. Neste subcaso, suponhamos, para uma contradição, que $u_1 u_4 \in E(G)$. Desta forma, $(u_1, u_4) \in P$ ou $(u_4, u_1) \in P$. Se $(u_1, u_4) \in P$, então há uma contradição com a minimalidade de k . Se $(u_4, u_1) \in P$, então, pela transitividade de P , $(u_4, u_2) \in P$, uma contradição.

Desta forma, como $T_{u_1} \cap T_{u_2} \neq \emptyset$ e $T_{u_1} \cap T_{u_4} = \emptyset$, obtemos que $(u_4, u_1) \in R$. Estudaremos dois subcasos com mais detalhes.

2.1 Suponhamos que $\min(T_{u_1}) \leq \min(T_{u_2})$. Neste subcaso, como $T_{u_1} \cap T_{u_2} \neq \emptyset$, temos $\max(T_{u_1}) \leq \max(T_{u_2})$. Logo, como $(u_2, u_3) \in Q$, $\max(T_{u_2}) < \min(T_{u_3})$. Assim, podemos concluir que $\max(T_{u_1}) < \min(T_{u_3})$ com $\min(T_{u_1}) < \min(T_{u_3})$. Daí, $(u_1, u_3) \in Q$, uma contradição.

2.2 Suponhamos que $\min(T_{u_2}) < \min(T_{u_1})$. Como $T_{u_3} \cap T_{u_4} \neq \emptyset$, temos $\min(T_{u_3}) \leq \max(T_{u_4}) \leq \max(T_{u_3})$. Por outro lado, $(u_4, u_1) \in R$, isto é, $\max(T_{u_1}) < \max(T_{u_4})$. Desta forma, vamos considerar dois subcasos. Suponhamos que $\max(T_{u_3}) \leq \max(T_{u_1}) < \max(T_{u_4})$. Assim, $T_{u_1} \cap T_{u_3} \neq \emptyset$, uma contradição. Suponhamos que $\max(T_{u_1}) < \min(T_{u_3}) \leq \min(T_{u_4})$. Assim, $(u_1, u_3) \in Q$, uma contradição.

Isto conclui a prova. ■

Proposição 15. [Ma & Spinrad, 1991] O digrafo $D_{P \cup R}$ é acíclico.

PROVA. Suponhamos, para uma contradição, que existe C_k ciclo orientado induzido no digrafo $D_{P \cup R}$, com $k \geq 4$ menor possível. Pelo mesmo raciocínio empregado na demonstração da Proposição 14, existem u_1, u_2, u_3 e u_4 vértices de C_k tais que $(u_1, u_2), (u_3, u_4) \in P$ e $(u_2, u_3) \in R$. Ainda, pela demonstração da Proposição 14, $(u_1, u_3), (u_3, u_1), (u_2, u_4), (u_4, u_2) \notin P \cup R$. Desta forma, ou $(u_2, u_4) \in Q$ ou $(u_4, u_2) \in Q$. Vamos considerar dois casos.

Caso 1. Suponhamos que $(u_2, u_4) \in Q$. Neste caso, obtemos:

$$\min(T_{u_2}) < \min(T_{u_3}) \leq \max(T_{u_3}) < \max(T_{u_2}) < \min(T_{u_4}),$$

ou seja, $\min(T_{u_3}) < \min(T_{u_4})$ e $\max(T_{u_3}) < \min(T_{u_4})$. Pela definição de Q , $(u_3, u_4) \in Q$, uma contradição com $(u_3, u_4) \in P$.

Caso 2. Suponhamos que $(u_4, u_2) \in Q$. Neste caso, temos $\max(T_{u_4}) < \min(T_{u_2})$. Como $(u_2, u_3) \in R$, obtemos $\min(T_{u_2}) < \min(T_{u_3})$. Daí, $\min(T_{u_4}) \leq \max(T_{u_4}) < \min(T_{u_3})$, isto é, $(u_4, u_3) \in Q$. Uma contradição com $(u_3, u_4) \in P$.

Isto conclui a prova. ■

Proposição 16. [Ma & Spinrad, 1991] O digrafo $D_{P \cup Q^{-1}}$ é acíclico.

PROVA. Suponhamos, para uma contradição, que existe C_k ciclo orientado induzido no digrafo $D_{P \cup Q^{-1}}$, com k menor possível. Pelo mesmo raciocínio exibido na demonstração da Proposição 14, existem u_1, u_2, u_3 e u_4 vértices de C_k tais que $(u_1, u_2), (u_3, u_4) \in P$ e $(u_2, u_3) \in Q^{-1}$. Temos que $(u_2, u_4), (u_4, u_2) \notin P \cup Q$. Com efeito, analisaremos quatro casos.

Caso 1. Suponhamos que $(u_2, u_4) \in P$. Neste caso, pela transitividade de P , obtemos $(u_1, u_4) \in P$, uma contradição com $(u_4, u_1) \in P$ (se $k = 4$) ou com a minimalidade de k (se $k > 4$).

Caso 2. Suponhamos que $(u_4, u_2) \in P$. Neste caso, pela transitividade de P , obtemos $(u_3, u_2) \in P$, uma contradição com $(u_2, u_3) \in Q$.

Caso 3. Suponhamos que $(u_2, u_4) \in Q$. Neste caso, $(u_4, u_2) \in Q^{-1}$ e, pela transitividade de Q^{-1} , obtemos $(u_4, u_3) \in Q^{-1}$. Uma contradição com $(u_3, u_4) \in P$.

Caso 4. Suponhamos que $(u_4, u_2) \in Q$. Neste caso $(u_2, u_4) \in Q^{-1}$. Vamos considerar dois subcasos. Suponhamos que $k = 4$. Desta forma, $(u_4, u_1) \in Q^{-1}$ e, pela transitividade de Q^{-1} , obtemos $(u_2, u_1) \in Q^{-1}$. Uma contradição com $(u_1, u_2) \in P$. Suponhamos que $k > 4$. Desta forma, $(u_2, u_5) \in Q^{-1}$, uma contradição com a minimalidade de k .

Analogamente ao estudo de casos feito acima para os vértices u_2 e u_4 , podemos afirmar que $(u_1, u_3), (u_3, u_1) \notin P \cup Q$.

Desta forma, ou $(u_2, u_4) \in R$ ou $(u_4, u_2) \in R$. Analisaremos mais dois casos sobre R .

Caso 1. Suponhamos que $(u_2, u_4) \in R$. Neste caso, $\min(T_{u_2}) < \min(T_{u_4})$. Pela hipótese, temos $(u_3, u_2) \in Q$, isto é, $\min(T_{u_3}) \leq \max(T_{u_3}) < \min(T_{u_2})$. De onde podemos concluir que:

$$\min(T_{u_3}) \leq \max(T_{u_3}) < \min(T_{u_4}),$$

isto é, $(u_3, u_4) \in Q$. Uma contradição com $(u_3, u_4) \in P$.

Caso 2. Suponhamos que $(u_4, u_2) \in R$. Neste caso, $T_{u_1} \cap T_{u_4} = \emptyset$. De fato, precisamos considerar dois casos. Suponhamos que $k = 4$. Neste subcaso, $(u_4, u_1) \in Q^{-1}$,

isto é, $(u_1, u_4) \in Q$. Logo $u_1 u_4 \notin E(G)$. Suponhamos que $k > 4$. Neste subcaso, suponhamos, para uma contradição, que $u_1 u_4 \in E(G)$. Desta forma, $(u_1, u_4) \in P$ ou $(u_4, u_1) \in P$. Se $(u_1, u_4) \in P$, então há uma contradição com a minimalidade de k . Se $(u_4, u_1) \in P$, então, pela transitividade de P , $(u_4, u_2) \in P$, uma contradição.

Desta forma, como $T_{u_1} \cap T_{u_2} \neq \emptyset$ e $T_{u_1} \cap T_{u_4} = \emptyset$, obtemos que $(u_4, u_1) \in R$. Vamos considerar dois subcasos.

2.1 Suponhamos que $\min(T_{u_1}) \leq \min(T_{u_2})$. Como $T_{u_3} \cap T_{u_4} \neq \emptyset$, temos $\min(T_{u_3}) \leq \min(T_{u_4}) \leq \max(T_{u_3})$. Por outro lado, $(u_4, u_1) \in R$, isto é, $\min(T_{u_4}) < \min(T_{u_1})$. Desta forma, analisaremos dois subcasos simples. Suponhamos que $\min(T_{u_4}) \leq \max(T_{u_3}) < \min(T_{u_1})$. Assim, $(u_3, u_1) \in Q$, uma contradição. Por outro lado, suponhamos que $\min(T_{u_4}) < \min(T_{u_1}) \leq \max(T_{u_3})$. Assim, $T_{u_1} \cap T_{u_3} \neq \emptyset$, uma contradição.

2.2 Suponhamos que $\min(T_{u_1}) > \min(T_{u_2})$. Neste subcaso, como $(u_3, u_2) \in Q$, obtemos que $\min(T_{u_3}) \leq \max(T_{u_3}) < \min(T_{u_2}) < \min(T_{u_1})$. Isto é, $(u_3, u_1) \in Q$, uma contradição.

Isto conclui a prova. ■

Proposição 17. [Ma & Spinrad, 1991] O digrafo $D_{P \cup R^{-1}}$ é acíclico.

PROVA. Suponhamos, para uma contradição, que existe um ciclo orientado induzido C_k no digrafo $D_{P \cup R^{-1}}$, com k menor possível.

Pelo mesmo raciocínio empregado na demonstração da Proposição 14, existem u_1, u_2, u_3 e u_4 vértices de C_k tais que $(u_1, u_2), (u_3, u_4) \in P$ e $(u_2, u_3) \in R^{-1}$. E, pela demonstração da Proposição 16, $(u_1, u_3), (u_3, u_1), (u_2, u_4), (u_4, u_2) \notin P \cup R$. Agora, como $(u_3, u_2) \in R$, $T_{u_1} \cap T_{u_2} \neq \emptyset$ e $T_{u_1} \cap T_{u_3} = \emptyset$, temos que $(u_3, u_1) \in R$, uma contradição. ■

Pela Proposição 10, os digrafos acíclicos $D_{P \cup Q}, D_{P \cup R}, D_{P \cup Q^{-1}}$ e $D_{P \cup R^{-1}}$ têm fechos transitivos $D'_{P \cup Q}, D'_{P \cup R}, D'_{P \cup Q^{-1}}$ e $D'_{P \cup R^{-1}}$ respectivamente. Já pela Proposição 11, estes fechos possuem extensões totais D_1, D_2, D_3 e D_4 respectivamente.

Teorema 14. [Ma & Spinrad, 1991] Se um grafo G é cordal comparabilidade, então $\dim(G) \leq 4$.

PROVA. Seja um grafo $G = G_P$ cordal comparabilidade associado à ordem livre de ciclos P e ao digrafo D_P . Pelas Proposições 14, 15, 16, e 17 temos que D admite quatro extensões totais D_1, D_2, D_3 e D_4 citadas acima. Vamos mostrar que

$$D_P = \bigcap_{i=1}^4 D_i.$$

Temos $D_P \subseteq \bigcap_1^4 D_i$. De fato, seja $(x, y) \in A(D_P)$. Desta forma, como $D_P \subseteq D_{P \cup Q}, D_P \subseteq D_{P \cup R}, D_P \subseteq D_{P \cup Q^{-1}}$ e $D_P \subseteq D_{P \cup R^{-1}}$, temos que $(x, y) \in \bigcap_1^4 D_i$.

Reciprocamente, $\bigcap_1^4 D_i \subseteq D_P$. De fato, seja $(x, y) \in \bigcap_1^4 D_i$. Suponhamos, para uma contradição, que $(x, y) \notin D_P$. Vamos considerar quatro casos.

Caso 1. Suponhamos que $(x, y) \in Q$. Assim, $(x, y) \notin Q^{-1}$. Desta forma, $(x, y) \notin P \cup Q^{-1}$, uma contradição com $(x, y) \in \bigcap_1^4 D_i$.

Caso 2. Suponhamos que $(y, x) \in Q$. Assim, $(x, y) \notin Q$. Desta forma, $(x, y) \notin P \cup Q$, uma contradição.

Caso 3. Suponhamos que $(x, y) \in R$. Assim, $(x, y) \notin R^{-1}$. Desta forma, $(x, y) \notin P \cup R^{-1}$, uma contradição com $(x, y) \in \bigcap_1^4 D_i$.

Caso 4. Suponhamos que $(y, x) \in R$. Assim, $(x, y) \notin R$. Desta forma, $(x, y) \notin P \cup R$, uma contradição.

Com isso, $\{D_1, D_2, D_3, D_4\}$ é conjunto gerador de P , o que demonstra o resultado. ■

Observamos que a recíproca do Teorema 14 não é verdadeira. De fato, o grafo C_4 é tal que $\dim(C_4) = 2 \leq 4$ e C_4 não é cordal comparabilidade.

A seguir, exibimos grafos cordais comparabilidade de dimensões 1, 2 e 3.

Exemplo 17. Todo grafo completo K_n é grafo cordal comparabilidade com $\dim(K_n) = 1$.

Exemplo 18. A relação livre de ciclos P descrita abaixo

$$P = \{(b, a), (c, a), (b, c), (b, d), (c, d), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$$

corresponde ao grafo cordal comparabilidade e ao digrafo ilustrados na Figura 6.3.

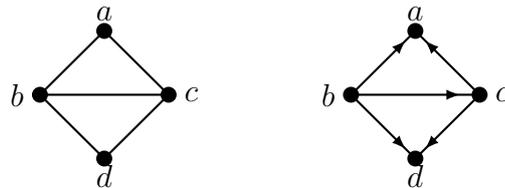


Figura 6.3: Um grafo G_P cordal comparabilidade com seu digrafo D_P .

O digrafo da Figura 6.3 admite as seguintes extensões totais:

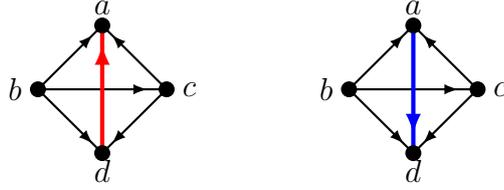


Figura 6.4: As extensões totais D_{P_1} e D_{P_2} de D_P .

