



## SOBRE O PROBLEMA DE EMPILHAMENTO EM GRAFOS REGULARES

Matheus Nunes Adauto

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientadores: Celina Miraglia Herrera de  
Figueiredo  
Diana Sasaki Nobrega  
Glenn Hurlbert

Rio de Janeiro  
Fevereiro de 2025

SOBRE O PROBLEMA DE EMPILHAMENTO EM GRAFOS REGULARES

Matheus Nunes Adauto

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Orientadores: Celina Miraglia Herrera de Figueiredo  
Diana Sasaki Nobrega  
Glenn Hurlbert

Aprovada por: Prof. Celina Miraglia Herrera de Figueiredo  
Prof. Diana Sasaki Nobrega  
Prof. Glenn Hurlbert  
Prof. Julliano Rosa Nascimento  
Prof. Simone Dantas de Souza  
Prof. Sulamita Klein

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL  
FEVEREIRO DE 2025

Adauto, Matheus Nunes

Sobre o Problema de Empilhamento em Grafos Regulares/Matheus Nunes Adauto. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2025.

X, 54 p.: il.; 29, 7cm.

Orientadores: Celina Miraglia Herrera de Figueiredo

Diana Sasaki Nobrega

Glenn Hurlbert

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2025.

Referências Bibliográficas: p. 25 – 26.

1. Empilhamento. 2. Kneser. 3. Snarks. I. Figueiredo, Celina Miraglia Herrera de *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

*“Never forget what you are. The  
rest of the world will not. Wear  
it like armor, and it can never be  
used to hurt you.”  
Tyrion Lannister*

# Agradecimentos

Agradeço ao PESC por me dar todas as condições para uma boa pesquisa.

À CAPES, pelo fundamental apoio financeiro através da bolsa de doutorado e da bolsa CAPES PrInt.

Aos projetos da FAPERJ e ao Programa de Excelência Acadêmica (Proex) Capes do PESC que possibilitaram as minhas participações em eventos nacionais e internacionais.

Aos membros da banca por aceitarem avaliar este trabalho.

À Celina, por fazer de mim um pesquisador melhor.

À Diana, por fazer de mim um acadêmico melhor.

Ao Glenn, por fazer de mim um matemático melhor.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

## SOBRE O PROBLEMA DE EMPILHAMENTO EM GRAFOS REGULARES

Matheus Nunes Adauto

Fevereiro/2025

Orientadores: Celina Miraglia Herrera de Figueiredo  
Diana Sasaki Nobrega  
Glenn Hurlbert

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

O problema de empilhamento em grafos é um jogo que se desenvolve em grafos, onde as pedras são distribuídas sobre seus vértices. Em cada passo de empilhamento, duas pedras são removidas de um vértice e uma pedra é colocada em um vértice adjacente. O número de empilhamento de um grafo é definido como o menor valor de  $t$  tal que, a partir de qualquer configuração inicial com  $t$  pedras, é possível, após uma sequência de passos de empilhamento, posicionar uma pedra em qualquer vértice-alvo especificado. Nesta tese, são explorados os resultados previamente conhecidos na literatura sobre o problema de empilhamento em grafos regulares, além de serem apresentados novos resultados relacionados a grafos de Kneser e snarks.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

## ON THE PEBBLING PROBLEM OF REGULAR GRAPHS

Matheus Nunes Aداuto

February/2025

Advisors: Celina Miraglia Herrera de Figueiredo  
Diana Sasaki Nobrega  
Glenn Hurlbert

Department: Systems Engineering and Computer Science

The graph pebbling problem is a game played on graphs, where pebbles are distributed on their vertices. In each pebbling step, two pebbles are removed from one vertex, and one pebble is placed on an adjacent vertex. The pebbling number of a graph is defined as the smallest value of  $t$  such that, from any initial configuration with  $t$  pebbles, it is possible, after a sequence of pebbling steps, to place a pebble on any specified target vertex. In this thesis, previously known results in the literature regarding the pebbling problem on regular graphs are explored, and new results related to Kneser graphs and snarks are presented.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>x</b>
<b>1 Introdução à Teoria dos Grafos</b>	<b>1</b>
1.1 O Problema Histórico . . . . .	2
1.2 Definições . . . . .	3
1.3 Complexidade de Algoritmos . . . . .	8
<b>2 O Problema de Empilhamento em Grafos</b>	<b>10</b>
2.1 Origem do Problema . . . . .	10
2.2 Definições e Resultados . . . . .	11
<b>3 Empilhamento em Grafos Regulares</b>	<b>15</b>
3.1 Resultados Conhecidos . . . . .	15
3.2 Principais Técnicas utilizadas . . . . .	19
3.3 Grafos de Kneser . . . . .	21
3.4 Grafos snarks . . . . .	22
<b>4 Conclusões</b>	<b>24</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>25</b>
<b>A Manuscrito: Pebbling in Kneser Graphs</b>	<b>27</b>
<b>B Manuscrito: On the pebbling numbers of Flower, Blanuša and Watkins snarks</b>	<b>43</b>