A Figura 6.4 ilustra duas extensões totais P_1 e P_2 de P :

$$P_1 = \{(b, a), (c, a), (b, c), (b, d), (c, d), (d, a)\} \cup \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$$

$$P_2 = \{(b, a), (c, a), (b, c), (b, d), (c, d), (a, d)\} \cup \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$$

Temos que $P = P_1 \cap P_2$. Assim, $\{P_1, P_2\}$ é conjunto gerador de P . Logo, o grafo G_P da Figura 6.3 é cordal comparabilidade e $\dim(G_P) = 2$.

No que segue, vamos utilizar também outra notação para representar extensões totais. Por exemplo, as extensões P_1 e P_2 acima podem ser denotadas através da relações \leq_{P_1} e \leq_{P_2} como se segue:

$$P_1 : b \leq_{P_1} c \leq_{P_1} d \leq_{P_1} a$$

$$P_2 : b \leq_{P_2} c \leq_{P_2} a \leq_{P_2} d$$

Além disso, para facilitar a redação, quando não houver ambiguidade, vamos, também, denotar P_1 e P_2 por \leq , sem os índices P_1 e P_2 , como segue:

$$P_1 : b \leq c \leq d \leq a$$

$$P_2 : b \leq c \leq a \leq d$$

O que distingue P_1 de P_2 é que, em P_1 , temos $d < a$, i.e., $(d, a) \in P_1$; já em P_2 , temos $a < d$, i.e., $(a, d) \in P_2$. Ou seja, $P_1 \cap P_2$ não possui (a, d) e nem (d, a) .

Assim, sempre que denotamos duas extensões totais P e R , ambigualmente por \leq , quando dois vértices quaisquer x, y estão em uma determinada ordem em P , i.e., $x \leq y$, e trocam de ordem em R , i.e., $y \leq x$, podemos concluir que $(x, y), (y, x) \notin P \cap R$. Ou seja, x e y não estão relacionados segundo $P \cap R$.

Exemplo 19. O grafo *rising-sun* G , ilustrado na Figura 4.2, é cordal comparabilidade e $\dim(G) = 3$.

De fato, de acordo com a notação introduzida acima, o grafo *rising-sun* G da

Figura 4.2 admite três extensões totais ilustradas por:

$$d \leq c \leq f \leq e \leq a \leq g \leq b$$

$$a \leq d \leq f \leq g \leq c \leq b \leq e$$

$$d \leq f \leq e \leq c \leq a \leq g \leq b$$

Estas três ordens formam um conjunto gerador de tamanho 3 para a relação de ordem associada ao *rising-sun* G .

Por outro lado, para garantir que não há conjunto gerador de tamanho menor que 3 para a relação de ordem associada ao grafo *rising-sun*, seguimos o seguinte raciocínio: o *co-rising-sun*, grafo complemento do grafo *rising-sun*, não é grafo comparabilidade (cf. Capítulo 3, Seção 2.2, Figura 3.4). Portanto, o *rising-sun* não é grafo cocomparabilidade. Daí, como os grafos de permutação são os grafos comparabilidade cocomparabilidade [38], concluímos que o *rising-sun* não é grafo de permutação. Como um grafo é de permutação se, e somente se, possui dimensão no máximo 2 (cf. [9]), concluímos que o *rising-sun* tem dimensão exatamente 3.

Outros exemplos de grafos cordais comparabilidade com dimensão exatamente 3 são os RS_n construídos na Seção 5.

Exemplo 20. As três extensões lineares abaixo demonstram que o grafo RS_4 da Figura 5.5 tem dimensão no máximo 3.

$$a_1 \leq v_4 \leq a_2 \leq v_5 \leq a_3 \leq v_6 \leq v_1 \leq v_2 \leq v_3 \leq a_4$$

$$a_1 \leq v_4 \leq v_5 \leq v_6 \leq v_1 \leq a_2 \leq v_2 \leq a_3 \leq v_3 \leq a_4$$

$$v_4 \leq v_5 \leq v_6 \leq a_4 \leq a_3 \leq a_2 \leq a_1 \leq v_1 \leq v_2 \leq v_3$$

Por outro lado, como o grafo RS_4 tem árvore característica única isomorfa a $K_{1,4}$, temos que RS_4 não é de intervalo [16]. Ou seja, RS_4 não é cocomparabilidade. Assim, RS_4 não é de permutação. Logo, $\dim(RS_4) = 3$.

Exemplo 21. Generalizando as extensões lineares empregadas no Exemplo 20, temos que $\dim(RS_n) = 3$, para todo $n \geq 3$, e, para RS_1 obtemos $\dim(RS_1) = 1$ e para RS_2 obtemos $\dim(RS_2) = 2$.

De fato, para $n \geq 3$, consideremos as extensões lineares abaixo, utilizando a

rotulação dos vértices dada na Figura 5.9.

$$\begin{aligned}
& a_1 \leq v_n \leq a_2 \leq v_{n+1} \leq a_3 \leq \cdots \leq a_{n-1} \leq v_{2n-2} \leq v_1 \leq v_2 \leq v_3 \leq \cdots \leq v_{n-1} \leq a_n \\
& a_1 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \cdots \leq v_{2n-2} \leq v_1 \leq a_2 \leq v_2 \leq a_3 \leq v_3 \leq \cdots \leq a_{n-1} \leq v_{n-1} \leq a_n \\
& v_n \leq v_{n+1} \leq \cdots \leq v_{2n-2} \leq a_n \leq a_{n-1} \leq a_3 \leq a_2 \leq a_1 \leq v_1 \leq v_2 \leq v_3 \leq \cdots \leq v_{n-1}
\end{aligned}$$

Por outro lado, como o grafo RS_n tem árvore característica única isomorfa a $K_{1,n}$, temos que RS_n não é de intervalo [16], para todo $n \geq 3$. Ou seja, RS_n não é cocomparabilidade. Assim, RS_n não é de permutação. Logo, $\dim(RS_n) = 3$.

Como os grafos RS_n são split, generalizamos as ordens totais obtidas no Exemplo 21, para mostrar que se G é um grafo split comparabilidade (i.e, cordais comparabilidade que são cocordais), então $\dim(G) \leq 3$ (cf. Seção 6.2).

Vamos, agora, revisar a construção, apresentada em [28], de um grafo cordal comparabilidade G tal que $\dim(G) = 4$. A ideia principal é definir uma relação livre de ciclos cuja dimensão é 4. Naturalmente, esta relação está associada a um grafo cordal comparabilidade, cuja dimensão também é 4. A construção desta relação (e grafo) se deve a Kierstead, Trotter e Qin [28]. Estes autores sabiam que toda relação livre de ciclos tinha dimensão no máximo 4, resultado demonstrado por Ma e Spinrad [30]. Desta forma, provaram, de fato, que 4 é um limiar justo para a dimensão de relações livres de ciclo (e grafos cordais comparabilidade).

A relação livre de ciclos construída por Kierstead, Trotter e Qin é denominada R_{LC} e é construída sobre um conjunto finito denominado LC . Vamos exibir a construção de R_{LC} por partes.

Em primeiro lugar, tomemos $n = 27^{27} + 1$ e $i \in \{1, \dots, n\}$. Consideremos

$$\{e_0^i, e_1^i, d_1^i, \dots, e_{13}^i, d_{13}^i\} \subset LC$$

e a seguinte relação sobre esse subconjunto:

$$Q_i = \{(e_0^i, d_1^i), \dots, (e_0^i, d_{13}^i)\} \cup \{(e_1^i, d_1^i), \dots, (e_{13}^i, d_{13}^i)\} \subset R_{LC}.$$

A Figura 6.5 ilustra Q_i através de um digrafo. A relação R_{LC} contém todas as relações Q_i , para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

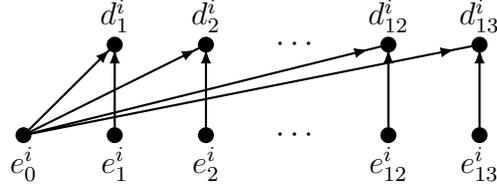


Figura 6.5: digrafo associado à relação Q_i

Os outros elementos de LC são dados por:

$$\{b_1^1, \dots, b_1^n, \dots, b_{13}^1, \dots, b_{13}^n, b_0^n, \dots, b_0^1\} \cup \{t_0^1, \dots, t_0^n, t_1^1, \dots, t_1^n, \dots, t_{13}^1, \dots, t_{13}^n\}.$$

Os b_i 's e t_i 's formam uma cadeia em R_{LC} , denominada C^* , de acordo com a ordem abaixo:

$$\begin{aligned} b_1^1 \leq \dots \leq b_1^n \leq \dots \leq b_{13}^1 \leq \dots \leq b_{13}^n \leq b_0^n \leq \dots \leq b_0^1 \leq \\ t_0^1 \leq \dots \leq t_0^n \leq t_1^1 \leq \dots \leq t_1^n \leq \dots \leq t_{13}^1 \leq \dots \leq t_{13}^n \end{aligned}$$

Agora, já temos todos os elementos de LC . Falta, apenas, completar a relação R_{LC} . Os elementos das relações Q_i se relacionam com os elementos da cadeia C^* do seguinte modo:

$$b_j^i \leq e_j^i \leq d_j^i \leq t_j^i, \text{ para todos } i \leq n \text{ e } 1 \leq j \leq 13.$$

Os elementos e_j^i e d_j^i são incomparáveis com todos os elementos de C^* entre b_j^i e t_j^i . Já os elementos de Q_i e de C^* da forma e_0^i , t_0^i e b_0^i se relacionam da seguinte maneira:

$$b_0^i \leq e_0^i \leq t_0^i, \text{ para cada } i \leq n.$$

O elemento $e_0^i \in LC$ é incomparável com todos os elementos entre b_0^i e t_0^i na cadeia C^* .

Para garantir que R_{LC} é relação de ordem parcial, incluímos em R_{LC} os elementos (x, x) tais que $x \in LC$. Também, incluímos os elementos garantidos por transitividade, mas que não foram explicitamente denotados até aqui. Por exemplo, $(b_j^i, e_{13}^1) \in R_{LC}$ com $j \in [12]$ e $1 \leq i \leq n$.

Portanto, a Figura 6.6 ilustra, parcialmente, o grafo $G_{R_{LC}}$ associado à relação livre de ciclos R_{LC} . Várias arestas garantidas por transitividade estão omitidas, com o objetivo de se obter uma figura mais limpa e, conseqüentemente, um texto mais didático possível. Por exemplo, os vértices b_{12}^3 e e_{13}^1 estão relacionados segundo R_{LC} e, portanto, $b_{12}^3 e_{13}^1 \in E(G_{R_{LC}})$.

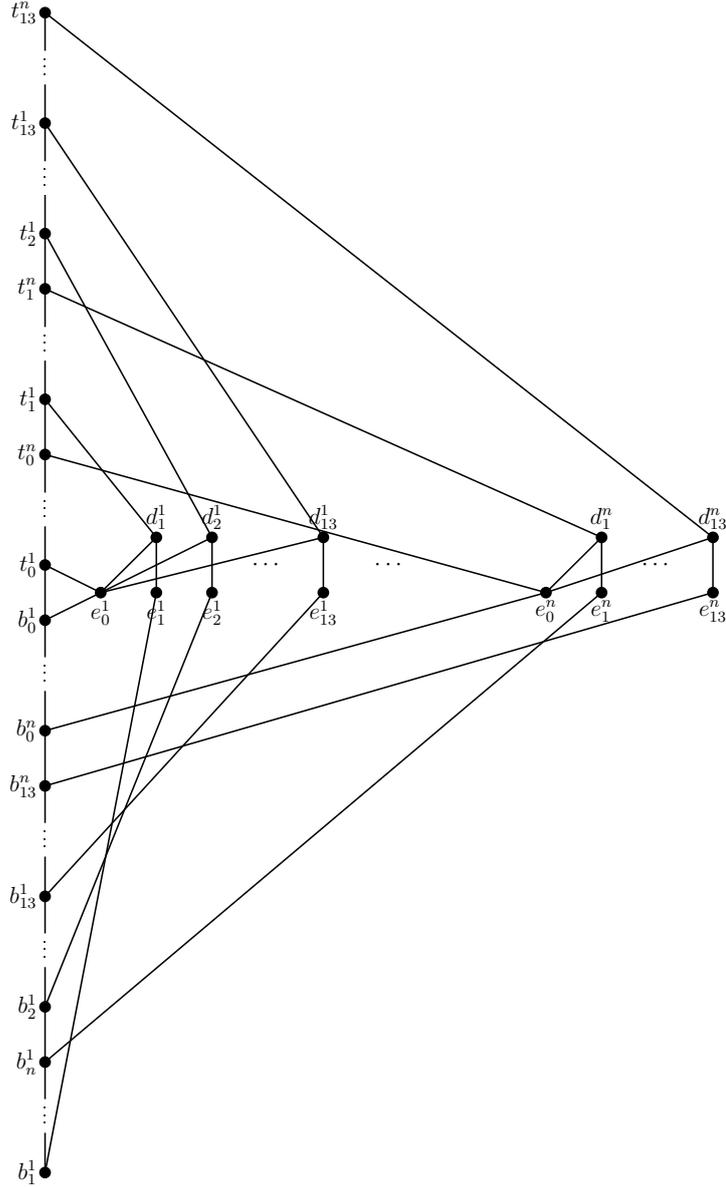


Figura 6.6: Ilustração parcial da relação R_{LC}

Agora, vamos revisar alguns conceitos e propriedades utilizados para demonstrar que R_{LC} é livre de ciclos.

Definição 23. Seja $x \in LC$. O **conjunto superior** de x em LC , denotado por $S(x)$, é $\{y \in LC : y \geq x \text{ e } y \neq x\}$.

Definição 24. Seja $x \in LC$. O **conjunto inferior** de x em LC , denotado por $I(x)$, é $\{y \in LC : y \leq x \text{ e } y \neq x\}$.

Exemplo 22. Para quaisquer d_j^i e e_j^i , $1 \leq i \leq n$ e $j \in [13]$, temos que $S(d_j^i)$ e $S(e_j^i)$ induzem uma ordem total em R_{LC} .

De fato, pela construção de R_{LC} , todo elemento $x \in S(d_j^i)$ é da forma t_j^k com $i \leq k \leq n$. E como estes vértices são de C^* , conclui-se que $S(d_j^i)$ induz ordem total

em R_{LC} . Por outro lado, a transitividade de R_{LC} implica em $S(e_j^i) = S(d_j^i) \cup \{d_j^i\}$, de onde concluímos que $S(e_j^i)$ induz ordem total em R_{LC} .

Teorema 15. [Kierstead, Trotter & Qin, 1992] A relação R_{LC} é livre de ciclos.

PROVA. Suponhamos, para uma contradição, que $G_{R_{LC}}$ tenha ciclo induzido C_{2k} nos vértices $\{x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k\}$ e arestas $\{x_1y_1, y_1x_2, x_2y_3, \dots, y_{k-1}x_k, x_ky_k, y_kx_1\}$, com k menor possível. Como R_{LC} é transitiva, por construção, existe orientação transitiva de C_{2k} com x_i 's fontes e y_i 's sumidouros, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$.

Se, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, o vértice x_i do ciclo está em C^* , então $x_ix_j \in E(G_{R_{LC}})$, uma contradição. Por outro lado, se existe x_i que não está em C^* , então consideramos dois casos.

Caso 1. Suponhamos que $x_i \in \{e_j^i, d_j^i\}$, para algum $j \neq 0$. Daí, o Exemplo 22 garante que os vértices $y_{i-1}, y_i \in N(x_i) \cap \{x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k\}$ do ciclo são adjacentes, pois $S(x_i)$ induz ordem total em R_{LC} . Desta forma, obtemos uma contradição com a minimalidade do ciclo.

Caso 2. Suponhamos que $x_i = e_0^j$ para algum $j \in \{1, \dots, n\}$. Vamos considerar dois subcasos nos vizinhos de x_i que estão no ciclo, denominados por y_{i-1} e y_i .

2.1 Suponhamos que y_{i-1}, y_i são vértices de C^* . Desta forma, $y_{i-1}y_i \in E(G_{R_{LC}})$, uma contradição com a minimalidade do ciclo.

2.2 Suponhamos que y_{i-1} ou y_i não é vértice de C^* . Sem perda de generalidade, suponhamos que y_i é o vértice que não está em C^* . Como os vizinhos de $x_i = e_0^j$ que não estão na cadeia são os vértices d_q^j , para algum $q \in [13]$ e $j \in \{1, \dots, n\}$, temos $y_i = d_q^j$.

Denotamos o vizinho de y_i , diferente do x_i , por x_{i-1} . Temos que $x_{i-1} \in I(d_q^j)$. Como

$$I(d_q^j) = \{e_q^j\} \cup \{b_{q'}^j : q' \leq q\} \cup \{b_r^{j'} : j' \leq j \text{ e } r \in [13]\} \cup \{b_0^{j'} : j' \leq j\},$$

concluimos que $x_{i-1} = e_q^j$. Desta forma, como $x_{i-1} = e_q^j$. Então, o Exemplo 22 garante que $S(x_{i-1}) = S(e_q^j)$ induz uma ordem total em R_{LC} , uma contradição com a minimalidade do ciclo.

Isto conclui a prova. ■

Agora, vamos revisar alguns conceitos e propriedades utilizados para demonstrar que R_{LC} tem dimensão 4.

Definição 25. Seja L uma extensão total de R_{LC} . O vértice $v \in Q_i$, para algum $i \in \{1, \dots, n\}$, é **alto** se $(x, y) \in L$ para todo y não relacionado com x segundo R_{LC} .

Definição 26. Seja L uma extensão total de R_{LC} . O vértice $v \in Q_i$, para algum $i \in \{1, \dots, n\}$, é **baixo** se $(y, x) \in L$ para todo y não relacionado com x segundo R_{LC} .

A Proposição 11 garante que existe L extensão total para R_{LC} .

Teorema 16. [Kierstead, Trotter & Qin, 1992] A relação R_{LC} tem dimensão 4.

PROVA. Sejam L_1, L_2 e L_3 extensões totais de R_{LC} e suponhamos, para uma contradição, que $\{L_1, L_2, L_3\}$ é conjunto gerador de R_{LC} .

Para todo $i \in [n]$, vamos rotular cada $v \in Q_i$ com uma tripla $c(v) = (a_1, a_2, a_3)$, onde $a_1, a_2, a_3 \in \{-1, 0, 1\}$ são tais que:

- $a_k = -1$ se v é baixo em relação a L_k ;
- $a_k = 0$ se v não é alto e nem baixo em relação a L_k ;
- $a_k = 1$ se v é alto em relação a L_k .

Pelo *Princípio Fundamental da Contagem*, existem $3^3 = 27$ possibilidades de rótulos para $c(v)$.

Vamos rotular também o Q_i , para todo $i \in [n]$, do seguinte modo:

$$C(Q_i) = (c(e_0^i), c(e_1^i), \dots, c(e_{13}^i), c(d_1^i), \dots, c(d_{13}^i))$$

Pelo *Princípio Fundamental da Contagem*, existem 27^{27} possíveis rótulos para $C(Q_i)$.

Como existem $27^{27} + 1$ Q_i 's, o *Princípio da Casa dos Pombos*¹ garante que existem $i \neq j$ em $[n]$ tais que $C(Q_i) = C(Q_j)$. Sem perda de generalidade, tomemos $i = 1$ e $j = 2$, isto é, $C(Q_1) = C(Q_2)$.

Obtemos $c(d_j^1) = c(d_j^2)$, para $\{0, \dots, 13\}$, e, $c(e_i^1) = c(e_i^2)$, para $i \in \{0, \dots, 13\}$. Isto é, cada d_j^1 e e_i^1 são altos, baixos ou nem altos e nem baixos se e só se d_j^2 e e_i^2 são altos, baixos ou nem altos e nem baixos, respectivamente.

Dados $p, k \in \{1, 2, 3\}$, consideremos o conjunto $A_{p,k}$ definido por:

$$A_{p,k} = \{(e_j^1, d_j^1) : e_j^1 \text{ é alto em } L_p, d_j^1 \text{ é baixo em } L_k, 0 < j \leq 13\}.$$

Fato: $A_{p,p} = \emptyset$.

¹Teorema de Dirichlet

De fato, suponhamos, para uma contradição, que existe $j \in I_{13}$ tal que $(e_j^1, d_j^1) \in A_{p,p}$. Como d_j^1 é baixo em L_p , temos $(d_j^1, t_0^1) \in L_p$. Mas, por construção, o par (e_j^1, d_j^1) está em $R_{LC} \subset L_p$. Assim, pela transitividade de L_p , obtemos $(e_j^1, t_0^1) \in L_p$, uma contradição com o fato de e_j^1 ser alto em L_p .

Fato: Os vértices e_j^1 e d_j^1 são altos para algum L_i , com $i \in \{1, 2, 3\}$, e baixos para outro L_j , com $j \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$.

De fato, suponhamos, para uma contradição, que e_j^1 e d_j^1 não são nem altos e nem baixos para L_1, L_2 e L_3 . Daí, existem pares (arestas) que pertencem a $L_1 \cap L_2 \cap L_3$, uma contradição com o fato de $\{L_1, L_2, L_3\}$ ser conjunto gerador de R_{LC} .

Portanto:

$$\{(e_j^1, d_j^1) : j \in \{1, 2, 3\}\} \subseteq A_{1,2} \cup A_{1,3} \cup A_{2,1} \cup A_{2,3} \cup A_{3,1} \cup A_{3,2}$$

logo,

$$|A_{1,2}| + |A_{1,3}| + |A_{2,1}| + |A_{2,3}| + |A_{3,1}| + |A_{3,2}| \geq 13$$

Sendo assim, pelo Princípio da Casa dos Pombos, existe $A_{p,k}$ tal que $|A_{p,k}| \geq 3$. Sem perda de generalidade, consideremos $p = 1, k = 2$ e $\{(e_1^1, d_1^1), (e_2^1, d_2^1), (e_3^1, d_3^1)\} \subseteq A_{1,2}$.

Como $C(Q_1) = C(Q_2)$, o vértice e_j^2 é alto em L_1 e o vértice d_j^2 é baixo em L_2 , para $j \in \{1, 2, 3\}$.

Agora, vamos procurar um par de vértices não adjacentes de $G_{R_{LC}}$, que não é gerado por L_1, L_2 e L_3 , em um subgrafo induzido $G'_{R_{LC}}$ de $G_{R_{LC}}$. Esse subgrafo induzido está representado, parcialmente, na Figura 6.7.

Como $(e_1^1, t_0^1), (t_0^1, e_1^1) \notin R_{LC}$ e e_1^1 é alto em L_1 , obtemos $(t_0^1, e_1^1) \in L_1$. E, pela construção, o par (e_0^1, t_0^1) está em R_{LC} . Logo, por transitividade, obtemos $(e_0^1, e_1^1) \in L_1$. Utilizando um raciocínio análogo temos $(e_0^2, e_1^1) \in L_1$.

Pela construção, o par (e_1^1, d_1^1) está em R_{LC} . Daí, este fato junto com os pares obtidos acima, temos a seguinte ordem em L_1 :

$$e_0^1, e_0^2 < e_1^1 < d_1^1$$

Como $(e_1^2, t_1^1), (t_1^1, e_1^2) \notin R_{LC}$ e e_1^2 é alto em L_1 , obtemos $(t_1^1, e_1^2) \in L_1$. E, pela construção, $(d_1^1, t_1^1) \in R_{LC}$. Logo, por transitividade, temos $(d_1^1, e_1^2) \in L_1$.

Pela construção, o par (e_1^2, d_1^2) está em R_{LC} . Daí, este fato junto com o par e a ordem obtidas acima, temos, em L_1 :

$$e_0^1, e_0^2 < e_1^1 < d_1^1 < e_1^2 < d_1^2$$

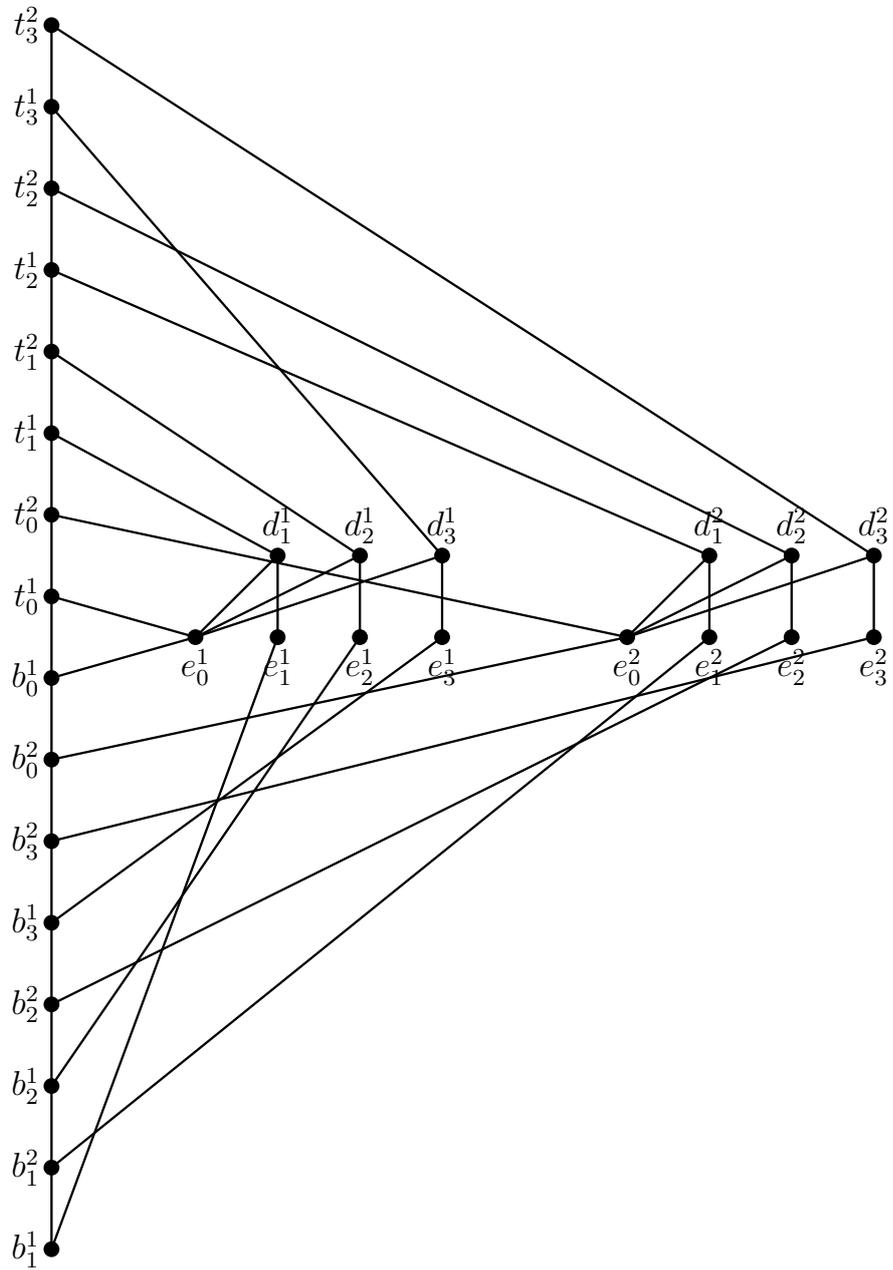


Figura 6.7: Esquema associado a G'_{RLC}

Como $(e_2^1, t_1^2), (t_1^2, e_2^1) \notin R_{LC}$ e e_2^1 é alto em L_1 , obtemos $(t_1^2, e_2^1) \in L_1$. E, pela construção, $(d_1^2, t_1^2) \in R_{LC}$. Logo, por transitividade, temos $(d_1^2, e_2^1) \in L_1$.