# Lista de Figuras

1.1	Estados brasileiros e as fronteiras entre eles representados em um grafo.	2
1.2	O problema das pontes de Königsberg: a) sete pontes de Königsberg; e b) sua representação por um grafo. . . . .	3
1.3	Um grafo com $\delta(G) = 1$ e $\Delta(G) = 3$ . . . . .	4
1.4	Um grafo e um de seus subgrafos, respectivamente. . . . .	4
1.5	Os grafos $P_3$ e $P_5$ , respectivamente. . . . .	5
1.6	Um grafo conexo $G_1$ e um grafo desconexo $G_2$ , respectivamente. . . .	6
1.7	Um grafo 2-regular e um grafo 3-regular, respectivamente. . . . .	6
1.8	O grafo de Petersen. . . . .	6
1.9	Os grafos completos $K_3$ e $K_4$ , respectivamente. . . . .	7
1.10	Os potências de ciclo $C_6^2$ e $C_6^2$ , respectivamente. . . . .	7
1.11	Os grafos ciclo $C_4$ e $C_5$ , respectivamente. . . . .	7
1.12	Os hipercubos $Q_2$ e $Q_3$ , respectivamente. . . . .	8
2.1	A execução de um passo de empilhamento, onde o vértice-alvo $r$ é destacado. . . . .	11
2.2	Uma configuração $r$ -não solucionável e uma $r$ -solucionável, respectivamente. . . . .	12
3.1	O grafo de Kneser $K(5, 2)$ , também conhecido como grafo de Petersen e por ser o menor snark. . . . .	21

# Lista de Tabelas

3.1	Cotas superiores e inferiores obtidas em [2]. . . . .	23
-----	---	----

# Capítulo 1

## Introdução à Teoria dos Grafos

Muitos problemas do mundo real podem ser elegantemente modelados usando grafos, que são estruturas matemáticas compostas por vértices (pontos) representando entidades e arestas (linhas) conectando esses vértices. Essa poderosa abstração permite representar diversos fenômenos de maneira concisa e visual. Por exemplo, considere um grafo onde vértices representam os estados brasileiros, veja a Figura 1.1, onde estados vizinhos possuem uma aresta entre eles <sup>1</sup>. Essa simples representação imediatamente sugere uma série de questões interessantes.

Qual é a rota mais curta para viajar entre duas cidades que não são diretamente conectadas por uma estrada? Esse problema clássico, conhecido como problema do caminho mais curto, possui implicações práticas significativas em áreas como transporte e logística. Determinar o caminho mais curto pode otimizar rotas para veículos de entrega, minimizar o tempo de viagem para os passageiros e até mesmo auxiliar em esforços de socorro em desastres.

No entanto, o conceito de mais curto pode ser multifacetado. Embora o caminho mais curto em termos de distância possa ser facilmente aparente, ele pode não ser necessariamente a rota mais rápida ou mais econômica. Congestionamentos de trânsito, fechamentos de estradas e limites de velocidade variáveis podem impactar significativamente o tempo de viagem. Além disso, pedágios, custos de combustível e outros fatores devem ser considerados ao determinar a rota mais econômica.

Esse simples exemplo demonstra a versatilidade da teoria dos grafos. Ao abstrair cenários do mundo real em modelos matemáticos, podemos analisar problemas complexos, identificar padrões e tomar decisões informadas. A teoria dos grafos encontra aplicações em uma ampla gama de campos, principalmente na matemática, física, e ciência da computação.

Em essência, a teoria dos grafos fornece uma estrutura poderosa para entender e resolver uma ampla variedade de desafios do mundo real. Ao explorar as propri-

---

<sup>1</sup>Figura retirada do texto “Uma Introdução Sucinta à Teoria dos Grafos”, escrito pelos professores Feofiloff, Kohayakawa e Wakabayashi, da Universidade de São Paulo.