Pela construção, o par (e_2^1, d_2^1) está em R_{LC} . Daí, este fato junto com o par e a ordem obtidas acima, temos, em L_1 :

$$e_0^1, e_0^2 \leq e_1^1 \leq d_1^1 \leq e_1^2 \leq d_1^2 \leq e_2^1 \leq d_2^1$$

Como $(e_2^2, t_2^1), (t_2^1, e_2^2) \notin R_{LC}$ e e_2^2 é alto em L_1 , obtemos $(t_2^1, e_2^2) \in L_1$. E, pela construção, $(d_2^1, t_2^1) \in R_{LC}$. Logo, por transitividade, temos $(d_2^1, e_2^2) \in L_1$.

Pela construção, o par (e_2^2, d_2^2) está em R_{LC} . Daí, este fato junto com o par e a ordem obtidas acima, temos, em L_1 :

$$e_0^1, e_0^2 \leq e_1^1 \leq d_1^1 \leq e_1^2 \leq d_1^2 \leq e_2^1 \leq d_2^1 \leq e_2^2 \leq d_2^2$$

Como $(e_3^1, t_2^2), (t_2^2, e_3^1) \notin R_{LC}$ e e_3^1 é alto em L_1 , obtemos $(t_2^2, e_3^1) \in L_1$. E, pela construção, $(d_2^2, t_2^2) \in R_{LC}$. Logo, por transitividade, temos $(d_2^2, e_3^1) \in L_1$.

Pela construção, o par (e_3^1, d_3^1) está em R_{LC} . Daí, este fato junto com o par e a ordem obtidas acima, temos, em L_1 :

$$e_0^1, e_0^2 \leq e_1^1 \leq d_1^1 \leq e_1^2 \leq d_1^2 \leq e_2^1 \leq d_2^1 \leq e_2^2 \leq d_2^2 \leq e_3^1 \leq d_3^1$$

Como $(e_3^2, t_3^1), (t_3^1, e_3^2) \notin R_{LC}$ e e_3^2 é alto em L_1 , obtemos $(t_3^1, e_3^2) \in L_1$. E, pela construção, $(d_3^1, t_3^1) \in R_{LC}$. Logo, por transitividade, temos $(d_3^1, e_3^2) \in L_1$.

Pela construção, o par (e_3^2, d_3^2) está em R_{LC} . Daí, este fato junto com o par e a ordem obtidas acima, temos, em L_1 :

$$e_0^1, e_0^2 \leq e_1^1 \leq d_1^1 \leq e_1^2 \leq d_1^2 \leq e_2^1 \leq d_2^1 \leq e_2^2 \leq d_2^2 \leq e_3^1 \leq d_3^1 \leq e_3^2 \leq d_3^2 \quad (6.1)$$

Agora, da mesma forma que fizemos para L_1 , encontraremos uma outra cadeira em L_2 . Nesta extensão, sabemos que os vértices $d_1^1, d_2^1, d_3^1, d_1^2, d_2^2$ e d_3^2 são todos baixos.

Como todo elemento y de R_{LC} que não está relacionado com e_0^1 também não está relacionado com d_1^1 , obtemos $(d_1^1, y) \in L_2$. Pela construção de R_{LC} , temos $(e_0^1, y) \in L_2$. Assim, o vértice e_0^1 é baixo em L_2 .

Por um raciocínio análogo, obtemos que e_0^2 é baixo em L_2 .

Com isso:

- Como $(b_0^1, e_0^1) \in R_{LC}$ e $(e_0^2, b_0^1), (b_0^1, e_0^2) \notin R_{LC}$, obtém-se $(e_0^2, b_0^1) \in L_2$ de onde conclui-se que $(e_0^2, e_0^1) \in L_2$.

- Como $(b_0^1, e_0^1) \in R_{LC}$ e $(d_1^2, b_0^1), (b_0^1, d_1^2) \notin R_{LC}$, obtém-se $(d_1^2, b_0^1) \in L_2$ de onde conclui-se que $(d_1^2, e_0^1) \in L_2$.
- Como $(b_0^1, e_0^1) \in R_{LC}$ e $(d_2^2, b_0^1), (b_0^1, d_2^2) \notin R_{LC}$, obtém-se $(d_2^2, b_0^1) \in L_2$ de onde conclui-se que $(d_2^2, e_0^1) \in L_2$.
- Como $(b_0^1, e_0^1) \in R_{LC}$ e $(d_3^2, b_0^1), (b_0^1, d_3^2) \notin R_{LC}$, obtém-se $(d_3^2, b_0^1) \in L_2$ de onde conclui-se que $(d_3^2, e_0^1) \in L_2$.

Portanto, obtemos, em L_2 a seguinte ordem:

$$e_0^2, d_1^2, d_2^2, d_3^2 \leq e_0^1 \quad (6.2)$$

Sabemos que, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, temos $(e_i^1, d_i^1), (e_0^2, d_3^2) \in R_{LC}$ e $(e_0^2, d_i^1), (d_i^1, e_0^2), (e_i^1, d_3^2), (d_3^2, e_i^1) \notin R_{LC}$. Isto é, temos $2K_2$'s induzidos de $G_{R_{LC}}$, de acordo com a Figura 6.8.

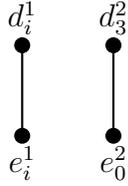


Figura 6.8: Os $2K_2$'s induzidos de $G_{R_{LC}}$

Pela Inequação 6.1 obtemos $(e_i^1, d_3^2), (e_0^2, d_i^1) \in L_1$, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$.

Como $(e_0^1, d_i^1) \in R_{LC} \subset L_2$, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, obtemos, pela transitividade de L_2 e pela Inequação 6.2, $(e_0^2, d_i^1) \in L_2$.

Vamos considerar dois casos.

1. Suponhamos que $(e_i^1, d_3^2) \in L_2$.

Assim, pelo fato de $\{L_1, L_2, L_3\}$ ser um conjunto gerador de R_{LC} , temos que $(d_i^1, e_0^2), (d_3^2, e_i^1) \in L_3$, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. Daí, pela transitividade de L_3 , o par $(e_i^1, d_i^1) \in R_{LC} \subset L_3$ garante que $(d_3^2, d_i^1) \in L_3$. Por outro lado, pela transitividade, o par $(e_0^2, d_3^2) \in R_{LC} \subset L_3$ garante que $(d_i^1, d_3^2) \in L_3$, uma contradição.

2. Suponhamos que $(d_3^2, e_i^1) \in L_2$.

Como $(b_3^2, d_3^2) \in R_{LC}$ e $(d_3^2, e_i^1) \in L_2$, para todo $i \in \{1, 2, 3\}$, pela transitividade, obtemos $(b_3^2, e_i^1) \in L_2$. Desta forma, e_i^1 não é baixo em L_2 , para todo $i \in \{1, 2, 3\}$.

Já vimos que $C(Q_1) = C(Q_2)$, portanto e_i^2 também não é baixo em L_2 , para todo $i \in \{1, 2, 3\}$.

Desta forma, podemos concluir que e_i^1 e e_i^2 são altos em L_1 e não são altos e nem baixos em L_2 , para todo $i \in \{1, 2, 3\}$. Portanto, estes vértices devem ser baixos em L_3 .

Assim:

- Como $(b_1^2, e_1^1), (e_1^1, b_1^2) \notin R_{LC}$ e e_1^1 é baixo em L_3 , temos $(e_1^1, b_1^2) \in L_3$. Também sabemos que $(b_1^2, e_1^2) \in R_{LC}$, daí, pela transitividade de L_3 , obtemos $(e_1^1, e_1^2) \in L_3$.
- Com um raciocínio análogo ao item anterior, obtemos $(e_2^1, e_2^2), (e_3^1, e_3^2) \in L_3$.
- Como $(b_2^2, e_1^2), (e_1^2, b_2^2) \notin R_{LC}$ e e_1^2 é baixo em L_3 , temos $(e_1^2, b_2^2) \in L_3$. Também sabemos que $(b_2^2, e_2^1) \in L_3$, daí, pela transitividade de L_3 , obtemos $(e_1^2, e_2^1) \in L_3$.
- Com um raciocínio análogo ao item anterior, obtemos $(e_2^2, e_3^1) \in L_3$.

Portanto, obtemos, em L_3 , a seguinte ordem:

$$e_1^1 \leq e_1^2 \leq e_2^1 \leq e_2^2 \leq e_3^1 \leq e_3^2 \quad (6.3)$$

A ordem dada pela Inequação 6.3, obtida através da extensão L_3 , repete o que acontece na Inequação 6.1, obtida através da extensão L_1 , nos vértices e_i^1 e e_i^2 . Como $(e_1^2, e_2^1) \in L_1 \cap L_3$ e pelo fato de $\{L_1, L_2, L_3\}$ ser conjunto gerador de R_{LC} , obtemos $(e_2^1, e_1^2) \in L_2$.

Por outro lado, sabemos que $(e_1^2, d_1^2) \in R_{LC}$ e, pela Inequação 6.2, temos $(d_1^2, e_0^1) \in L_2$. Daí, pela transitividade de L_2 , obtemos que o par (e_1^2, e_0^1) está na extensão L_2 .

Pela construção, $(e_0^1, d_3^1) \in R_{LC}$. Daí, pela transitividade de L_2 , obtemos $(e_1^2, d_3^1) \in L_2$.

Finalmente, obtemos a seguinte ordem em L_2 :

$$e_2^1 \leq e_1^2 \leq d_1^2 \leq e_0^1 \leq d_3^1 \quad (6.4)$$

Daí, $(e_2^1, d_3^1) \in L_3$. Mas, as Inequações 6.1 e 6.3 garantem que os pares (e_2^1, e_3^1) e (e_3^1, d_3^1) estão em L_1 e L_2 .

Logo, obtemos $(e_2^1, d_3^1) \in L_1 \cap L_2 \cap L_3 = R_{LC}$, uma contradição.

Desta forma, concluímos que $\{L_1, L_2, L_3\}$ não pode ser conjunto gerador de R_{LC} . Daí, pelos Teoremas 14 e 15, a dimensão de R_{LC} é 4. ■

6.2 Dimensão linear dos grafos *split* comparabilidade

Um grafo é *split* se pode ser particionado em uma clique e um conjunto independente.

Definição 27. Um grafo G é **split** se $V(G)$ pode ser particionado em dois conjuntos, C e I , tais que $G[C]$ é completo e $G[I]$ não possui arestas.

Denotamos um grafo *split* G com partição $\{C, I\}$ por $(C \cup I, E)$.

Exemplo 23. O grafo RS_4 (cf. Seção 5), é um grafo *split*. De fato, basta tomarmos $C = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ (vértices azuis) e $I = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ (vértices vermelhos), uma partição de $V(RS_4)$. Por inspeção, vemos que C e I satisfazem a Definição 27. Como vimos no Exemplo 20, $\dim(RS_4) = 3$.

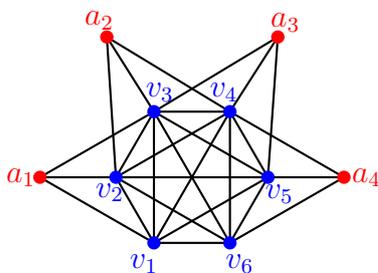


Figura 6.9: O grafo RS_4 é *split*.

Na verdade, como vimos no Exemplo 21, para todo $n \geq 4$, o grafo RS_n é *split*, com partição $C = \{v_1, \dots, v_{2n-2}\}$ e $I = \{a_1, \dots, a_n\}$ (cf. Figura 5.7) e $\dim(RS_n) = 3$.

Vamos generalizar o Exemplo 23, mostrando que todos os grafos *split* conexos² que são de comparabilidade possuem dimensão no máximo 3. Para isto, vamos empregar a *caracterização dos grafos split conexos que são de comparabilidade*, de C. Ortiz e M. Villanueva [35]. Como o trabalho de Ortiz e Villanueva não é de

²Um grafo *split* desconexo G com componentes conexas G_1, \dots, G_k ou é trivial, ou existe um único $i \in [k]$ tal que G_i é não trivial. Desta forma, $\dim(G) = \dim(G_i)$.

fácil acesso e como os trabalhos [36], [37], [7], [21], [6], [22], [10], que utilizam esta caracterização não apresentam uma demonstração do resultado, resolvemos apresentar uma demonstração completa dele, para futuras referências.

No que segue, dado um conjunto totalmente parcialmente ordenado (P, \leq) e $a, b \in P$, tais que $a \leq b$, como usual, o conjunto $\{x \in P : a \leq x \leq b\}$ é denotado por $[a, b]$.

Proposição 18. Se $G = (C \cup I, E)$ é grafo *split* conexo e não completo, então existem $C', I' \subseteq V(G)$, tais que C' é clique maximal, I' é conjunto independente e $G = (C' \cup I', E)$.

PROVA. Seja $G = (C \cup I, E)$ um grafo *split* conexo e não completo. Pela Definição 27, C é clique e I é conjunto independente. Vamos considerar dois casos.

Caso 1. Suponhamos que C é clique maximal. Assim, ao tomar $C' = C$ e $I' = I$ a verificação é imediata.

Caso 2. Suponhamos que C não é clique maximal. Assim, existe $C' \subseteq V(G)$ tal que C' é clique e $C \subset C'$. Seja $c' \in C' \setminus C$. Como $\{C, I\}$ é partição de $V(G)$ e $c' \notin C$, temos $c' \in I$. Agora, seja $c'' \in C' \setminus C$. De maneira análoga, temos $c'' \in I$. Como I é conjunto independente com $c', c'' \in I$ e $c', c'' \in C'$, obrigatoriamente, temos $c' = c''$. Desta forma, $C' = C \cup \{c'\}$. Tomemos, então, $C' = C \cup \{c'\}$ e $I' = I \setminus \{c'\}$, subconjuntos de $V(G)$. Por construção, C' é clique maximal e I' é conjunto independente de G . Vamos mostrar que $\{C', I'\}$ é uma partição de $V(G)$. De fato:

$$2.1 \quad C' \cap I' = (C \cup \{c'\}) \cap (I' \cap \overline{\{c'\}}) = (C \cap I' \cap \overline{\{c'\}}) \cup (\{c'\} \cap (I' \cap \overline{\{c'\}})).$$

Agora, como $I' \subset I$ e $\{C, I\}$ é partição de $V(G)$, temos $C \cap I' \subseteq C \cap I = \emptyset$. Logo, $C' \cap I' = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$.

$$2.2 \quad C' \cup I' = (C \cup \{c'\}) \cup (I' \cap \overline{\{c'\}}) = (C \cup \{c'\} \cup I') \cup (C \cup \{c'\} \cup \overline{\{c'\}}).$$

Agora, como $I' = I \setminus \{c'\}$ e $\{C, I\}$ é partição de $V(G)$, temos $\{c'\} \cup I' = I$ e $C \cup I = V(G)$. Logo, $C' \cup I' = (C \cup I) \cup (C \cup V(G)) = V(G) \cup V(G) = V(G)$.

Isto conclui a prova. ■

Daqui em diante, de acordo com a Proposição 18, dado um grafo *split* $G = (C \cup I, E)$ não completo, vamos sempre considerar que C é uma clique maximal de G .

Todo grafo completo é *split* e de comparabilidade, além disso, sua dimensão linear é igual a 1. No Teorema 17, tratamos de grafos *split* de comparabilidade não completos, assumindo, como usual, que são conexos.

Teorema 17. [Ortiz & Villanueva, 1996] Se $G = (C \cup I, E)$ é um grafo split, não completo e conexo, então: G é de comparabilidade com orientação transitiva \leq se, e somente se, G satisfaz às seguintes condições:

- (i) C pode ser totalmente ordenada como $c_1 < c_2 < \dots < c_r$.
- (ii) Existe $p \in \{1, \dots, r-1\}$ ou (inclusivo) existe $q \in \{2, \dots, r\}$ — sendo $p < q$ quando ambos existem —, tais que $C_B = [c_1, c_p]$, $C_E = [c_q, c_r]$ e $C_M = C \setminus (C_B \cup C_E)$ são os blocos de uma partição de C — aqui, consideramos que a partição pode ter \emptyset como elemento.
- (iii) Para cada $v \in I$, exatamente uma das seguintes condições é verdadeira:
 - (a) Existe $i \leq p$ tal que $N(v) = \{c_1, \dots, c_i\} \subseteq C_B$.
 - (b) Existe $j \geq q$ tal que $N(v) = \{c_j, \dots, c_r\} \subseteq C_E$.
 - (c) Existem $i \leq p$ e $j \geq q$ tais que $N(v) = \{c_1, \dots, c_i\} \cup \{c_j, \dots, c_r\}$, onde $\{c_1, \dots, c_i\} \subseteq C_B$ e $\{c_j, \dots, c_r\} \subseteq C_E$.

PROVA. Seja $G = (C \cup I, E)$ um grafo split, não completo e conexo.

(\Rightarrow) Suponhamos que G é de comparabilidade, com orientação transitiva \leq .

(i) Como C é clique, para todos $c_i, c_j \in C$ tais que $c_i \neq c_j$ temos $c_i c_j \in E(G)$. Assim, como G é de comparabilidade, temos $c_i < c_j$ ou (exclusivo) $c_j < c_i$. Logo, \leq induz uma ordem total em C , a qual, sem perda de generalidade, representamos por $c_1 < \dots < c_r$.

(ii) Primeiramente, provamos que, para todo $v \in I$, temos $c_1 \in N(v)$ ou $c_r \in N(v)$. De fato, suponhamos, para uma contradição, que $c_1, c_r \notin N(v)$. Vamos considerar dois casos.

Caso 1. Suponhamos que $r = 2$. Assim, pela hipótese, $c_1, c_2 \notin N(v)$. Como $v \in I$ e I é conjunto independente de G , temos que v é vértice isolado de G , uma contradição com a conexidade de G .

Caso 2. Suponhamos que $r > 2$. Assim, como G é conexo, existe $k \in \{2, \dots, r-1\}$ tal que $vc_k \in E(G)$. Como G é de comparabilidade com orientação transitiva $<$, vamos considerar dois subcasos.

- 2.1. Se $v < c_k$, como, pela ordem linear dos vértices de C , temos $c_k < \dots < c_r$, pela transitividade de \leq , temos $v < c_r$. Logo, $c_r \in N(v)$, uma contradição.

2.2. Se $c_k < v$, como pela ordem linear dos vértices de C , temos $c_1 < \dots < c_k$, pela transitividade de \leq , temos $c_1 < v$. Logo, $c_1 \in N(v)$, uma contradição.

Desta forma, para cada $v \in I$, exatamente um dos seguintes casos é verdadeiro: (1) $c_1 \in N(v)$ e $c_r \notin N(v)$; ou (2) $c_1 \notin N(v)$ e $c_r \in N(v)$; ou (3) $c_1, c_r \in N(v)$.

Agora, para cada $v \in I$, vamos analisar os casos (1), (2) e (3). Para isto, definimos $i_v = \max\{k \in [r] : c_k \in N(v)\}$ e $j_v = \min\{k \in [r] : c_k \in N(v)\}$. Como G é conexo, i_v e j_v existem, para cada $v \in I$. Para facilitar a redação, quando não há ambiguidade, denotamos i_v e j_v , simplesmente, por i e j .

Caso 1. Suponhamos que $c_1 \in N(v)$ e $c_r \notin N(v)$.

Como $c_r \notin N(v)$, temos $i \neq r$. Além disso, temos $c_i < v$. De fato, caso contrário, teríamos $v \leq c_i < \dots < c_r$. Daí, pela transitividade de \leq , teríamos $c_r \in N(v)$, uma contradição. Assim, $c_1 < \dots < c_i < v$ e, conseqüentemente, $c_1, \dots, c_i \in N(v)$. Agora, como $v \in I$, todos os vizinhos de v estão em C . Além disso, pela definição de i , não há vizinhos de v maiores que c_i . Logo, $N(v) = \{c_1, \dots, c_i\}$ e $c_1 < \dots < c_i < v$. Neste caso, dizemos que v é **vértice do tipo begin**.

Caso 2. Suponhamos que $c_1 \notin N(v)$ e $c_r \in N(v)$.

Como $c_1 \notin N(v)$, temos $j \neq 1$. Assim, por um raciocínio análogo ao empregado no caso (1), temos $N(v) = \{c_j, \dots, c_r\}$ e $v < c_j < \dots < c_r$. Neste caso, dizemos que v é **vértice do tipo end**.

Caso 3. Suponhamos que $c_1, c_r \in N(v)$.

Daí, existe $k \in [r]$ tal que $vc_k \notin E(G)$. De fato, caso contrário, C não seria uma clique maximal. Portanto, podemos tomar $i' = \min\{k \in [r] \setminus \{1\} : vc_k \notin E(G)\}$ e $j' = \max\{k \in [r] \setminus \{r\} : vc_k \notin E(G)\}$. Desta forma, $c_{i'-1}v, c_{j'+1}v \in E(G)$.

Por um raciocínio análogo ao empregado nos casos (1) e (2), temos $c_1, \dots, c_{i'-1} \in N(v)$, com $c_1 < \dots, c_{i'-1} < v$; e $c_{j'+1}, \dots, c_r \in N(v)$ com $v < c_{j'+1} < \dots < c_r$. Daí, $\{c_1, \dots, c_{i'-1}\} \cup \{c_{j'+1}, \dots, c_r\} \subseteq N(v)$. Para mostrar que, reciprocamente, $N(v) \subseteq \{c_1, \dots, c_{i'-1}\} \cup \{c_{j'+1}, \dots, c_r\}$, suponhamos, para uma contradição, que existe $c_{k'} \in C$, com $i' \leq k' \leq j'$, tal que $vc_{k'} \in E(G)$. De acordo com \leq , vamos considerar dois casos.

3.1 Se $c_{k'} < v$, como $i' \leq k'$, pela orientação de C , temos $c_{i'} \leq c_{k'}$. Assim, como supomos $c_{k'} < v$, temos $c_{i'} \leq c_{k'} < v$. Conseqüentemente, pela transitividade de \leq , temos $c_{i'} \in N(v)$, uma contradição.

3.2 Se $v < c_{k'}$, como $k' \leq j'$, pela orientação de C , temos $c_{k'} \leq c_{j'}$. Assim, como $v < c_{k'}$, temos $v < c_{k'} \leq c_{j'}$. Conseqüentemente, pela transitividade de \leq , temos $c_{j'} \in N(v)$, uma contradição.

Logo, $N(v) = \{c_1, \dots, c_{i-1}\} \cup \{c_{j'+1}, \dots, c_r\}$, de maneira que $c_1 < \dots, c_{i-1} < v$ e $v < c_{j'+1} < \dots < c_r$. Neste caso, dizemos que v é **vértice do tipo *middle*** e, para facilitar a redação, denotamos $\{c_1, \dots, c_i\}$ por $N_B(v)$ e $\{c_j, \dots, c_r\}$ por $N_E(v)$.

Consideramos, agora, os conjuntos

$$\begin{aligned} B &= \{c_i \in C : \exists v \in I \text{ tal que } [v \text{ é do tipo begin e } c_i \in N(v)] \text{ ou} \\ &\quad [v \text{ é do tipo middle e } c_i \in N_B(v)]\}, \\ E &= \{c_j \in C : \exists v \in I \text{ tal que } [v \text{ é do tipo end e } c_j \in N(v)] \text{ ou} \\ &\quad [v \text{ é do tipo middle e } c_j \in N_E(v)]\}; \end{aligned}$$

e a partir deles, definimos $p = \max\{i \in [r] : c_i \in B\}$ e $q = \min\{j \in [r] : c_j \in E\}$.

Se ambos p e q existem, vamos provar que $p < q$. De fato, suponhamos, para uma contradição que $q \leq p$. Daí, pela orientação de C , temos $c_q \leq c_p$. Além disso, pela definição de p , existe $v_b \in I$ tal que $c_p < v_b$ — onde v_b é do tipo begin ou middle e $c_p \in N(v_b)$. Daí, pela transitividade de \leq , temos $c_q < v_b$. Analogamente, pela definição de q , existe $v_e \in I$ tal que $v_e < c_q$ — onde v_e é do tipo end ou middle e $c_q \in N(v_e)$. Daí, pela transitividade de \leq , temos $v_e < c_q$. Assim, temos $v_e < c_q < v_b$ e, conseqüentemente, $v_e < v_b$, o que acarreta $v_b v_e \in E(G)$, uma contradição, pois $v_b, v_e \in I$.

Agora, como G é não completo e conexo, vamos considerar três casos.

Caso 1. Suponhamos que p existe e q não existe. Assim, $C_B = [c_1, c_p]$, $C_E = \emptyset$ e $C_M = C \setminus C_B$ são os blocos de uma partição de C .

Caso 2. Suponhamos que p não existe e q existe. Assim, $C_B = \emptyset$, $C_E = [c_q, c_r]$ e $C_M = C \setminus C_E$ são os blocos de uma partição de C .

Caso 3. Suponhamos que ambos p e q existem. Mostraremos que $C_B = [c_1, c_p]$, $C_E = [c_q, c_r]$ e $C_M = C \setminus (C_B \cup C_E)$ são os blocos de uma partição de C . De fato, por definição, $C_B \cup C_M \cup C_E = C$, $C_B \cap C_M = \emptyset$ e $C_E \cap C_M = \emptyset$. Falta provar que $C_B \cap C_E = \emptyset$. Para isto, suponhamos, para uma contradição, que $C_B \cap C_E \neq \emptyset$. Daí, pelas definições de C_B , C_E , p e q , temos $q \leq p$, uma contradição com $p < q$.

(iii) Seja $v \in I$. Como vimos, temos três possibilidades. Primeiro, se $c_1 \in N(v)$ e $c_r \notin N(v)$, temos que v é do tipo begin e provamos que $N(v) = \{c_1, \dots, c_i\}$ para algum i tal que $1 \leq i \leq p < r$. Segundo, se $c_1 \notin N(v)$ e $c_r \in N(v)$, temos que v é do tipo end e provamos que $N(v) = \{c_j, \dots, c_r\}$ para algum j tal que $1 < q \leq j \leq r$. Finalmente, se $c_1, c_r \in N(v)$, temos que v é do tipo middle e provamos que $N(v) = \{c_1, \dots, c_i\} \cup \{c_j, \dots, c_r\}$ para alguns i e j tais que $1 \leq i \leq p < q \leq j \leq r$.

Isto prova que se G é um grafo split, não completo, conexo e de comparabilidade,

então todas as condições enunciadas no teorema são satisfeitas. A Figura 6.10 ilustra o aspecto geral destes grafos.

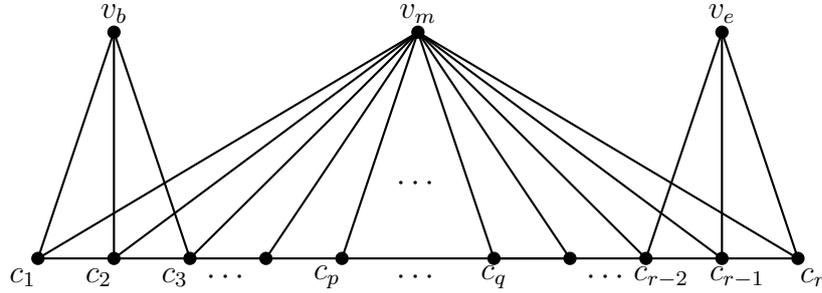


Figura 6.10: Estrutura geral dos grafos split de comparabilidade, não completos e conexos.

(\Leftarrow) Suponhamos que G satisfaz às condições enunciadas no teorema. Vamos provar que G é grafo de comparabilidade. Para isso, definimos uma orientação transitiva \leq , das arestas de G , baseada na orientação de C e nos parâmetros p, q, C_B, C_E e C_M .