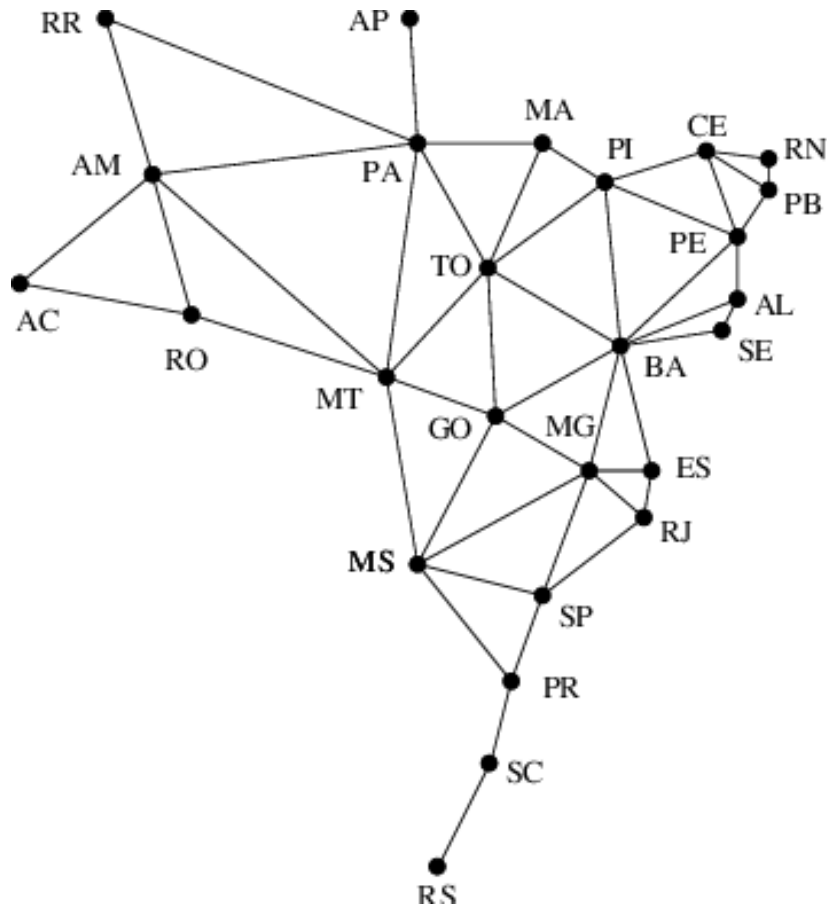


Figura 1.1: Estados brasileiros e as fronteiras entre eles representados em um grafo.

idades dos grafos, podemos obter entendimentos valiosos sobre a interconexão de sistemas e desenvolver soluções inovadoras para problemas complexos.

Este texto está estruturado em quatro capítulos. O primeiro capítulo apresenta as definições fundamentais e os principais resultados de teoria dos grafos que servirão como base teórica para o desenvolvimento desta tese. O segundo capítulo aborda as definições relevantes ao problema de empilhamento em grafos, além de destacar os principais resultados já conhecidos sobre o tema. No terceiro capítulo, são explorados os resultados existentes para o problema de empilhamento em grafos regulares encontrados na literatura, bem como os novos resultados obtidos no decorrer do desenvolvimento desta tese. Por fim, o quarto capítulo faz um balanço geral dos resultados alcançados durante o doutorado e discute possíveis direções para pesquisas futuras.

## 1.1 O Problema Histórico

Escrever qualquer trabalho sobre grafos sem mencionar o seguinte problema é uma omissão imperdoável. Assim, tentaremos descrevê-lo da maneira mais didática pos-

sível, utilizando apenas noções intuitivas, uma vez que ainda não apresentamos definições formais.

Leonhard Euler, um matemático suíço, resolveu o problema intitulado “Problema das Pontes de Königsberg” [6] em 1736, que consistia no seguinte: Havia um rio que atravessava Königsberg, a cidade prussiana, e a dividia em quatro partes<sup>2</sup>. Para conectá-las, havia sete pontes. É possível ir de uma margem do rio para a outra fazendo um caminho fechado que passe apenas uma vez em cada uma das sete pontes? Euler resolveu o problema modelando a região para facilitar a visualização. Ele transformou as pontes em arestas e margens do rio em vértices. Esse foi o primeiro diagrama a representar um grafo na história. Então, o matemático percebeu que para passar por qualquer vértice, duas arestas são percorridas, uma para entrar no vértice e outra para sair. Portanto, cada vértice deve ter um número par de arestas incidentes a ele. O grafo das pontes de Königsberg possui, por exemplo, veja a Figura 1.2, o vértice  $D$  cujo número de arestas incidentes ao vértice é ímpar. Portanto, o problema não tem solução.