Como G é um grafo split, para cada $xy \in E(G)$, temos apenas três casos: $x, y \in C$, $x \in I$ e $y \in C$ ou $x \in C$ e $y \in I$. Utilizando a hipótese de que C_B, C_E e C_M são os blocos de uma partição de C , orientamos xy da maneira a seguir, levando em conta que p ou q pode não existir. As arestas de C são orientadas de acordo com a ordem linear de C , isto é, $c_i < c_j$ se, e somente se, $i < j$; as arestas que possuem um vértice begin como extremidade são orientadas de C para I ; as arestas que possuem um vértice end como extremidade são orientadas de I para C ; e as arestas que possuem um vértice middle como extremidade são orientadas de C para I quando a outra extremidade pertence a C_B e de I para C quando a outra extremidade pertence a C_E . De maneira formal, temos, para cada $xy \in E(G)$:

$$x < y$$

se, e somente se:

$$x, y \in C \text{ e existem } i, j \in [r] \text{ tais que } i < j, x = c_i \text{ e } y = c_j$$

ou

$$x \in C, y \in I \text{ e existe } i \in [r] \text{ tal que } i \leq p \text{ e } x \in \{c_1, \dots, c_i\} \subseteq N(y) \subseteq C_B$$

ou

$$x \in I, y \in C \text{ e existe } j \in [r] \text{ tal que } q \leq j \text{ e } y \in \{c_j, \dots, c_r\} \subseteq N(x) \subseteq C_E$$

Desta forma, a orientação \leq de $E(G)$ pode ser ilustrada como na Figura 6.11,

onde $v_b \in I$ é tal que $N(v_b) \subseteq C_B$; $v_m \in I$ é tal que $N(v_m) \cap C_B \neq \emptyset$ e $N(v_m) \cap C_E \neq \emptyset$; e, finalmente, $v_e \in I$ é tal que $N(v_e) \subseteq C_E$.

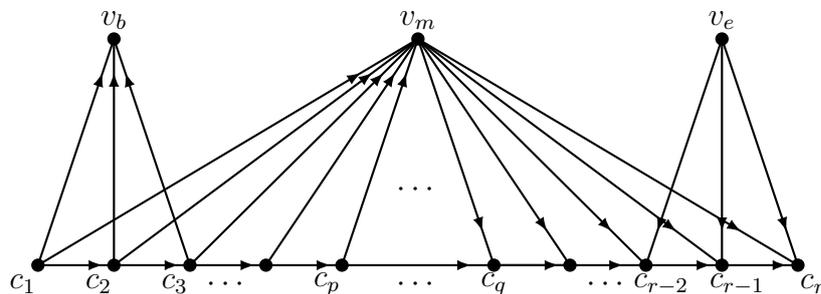


Figura 6.11: Orientação de um grafo *split* que satisfaz às condições do teorema.

Vamos provar que \leq é transitiva. Para isto, sejam $x, y, z \in V(G)$, tais que $x < y$ e $y < z$. Como $xy, yz \in E(G)$ e I é conjunto independente, vamos considerar cinco casos.

Caso 1. Suponhamos que $x \in C$, $y \in C$ e $z \in C$. Assim, como C é clique de G , temos $xz \in E(G)$. Além disso, como $x < y$, existem $i, j \in [r]$ tais que $i < j$, $x = c_i$ e $y = c_j$. Analogamente, como $y < z$, existem $k, l \in [r]$ tais que $k < l$, $y = c_k$ e $z = c_l$. Desta forma, $j = k$ e, conseqüentemente, $i < j < l$. Logo, pela definição de \leq , temos $x = c_i < c_l = z$.

Caso 2. Suponhamos que $x \in C$, $y \in C$ e $z \in I$. Assim, como $x < y$, existem $i, j \in [r]$, tais que $i < j$, $x = c_i$ e $y = c_j$. Além disso, como $y < z$ e $z \in I$, existe $k \in [r]$ tal que $k \leq p$ e $y \in \{c_1, \dots, c_k\} \subseteq N(z) \subseteq C_B$. Daí, como $c_j \in \{c_1, \dots, c_k\}$, temos $j \leq k$. Conclui-se que $1 \leq i < j \leq k \leq p$ e, portanto, $c_i \in \{c_1, \dots, c_k\}$. Desta forma, temos $x \in C$, $z \in I$ e existe $j \in [r]$ tal que $j \leq p$ e $x \in \{c_1, \dots, c_k\} \subseteq N(z) \subseteq C_B$. Logo, pela definição de \leq , temos $x < z$.

Caso 3. Suponhamos que $x \in C$, $y \in I$ e $z \in C$. Assim, como $x < y$, de acordo com a definição de \leq , existe $i \in [r]$ tal que $i \leq p$ e $x \in \{c_1, \dots, c_i\} \subseteq N(y) \subseteq C_B$. Daí, existe $k \in [r]$ tal que $1 \leq k \leq i$ e $x = c_k \in C_B$. Agora, como $z \in C$ com $y < z$, de acordo com a definição de $<$, existe $j \in [r]$ tal que $q \geq j$ e $z \in \{c_j, \dots, c_r\} \subseteq N(y) \subseteq C_E$. Daí existe $l \in [r]$ tal que $q \leq l \leq r$ e $z = c_l$. Conclui-se que $1 \leq k \leq i \leq p < q \leq l \leq r$ e, portanto, $k < l$. Desta forma, $x, z \in C$ e existem $k, l \in [r]$ tais que $k < l$, $x = c_k$ e $z = c_l$. Logo, pela definição de $<$, $x < z$.

Caso 4. Suponhamos que $x \in I$, $y \in C$ e $z \in C$. Assim, como $x < y$, de acordo com a definição de \leq , existe $j \in [r]$ tal que $q \leq j$ e $y \in \{c_j, \dots, c_r\} \subseteq N(x) \subseteq C_E$. Daí, existe $k \in [r]$ tal que $j \leq k$ e $y = c_k \in C_E$. Agora, como $y < z$ e $z \in C$, temos

$c_k < z$. E, pela definição de $<$, existe $l \in [r]$ tal que $k < l$ e $z = c_l$. Conclui-se que $c_k < c_l$, pois C é totalmente ordenada por \leq . Desta maneira, temos $x \in I$, $z \in C$, existe $l \in [r]$ tal que $q \leq j < l$ e $z \in \{c_k, \dots, c_l\} \subseteq \{c_j, \dots, c_r\} \subseteq N(x)$. Logo, pela definição de $<$, temos $x < z$.

Caso 5. Suponhamos que $x \in I$, $y \in C$ e $z \in I$. Assim, como $x < y$, de acordo com a definição de \leq , existe $j \in [r]$ tal que $q \leq j$ e $y \in \{c_j, \dots, c_r\} \subseteq N(x) \subseteq C_E$. Daí, existe $k \in [r]$ tal que $j \leq k$ e $y = c_k \in C_E$. Agora, como $y < z$ e $z \in I$, temos $c_k < z$. E, pela definição de $<$, existe $l \in [r]$ tal que $l \leq p$ e $y \in \{c_1, \dots, c_l\} \subseteq N(z) \subseteq C_B$. Ou seja, $y \in C_B \cap C_E$. O que implica em $C_B \cap C_E \neq \emptyset$, uma contradição com C_B e C_E são blocos de uma partição de C .

Isto prova que se G é um grafo split conexo que satisfaz as condições enunciadas no teorema, então G é grafo de comparabilidade. ■

Munidos do Teorema 17, vamos provar que *todos os grafos split de comparabilidade possuem dimensão menor ou igual a 3*. Mas antes de apresentarmos a prova, vamos exemplificar as ideias envolvidas.

Exemplo 24. Consideremos o digrafo ilustrado na Figura 6.12, associado ao grafo split de comparabilidade $G = (C \cup I, E)$, onde $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}$ é a clique maximal de G e $I = \{a_{1,1}, a_{2,1}, a_{2,2}, m_{1,4,1}, m_{1,6,1}, m_{1,6,2}, m_{2,4,1}, m_{2,6,1}, z_{4,1}, z_{5,1}, z_{5,2}, z_{6,1}\}$ é o conjunto independente de G . Observamos que as arestas de G estão orientadas transitivamente pela relação \leq , definida de acordo com o Teorema 17. E que, como usual, \leq está associada à relação de ordem parcial sobre $V(G)$. Além disso, também de acordo com o teorema, os conjuntos $C_B = \{c_1, c_2\}$, $C_E = \{c_4, c_5, c_6\}$ e $C_M = \{c_3\}$ são os blocos de uma partição de C .

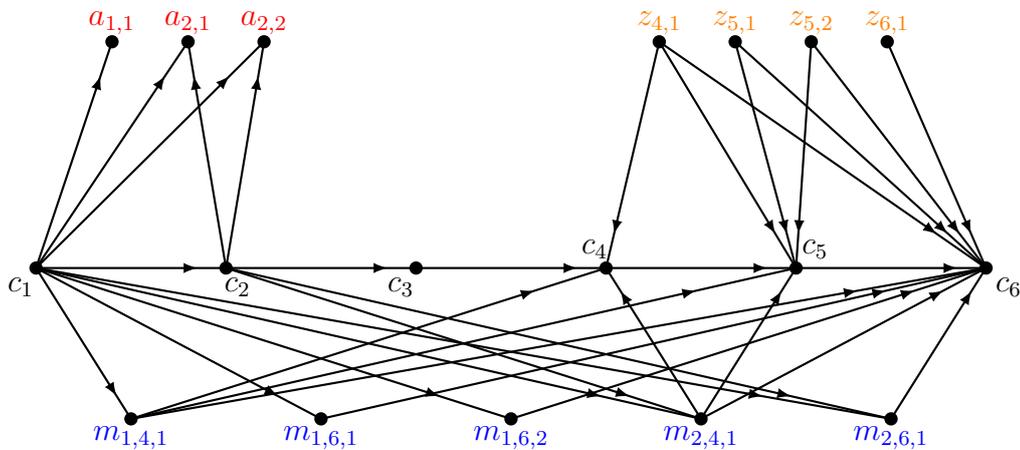


Figura 6.12: Digrafo associado a um grafo split G de comparabilidade.

Para facilitar a redação, quando $v \in I$ é do tipo *begin*, com $N(v) = \{c_1, \dots, c_i\}$, para algum $i \in \{1, 2\}$, denotamos v por $a_{i,k}$. Neste caso, o índice i indica o maior índice b de $c_b \in C_B$ tal que c_b é vizinho de $a_{i,k}$, já o índice k varia de acordo com a quantidade de vértices do tipo *begin* cuja vizinhança é $\{c_1, \dots, c_i\}$. Analogamente, quando $v \in I$ é do tipo *end*, com $N = \{c_j, \dots, c_6\}$, para algum $j \in \{4, 5, 6\}$, denotamos v por $z_{j,k}$. Finalmente, quando $v \in I$ é do tipo *middle*, com $N = \{c_1, \dots, c_i\} \cup \{c_j, \dots, c_6\}$, para alguns $i \in \{1, 2\}$ e $j \in \{4, 5, 6\}$, denotamos v por $m_{i,j,k}$.

Consideremos as três extensões totais, χ_1 , χ_2 e χ_3 , de \leq , definidas como ilustrado a seguir.

$$\chi_1 : c_1 \leq m_{1,4,1} \leq m_{1,6,1} \leq m_{1,6,2} \leq a_{1,1} \leq c_2 \leq m_{2,4,1} \leq m_{2,6,1} \leq a_{2,1} \leq a_{2,2} \leq c_3 \leq z_{4,1} \leq c_4 \leq z_{5,1} \leq z_{5,2} \leq c_5 \leq z_{6,1} \leq c_6$$

$$\chi_2 : z_{6,1} \leq z_{5,2} \leq z_{5,1} \leq z_{4,1} \leq c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq m_{2,4,1} \leq m_{1,4,1} \leq c_4 \leq c_5 \leq m_{2,6,1} \leq m_{1,6,2} \leq m_{1,6,1} \leq c_6 \leq a_{2,2} \leq a_{2,1} \leq a_{1,1}$$

$$\chi_3 : c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq a_{1,1} \leq a_{2,1} \leq a_{2,2} \leq m_{2,6,1} \leq m_{2,4,1} \leq m_{1,6,2} \leq m_{1,6,1} \leq m_{1,4,1} \leq z_{4,1} \leq z_{5,1} \leq z_{5,2} \leq z_{6,1} \leq c_4 \leq c_5 \leq c_6$$

Pela construção acima, obtemos que $\chi_1 \cap \chi_2 \cap \chi_3$ é a mesma relação que \leq . A demonstração deste fato está detalhada e generalizada na prova do Teorema 18. Lembrando que a observação feita após o Exemplo 18 detalha a troca entre as notações de pertinência (\in) e de ordem (\leq ou $<$) que está sendo utilizada neste exemplo e será utilizada na demonstração do Teorema 18.

Teorema 18. Se G é um grafo split de comparabilidade conexo, então $\dim(G) \leq 3$.

PROVA. Seja $G = (C \cup I, E)$ grafo split de comparabilidade associado à relação de ordem parcial \leq .

Se G é grafo completo, então sua dimensão é igual a 1.

Se G não é grafo completo, então, pelo Teorema 17, G está associado à relação $<$ que induz uma orientação transitiva de suas arestas e ordem total em C , a qual, sem perda de generalidade, denotamos por $c_1 < \dots < c_r$. Além disso, existe $p \in \{1, \dots, r-1\}$ ou (inclusivo) existe $q \in \{2, \dots, r\}$ — sendo $p < q$ quando ambos existem — de maneira que $C_B = [c_1, c_p]$, $C_E = [c_q, c_r]$ e $C_M = C \setminus (C_B \cup C_E)$ formam uma partição de C , e, para cada $v \in I$, exatamente uma das seguintes condições é verdadeira:

- (a) Existe $i \leq p$ tal que $N(v) = \{c_1, \dots, c_i\} \subseteq C_B$,

- (b) Existe $j \geq q$ tal que $N(v) = \{c_j, \dots, c_r\} \subseteq C_E$,
- (c) Existem $i \leq p$ e $j \geq q$ tais que $N(v) = \{c_1, \dots, c_i\} \cup \{c_j, \dots, c_r\}$, onde $\{c_1, \dots, c_i\} \subseteq C_B$ e $\{c_j, \dots, c_r\} \subseteq C_E$.

Desta forma, pela demonstração do Teorema 17, temos, respectivamente:

- Para todo $v \in I$ que satisfaz à condição (a), v é do tipo **begin** e $v > c_k$, para todo $k \in [i]$. Denotaremos v por a_i .
- Para todo $v \in I$ que satisfaz à condição (b), v é do tipo **end** e $v < c_k$, para todo $k \in \{q, \dots, r\}$. Denotaremos v por z_j .
- Para todo $v \in I$ que satisfaz à condição (c), v é do tipo **middle**, $v > c_k$, para todo $k \in \{1, \dots, i\}$ e $v < c_k$, para todo $k \in \{q, \dots, r\}$. Denotaremos v por $m_{i,j}$.

Podem existir vários vértices $v \in I$ que satisfazem à condição (a). Denotaremos estes vértices por $a_{i,1}, \dots, a_{i,t(i)}$. Analogamente, todos os vértices $v \in I$ que satisfazem a condição (b), serão denotados por $z_{j,1}, \dots, z_{j,s(j)}$. E todos os vértices $v \in I$ que satisfazem a condição (c) serão denotados por $m_{i,j,1}, \dots, m_{i,j,w(i,j)}$.

Pelas Definições 19 e 20, precisamos demonstrar que \leq admite três extensões totais cuja interseção delas é igual à relação \leq .

Para efeito de notação, consideremos as seguintes cadeias de vértices de I .

A cadeia dos vértices do tipo begin, $v = a_{i,k}$, com $i \in \{1, \dots, p\}$ fixo e $k \in \{1, \dots, t(i)\}$ variando em ordem lexicográfica, é denotada por $\alpha_{i,c,k}$.

$$\alpha_{i,c,k} : a_{i,1} \leq a_{i,2} \leq \dots \leq a_{i,t(i)}$$

A cadeia dos vértices do tipo end, $v = z_{j,k}$, com $j \in \{q, \dots, r\}$ fixado e $k \in \{1, \dots, s(j)\}$ variando em ordem lexicográfica, é denotada por $\zeta_{j,c,k}$.

$$\zeta_{j,c,k} : z_{j,1} \leq z_{j,2} \leq \dots \leq z_{j,s(j)}$$

A cadeia dos vértices do tipo middle, $v = m_{i,j,k}$, com $i \in \{1, \dots, p\}$ fixado e o par ordenado $(j, k) \in \{q, \dots, r\} \times \{1, \dots, w(i, j)\}$ variando em ordem lexicográfica, é denotada por $\omega_{i,c,j,k}$.

$$\omega_{i,c,j,k} : m_{i,q,1} \leq m_{i,q,2} \leq \dots \leq m_{i,q,w(i,q)} \leq m_{i,q+1,1} \leq \dots \leq m_{i,q+1,w(i,q+1)} \leq \dots \leq m_{i,r,1} \leq \dots \leq m_{i,r,w(i,r)}$$

A cadeia dos vértices do tipo middle, $v = m_{i,j,k}$, com $j \in \{q, \dots, r\}$ fixado e o par ordenado $(i, k) \in \{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, w(i, j)\}$ variando em ordem lexicográfica, é denotada por $\omega_{i,j_c,k}$.

$$\omega_{i,j_c,k} : m_{1,j,1} \leq m_{1,j,2} \leq \dots \leq m_{1,j,w(1,j)} \leq m_{2,j,1} \leq \dots \leq m_{2,j,w(2,j)} \leq \dots \leq m_{p,j,1} \leq \dots \leq m_{p,j,w(p,j)}$$

Além disso, dada uma cadeia qualquer $\rho : v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_n$ de vértices de I , denotaremos a cadeia $v_n \leq \dots \leq v_2 \leq v_1$ por $\bar{\rho}$ e a denominaremos de cadeia reversa de ρ .

Agora, vamos definir abaixo χ_1 , χ_2 e χ_3 três extensões totais de \leq .

$$\chi_1 : c_1 \leq \omega_{1_c,j,k} \leq \alpha_{1_c,k} \leq c_2 \leq \omega_{2_c,j,k} \leq \alpha_{2_c,k} \leq \dots \leq c_p \leq \omega_{p_c,j,k} \leq \alpha_{p_c,k} \leq \dots \leq \zeta_{q_c,k} \leq c_q \leq \zeta_{q+1_c,k} \leq c_{q+1} \leq \dots \leq \zeta_{r_c,k} \leq c_r$$

$$\chi_2 : \overline{\zeta_{r_c,k}} \leq \overline{\zeta_{r-1_c,k}} \leq \dots \leq \overline{\zeta_{q_c,k}} \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_p \leq \dots \leq \overline{\omega_{i,q_c,k}} \leq c_q \leq \overline{\omega_{i,q+1_c,k}} \leq c_{q+1} \leq \dots \leq \overline{\omega_{i,r_c,k}} \leq c_r \leq \overline{\alpha_{p_c,k}} \leq \overline{\alpha_{p-1_c,k}} \leq \dots \leq \overline{\alpha_{1_c,k}}$$

$$\chi_3 : c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_p \leq \alpha_{1_c,k} \leq \alpha_{2_c,k} \leq \dots \leq \alpha_{p_c,k} \leq \overline{\omega_{p_c,j,k}} \leq \overline{\omega_{p-1_c,j,k}} \leq \dots \leq \overline{\omega_{1_c,j,k}} \leq \zeta_{q_c,k} \leq \zeta_{q+1_c,k} \leq \dots \leq \zeta_{r_c,k} \leq \dots \leq c_q \leq c_{q+1} \leq \dots \leq c_r$$

Queremos demonstrar que a relação obtida de $\bigcap_{i=1}^3 \chi_i$ é igual à relação \leq . Isto é, para quaisquer $x, y \in V(G)$, $(x, y) \in \chi_1 \cap \chi_2 \cap \chi_3$ se, e somente se, $(x, y) \in \leq$.

Desta forma, precisamos demonstrar que, dados $x, y \in V(G)$, tais que $x \neq y$, temos $x < y$ em G se, e somente se, $x < y$ em χ_1, χ_2 e χ_3 , i.e, x aponta para y na orientação transitiva de G se — $x \leq y$ — se, e somente se, x aponta para y nas três extensões totais χ_1, χ_2 e χ_3 de \leq descritas acima — $x \leq y$ em χ_1, χ_2 e χ_3 .

Com efeito, tomemos diferentes $x, y \in V(G)$ tais que $x < y$ em G . Pelo Teorema 17, isto ocorre, se, e somente se, alguns dos casos abaixo é verdadeiro.

Caso 1. Os vértices x e y são adjacentes e existem $i, j \in \{1, \dots, r\}$ com $i < j$ tais que $x = c_i$ e $y = c_j$.

Se $xy \in E(G)$ onde existem $i, j \in \{1, \dots, r\}$ com $i < j$ tais que $x = c_i$ e $y = c_j$, então, pela construção de χ_1, χ_2 e χ_3 , é de imediata verificação que $c_i < c_j$ em ambas extensões totais, i.e, $x < y$ em χ_1, χ_2 e χ_3 . Reciprocamente, tomemos diferentes $x', y' \in V(G)$ tais que $x' < y'$ em χ_1, χ_2 e χ_3 . Pela construção destas extensões totais, é satisfazível que $x' = c_i$ e $y' = c_j$, para $i < j$ em $\{1, \dots, r\}$.

Caso 2. Os vértices x e y são adjacentes em G onde existem $i' \in \{1, \dots, p\}$, $i \in$

$\{1, \dots, i'\}$ e $k \in \{1, \dots, t(i')\}$ tais que $x = c_i$ e $y = a_{i',k}$.

Se $xy \in E(G)$ onde existem $i' \in \{1, \dots, p\}$, $i \in \{1, \dots, i'\}$ e $k \in \{1, \dots, t(i')\}$ tais que $x = c_i$ e $y = a_{i',k}$, então pela construção de χ_1 , temos $c_{i'} < \alpha_{i',k}$, ou seja, $c_{i'} < a_{i',k}$. Como $i \in \{1, \dots, i'\}$, obtemos $c_i \leq c_{i'}$, e assim, pela transitividade de \leq , conclui-se que $c_i < a_{i',k}$. Já pela construção de χ_2 , temos $c_r < \overline{\alpha_{i',k}}$, ou seja, $c_r < a_{i',k}$. Como $i \in \{1, \dots, i'\}$, $i' \in \{1, \dots, p\}$ e $C_B \subset C$, obtemos $c_i \leq c_p < c_r$, e assim, pela transitividade de \leq , conclui-se que $c_i < a_{i',k}$. E, finalmente, pela construção de χ_3 , temos $c_p < \alpha_{i',k}$, ou seja, $c_p < a_{i',k}$. Como $i \in \{1, \dots, i'\}$ e $i' \in \{1, \dots, p\}$, obtemos $c_i \leq c_p$, e assim, pela transitividade de \leq , conclui-se que $c_i < a_{i',k}$. Logo, $x = c_i < a_{i',k} = y$ em ambas as extensões totais χ_1 , χ_2 e χ_3 . Reciprocamente, tomemos diferentes $x', y' \in V(G)$ tais que $x' < y'$ em χ_1 , χ_2 e χ_3 . Pela construção destas extensões totais, utilizando um raciocínio igual ao demonstrado acima, é satisfazível que $x' = c_i$ e $y' = a_{i',k}$, para alguns $i' \in \{1, \dots, p\}$, $i \in \{1, \dots, i'\}$ e $k \in \{1, \dots, t(i')\}$.

Caso 3. Os vértices x e y são adjacentes em G onde existem $i' \in \{1, \dots, p\}$, $i \in \{1, \dots, i'\}$, $k \in \{1, \dots, w(i, j)\}$ e $j \in \{q, \dots, r\}$ tais que $x = c_i$ e $y = m_{i',j,k}$.

Se $xy \in E(G)$ onde existem $i' \in \{1, \dots, p\}$, $i \in \{1, \dots, i'\}$, $k \in \{1, \dots, w(i, j)\}$ e $j \in \{q, \dots, r\}$ tais que $x = c_i$ e $y = m_{i',j,k}$, então pela construção de χ_1 , temos $c_{i'} < \omega_{i',j,k}$, ou seja, $c_{i'} < m_{i',j,k}$. Como $i \in \{1, \dots, i'\}$, obtemos $c_i \leq c_{i'}$, e assim, pela transitividade de \leq , conclui-se que $c_i < m_{i',j,k}$. Já pela construção de χ_2 , temos $c_p < \overline{\omega_{i',j,k}}$, ou seja, $c_p < m_{i',j,k}$. Como $i \in \{1, \dots, i'\}$ e $i' \in \{1, \dots, p\}$, obtemos $c_i \leq c_p$, e assim, pela transitividade de \leq , conclui-se que $c_i < m_{i',j,k}$. E, finalmente, pela construção de χ_3 , temos $c_p < \overline{\omega_{i',j,k}}$, ou seja, $c_p < m_{i',j,k}$. Como $i \in \{1, \dots, i'\}$ e $i' \in \{1, \dots, p\}$, obtemos $c_i \leq c_p$, e assim, pela transitividade de \leq , conclui-se que $c_i < m_{i',j,k}$. Logo, $x = c_i < m_{i',j,k} = y$ em ambas as extensões totais χ_1 , χ_2 e χ_3 . Reciprocamente, tomemos diferentes $x', y' \in V(G)$ tais que $x' < y'$ em χ_1 , χ_2 e χ_3 . Pela construção destas extensões totais, utilizando um raciocínio igual ao demonstrado acima, é satisfazível que $x' = c_i$ e $y' = m_{i',j,k}$, para alguns $i' \in \{1, \dots, p\}$, $i \in \{1, \dots, i'\}$, $k \in \{1, \dots, w(i, j)\}$ e $j \in \{q, \dots, r\}$.

Caso 4. Os vértices x e y são adjacentes em G onde existem $j \in \{q, \dots, r\}$, $j' \in \{q, \dots, j\}$ e $k \in \{1, \dots, s(j')\}$ tais que $x = z_{j',k}$ e $y = c_j$.

Se $xy \in E(G)$ onde existem $j \in \{q, \dots, r\}$, $j' \in \{q, \dots, j\}$ e $k \in \{1, \dots, s(j')\}$ tais que $x = z_{j',k}$ e $y = c_j$, então pela construção de χ_1 , temos $\zeta_{j',k} < c_{j'}$, ou seja, $z_{j',k} < c_{j'}$. Como $j' \in \{q, \dots, j\}$, obtemos $c_{j'} \leq c_j$, e assim, pela transitividade de \leq , conclui-se que $z_{j',k} < c_j$. Já pela construção de χ_2 , temos $\overline{\zeta_{j',k}} < c_1$, ou seja, $z_{j',k} < c_1$. Como $j \in \{q, \dots, r\}$, obtemos $c_1 < c_j$, e assim, pela transitividade de \leq ,

conclui-se que $z_{j',k} < c_j$. E, finalmente, pela construção de χ_3 , temos $\overline{\zeta_{j',k}} < c_q$, ou seja, $z_{j',k} < c_q$. Como $j' \in \{q, \dots, j\}$ e $j \in \{q, \dots, r\}$, obtemos $c_q \leq c_{j'} \leq c_j$, e assim, pela transitividade de \leq , conclui-se que $z_{j',k} < c_j$. Logo, $x = z_{j',k} < c_j = y$ em χ_1 , χ_2 e χ_3 . Reciprocamente, tomemos diferentes $x', y' \in V(G)$ tais que $x' < y'$ em χ_1 , χ_2 e χ_3 . Pela construção destas extensões totais, utilizando um raciocínio igual ao demonstrado acima, é satisfazível que $x' = z_{j',k}$ e $y' = c_j$, para alguns $j \in \{q, \dots, r\}$, $j' \in \{q, \dots, j\}$ e $k \in \{1, \dots, s(j')\}$.

Caso 5. Os vértices x e y são adjacentes em G onde existem $i \in \{1, \dots, p\}$, $j \in \{q, \dots, r\}$, $j' \in \{q, \dots, j\}$ e $k \in \{1, \dots, \omega(i, j')\}$ tais que $x = m_{i,j',k}$ e $y = c_j$.

Se $xy \in E(G)$ onde existem $i \in \{1, \dots, p\}$, $j \in \{q, \dots, r\}$, $j' \in \{q, \dots, j\}$ e $k \in \{1, \dots, \omega(i, j')\}$ tais que $x = m_{i,j',k}$ e $y = c_j$, então pela construção de χ_1 , temos $\omega_{i_c, j, k} < c_{i+1}$, ou seja, $m_{i,j',k} < c_{i+1}$. Como $i \in \{1, \dots, p\}$ e $j \in \{q, \dots, r\}$, obtemos $c_{i+1} \leq c_q \leq c_j$, e assim, pela transitividade de \leq , conclui-se que $m_{i,j',k} < c_j$. Já pela construção de χ_2 , temos $\overline{\omega_{i_c, j', k}} < c_{j'}$, ou seja, $m_{i,j',k} < c_{j'}$. Como $j' \in \{q, \dots, j\}$, obtemos que $c_{j'} \leq c_j$, e assim, pela transitividade de \leq , conclui-se que $m_{i,j',k} < c_j$. E, finalmente, pela construção de χ_3 , temos $\overline{\omega_{i_c, j', k}} < c_q$, ou seja, $m_{i,j',k} < c_q$. Como $j \in \{q, \dots, r\}$, obtemos que $c_q \leq c_j$, e assim, pela transitividade de \leq , conclui-se que $m_{i,j',k} < c_j$. Logo, $x = m_{i,j',k} < c_j = y$ em ambas as extensões χ_1 , χ_2 e χ_3 . Reciprocamente, tomemos diferentes $x', y' \in V(G)$ tais que $x' < y'$ em χ_1 , χ_2 e χ_3 . Pela construção destas extensões totais, utilizando um raciocínio igual ao demonstrado acima, é satisfazível que $x' = m_{i,j',k}$ e $y' = c_j$, para alguns $i \in \{1, \dots, p\}$, $j \in \{q, \dots, r\}$, $j' \in \{q, \dots, j\}$ e $k \in \{1, \dots, \omega(i, j')\}$.

Depois desta análise detalhada de casos, fica demonstrado que, para quaisquer x e y vértices distintos de G , $x \leq y$ em G se, e somente se, $x < y$ nas extensões totais χ_1, χ_2 e χ_3 de \leq .

Isto conclui a prova. ■

Capítulo 7

Conclusão

Neste capítulo, revisamos o trabalho desenvolvido, de modo a apresentar algumas questões, sugerindo direções para pesquisas futuras no assunto.

No Capítulo 1 introduzimos o tema abordado com algumas informações bibliográficas e descrevemos a estrutura do texto.

No Capítulo 2 revisamos conceitos e resultados fundamentais sobre os grafos cordais e os grafos de comparabilidade. Todos os conceitos e resultados revisados foram empregados no decorrer do texto.

No Capítulo 3 revisamos a definição e um resultado fundamental sobre os grafos cordais comparabilidade, a saber, sua caracterização por subgrafos induzidos proibidos.

No Capítulo 4, revisamos as definições de grafos e classes de interseção, bem como a importante caracterização das classes de interseção, devida a Scheinerman [41]. Aplicamos o resultado de Scheinerman para provar que a classe Comparabilidade é classe de interseção, apesar de não conhecermos um *modelo de interseção com boas propriedades combinatórias ou geométricas* para os grafos nesta classe. Nosso principal resultado é a prova de que os grafos cordais comparabilidade são os grafos de interseção de certas subárvores de um determinado tipo de árvore [5]. Por um lado, esta construção apresenta uma resposta para um problema proposto em [30] e, novamente, em [1]. Por outro, a resposta é apresentada por meio de um conjunto de condições e não por uma “definição direta” dos objetos combinatórios envolvidos.

Determinar um *modelo de interseção* — com boas propriedades combinatórias — para os grafos comparabilidade é um problema em aberto e uma sugestão para trabalhos futuros.

No Capítulo 5, contribuímos para o estudo da classe cordal comparabilidade demonstrando que, para todo $n \geq 3$, existe um grafo cordal comparabilidade RS_n

cuja árvore característica é única e isomorfa a $K_{1,n}$ [4].

Caracterizar as árvores características dos grafos cordais comparabilidade é um problema em aberto e uma sugestão para trabalhos futuros.

No Capítulo 6, revisamos as definições e conceitos básicos relativos à dimensão de ordens parciais e grafos de comparabilidade. Apresentamos uma prova detalhada do limite superior igual a 4 para a dimensão dos grafos cordais comparabilidade, devida a Ma e Spinrad [30], bem como a construção de um grafo que mostra que este limite é justo, devida a Kierstead, Totter e Qin [28]. Aqui, demonstramos que, para todo $n \geq 3$, a dimensão do grafo RS_n é igual a 3. Isto nos motivou a demonstrar que a dimensão dos grafos split que são de comparabilidade é menor ou igual a 3.

O único grafo cordal comparabilidade conhecido que possui dimensão igual a 4, é tal que $|V(G)|$ é da ordem de $2 \cdot 27 \cdot (27^{27} + 1)$ vértices. Construir exemplos de grafos cordais comparabilidade de dimensão 4 com um número menor de vértices é um problema em aberto e uma sugestão para trabalhos futuros.

Referências Bibliográficas

- [1] BORIE, R.B., SPINRAD, J.P., “Construction of a simple elimination scheme for a chordal comparability graph in linear time”, *Discrete Applied Mathematics*, v. 91, pp. 287–292, Maio, 1999.
- [2] BRANSTÄDT, A., Le, V.B, SPINRAD, J.P, **Graph Classes: a Survey**, Philadelphia, SIAM, 2004.
- [3] BUNEMAN, P., “A characterization of rigid circuit graphs”, *Discrete Mathematics*, v. 9, pp. 205–212, Setembro, 1974.
- [4] CERIOLI, M.R., SOUTO, R.F., VIANA, P., “As árvores características dos grafos cordais comparabilidade não possuem grau limitado”, Em: FERNANDES, C.G., CAMPÊLO NETO, M.B., DOS SANTOS V.F. (Eds.), *Anais do VIII Encontro de Teoria da Computação (ETC 2023)*, pp. 60–63, SBC, 2023.
- [5] CERIOLI, M.R., SOUTO, R.F., VIANA, P., “Os grafos cordais comparabilidade como grafos de interseção”, Em: LINTZMAYER, C.L., CAMPÊLO NETO, M.B., DOS SANTOS V.F. (Eds.), *Anais do IX Encontro de Teoria da computação (ETC 2024)*, pp. 100–104, SBC, 2024.
- [6] DA COSTA, D.A.F., “O Problema da Coloração de Arestas e Coloração Total para grafos split 2-admissíveis”, COPPE-Sistemas, 2022
- [7] CRUZ, J.B. de S., “Coloração de Arestas em Grafos Split-Comparabilidade”, Universidade Federal de São Carlos, 2017.
- [8] DIRAC, G.A., “On rigid circuit graphs”, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, v. 25, pp. 71–76, 1961.
- [9] DUSHNIK, B., MILLER, E.W., “Partially Ordered Sets”, *American Journal of Mathematics*, v. 63, pp. 600–610, 1941.

- [10] FERRAZ, D.A., *O Problema da Coloração de Arestas e Coloração Total para Grafos Split 2-admissíveis*, Dissertação de M.Sc., 2022, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- [11] FOLDER, S., HAMMER, P.L., "Split graphs", *Proceedings of the 8th South-Eastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing*, Louisiana State University, 1977.
- [12] FULKERSON, D.R., GROSS, O.A., "Incidence matrices and interval graphs", *Pacific Journal of Mathematics*, v. 15, pp. 835–855, 1965.
- [13] GALLAI, T., "Transitiv Orientierbare Graphen", *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, v. 18, pp. 25–26, 1967.
- [14] GAVRIL, F., "The intersection graphs of subtrees in trees are exactly the chordal graphs", *Journal of Combinatory Theory B*, v. 16, pp. 47–56, 1974.
- [15] GHOUILA-HOURI, M.A., "Caractérisation des graphes non orientés dont on peut orienter les arêtes de manière à obtenir le graphe d'une relation d'ordre", *Comptes rendus de l'Académie des Sciences Paris*, v. 254, pp. 1370-1371, 1962.
- [16] GILMORE, P.C., HOFFMAN, A.J., "A characterization of comparability graphs and of interval graphs", *Canadian Journal of Mathematics*, v. 16, pp. 593–548, 1964.
- [17] GOLUBIC, M.C., **Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs**, Elsevier, 2004.
- [18] GOLUBIC, M.C., SCHEINERMAN, E.R., "Containment Graphs, Posets, and Related Classes of Graphs", *Annals of the New York Academy of Sciences*, v. 555, pp. 192–204, 1999.
- [19] GUNDERSON, D.S, **Finite Graph Ramsey Theory**, The University of Calgary, 1990.
- [20] GUNDERSON, D.S., RÖDL, V., SAUER, N.W., "Finite induced graph Ramsey theory: on partitions of subgraphs", *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, v. 59, pp. 199–209, 1993.
- [21] GONZAGA, L.G. da S., DE ALMEIDA, S.M., DA SILVA, C.N., CRUZ, J. B. de S., "Total coloring in Some Split-Comparability Graphs.", *Matemática Contemporânea*, v. 48, pp. 94–104, 2021.

- [22] GONZAGA, L.G. da S., CRUZ, J.B. de S., DE ALMEIDA, S.M., DA SILVA, C.N., "The Overfull Conjecture on split-comparability and split-interval graphs", *Discrete Applied Mathematics*, v. 340, pp. 228–238, 2023.
- [23] HAGNAL, A., SURÁNYI, J., "Über die Auflösung von Graphen in vollständige Teilgraphen", *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae. Sectio Mathematica*, v.1, pp. 113–121, 1958.
- [24] HAJÖS, G., "Über eine Art von Graphen", *Internationale Mathematische Nachrichten*, n. 11, Sondernummer 65, 1957.
- [25] HARZHEIM, E., **Ordered Sets**, Springer, 2005.
- [26] HSU, W.L., MA, T.H., "Substitution decomposition on chordal graphs and applications", Em: HSU, W.L., LEE, R.C.T. (Eds.), *ISA '91 Algorithms. ISA 1991. Lecture Notes in Computer Science*, v. 557, pp. 52–60, 1991.
- [27] HSU, W. L., MA, T. H., "Fast and simple algorithms for recognizing chordal comparability graphs and interval graphs", *SIAM Journal of Computing*, v.28, n.3, pp.1004–1020, 1998.
- [28] KIERSTEAD, H.A., TROTTER, W.T., QIN, J., "The dimension of cycle-free orders", *Kluwer Academic Publishers*, v. 9, pp.103–110, 1992.
- [29] LEKKERKERKER, C.G., BOLAND, J.Ch., "Representation of a finite graph by a set of intervals on the real line", *Fundamenta Mathematicae*, v. 51, pp. 45–64, 1962.
- [30] MA, T.H., SPINRAD, J., "Cycle-Free Partial Orders and Chordal Comparability Graphs", *Kluwer Academic Publishers*, v. 8, pp. 46–61, 1991.
- [31] MA, T.H, SPINRAD, J., "Avoiding matrix multiplication", Em: MÖHRING, R.H. (Ed.), *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science. WG 1990. Lecture Notes in Computer Science*, vol. 484, pp. 61–71, 1991.
- [32] McCONNELL, R. M, SPINRAD, J., "Linear-time modular decomposition and efficient transitive orientation of comparability graphs", *Fifth ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pp. 563–545, 1994.
- [33] McKEE, T. A., McMORRIS, F. R., **Topics in Intersection Graph Theory**, SIAM, 1999.

- [34] OHSUGI, H., HIBI, T., "A Gröbner basis characterization for chordal comparability graphs", *European Journal of Combinatorics*, v. 59. pp. 122–128, 2017.
- [35] ORTIZ, C., VILLANUEVA, M., "On split-comparability Graphs", *PROC. II ALIO-EURO Workshop on Practical Combinatorial Optimization*, Valparaiso, Chile, pp. 91–105, Chile, 1996.
- [36] ORTIZ, C., VILLANUEVA, M., "Difficult problems in treshold graphs", *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, v.18, pp. 187–192, 2004.
- [37] ORTIZ, C., VILLANUEVA, M., "Treshold dimension of split-permutation graphs", *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, v. 75, pp. 117–127, 2010.
- [38] PNUELI, A., LEMPEL, A., EVEN, S., "Transitive orientation of graphs and identification of pemutation graphs", *Canadian Journal of Mathematics*, v. 23, pp. 160–175, 1971.
- [39] ROSE, D. J., "Triangulated graphs and the elimination process", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 32, pp. 597–609, 1970.
- [40] ROSE, D.J., TARJAN, E., LEUKER, G.S., "Algorithmic aspects of vertex elimination", *SIAM Journal on Computing*, v. 5, pp.2 66–283, 1976.
- [41] SCHEINERMAN, E.R., "Characterizing intersection class of graphs", *Discrete Mathematics*, v. 55, pp. 185–193, 1985.
- [42] SCHRÖDER, B.S.W., **Ordered Sets**, Birkhauser, 2003.
- [43] DE RIDDER, H.N. et al. Information System on Graph Classes and their Inclusions (ISGCI). <https://www.graphclasses.org>, 2001-2014.
- [44] TROTTER, W.T., **Combinatorics and Partially Ordered Sets – Dimension Theory**, Johns Hopkins University Press, 1992.
- [45] TROTTER, W.T., MOORE, J.I., SUMNER, D.P., "The dimension of a comparability graph", *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 60, pp. 35-38, Outubro, 1976.
- [46] WALTER, J.R., **Representation of rigid cycle graphs**, Ph.D. thesis, Wayne State University, 1972.

- [47] WOLK, E. S., “A note on ‘The comparability graph of a tree’”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 16, pp.17–20, Fevereiro, 1965.