Esse problema é tão relevante para a história da matemática que marca o início de dois ramos da matemática moderna: Teoria dos Grafos e Topologia.

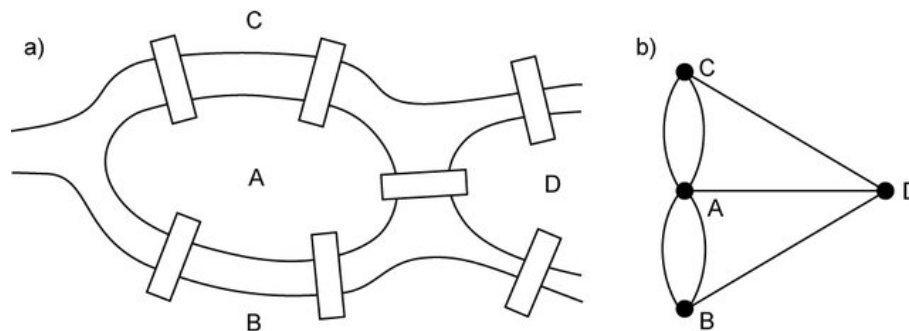


Figura 1.2: O problema das pontes de Königsberg: a) sete pontes de Königsberg; e b) sua representação por um grafo.

## 1.2 Definições

Nesta seção, apresentamos as definições fundamentais da teoria dos grafos que serão empregadas ao longo deste trabalho. Com o intuito de garantir a rigorosidade e a clareza da exposição, as definições aqui apresentadas foram embasadas em obras de referência consolidadas na área, tais como [3], [20] e [23]. A compreensão sólida desses conceitos é essencial para o desenvolvimento e a análise dos modelos propostos nos capítulos e seções subsequentes.

<sup>2</sup>Figura retirada da tese de doutorado de Pawel Boguslawski.

Um *grafo*  $G = (V(G), E(G))$  é um par ordenado, onde  $V(G)$  é um conjunto finito e não vazio de *vértices* e  $E(G)$  é um conjunto de *arestas*, disjunto de  $V(G)$ , formado por pares não ordenados de elementos distintos de  $V(G)$ , isto é, para cada aresta  $e \in E(G)$  existem  $u$  e  $v \in V(G)$  tais que  $e = \{u, v\}$ , ou simplesmente  $e = uv$ .

O número de vértices de um grafo é representado por  $|V(G)| = n$ . Se  $uv \in E$ , dizemos que  $u$  e  $v$  são vértices *adjacentes* ou que  $u$  é *vizinho* de  $v$ , e que a aresta  $e$  é *incidente* a ambos  $u$  e  $v$ , e  $u$  e  $v$  são chamados de *extremos* de  $e$ . Duas arestas que possuem o mesmo extremo são chamadas de *arestas adjacentes*. O conjunto  $N(v)$  é formado pelos vizinhos de  $v$  e é dito *vizinhança* de  $v$ .

Um grafo<sup>3</sup> é dito *simples* se não possui laços ou mais de uma aresta conectando dois vértices. Um *laço* é uma aresta que conecta um vértice a si mesmo. O *grau* de um vértice  $v$  em  $G$ , representado por  $d(v)$ , é o número de arestas incidentes a  $v$ . Denotamos por  $\delta(G)$  e  $\Delta(G)$  os graus mínimo e máximo, respectivamente, dos vértices do grafo  $G$ . Veja a Figura 1.3. Sempre que não houver ambiguidade, denotaremos o grau mínimo e máximo de um grafo como  $\delta$  e  $\Delta$ .

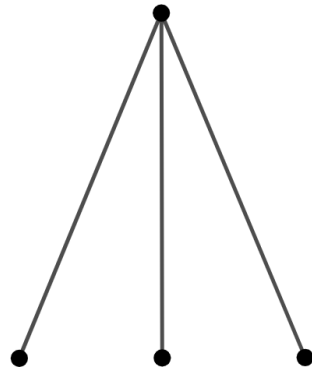


Figura 1.3: Um grafo com  $\delta(G) = 1$  e  $\Delta(G) = 3$ .

Um grafo  $H$  é dito *subgrafo* de  $G$ , denotado por  $H \subseteq G$ , se  $V(H) \subseteq V(G)$  e  $E(H) \subseteq E(G)$ . Veja a Figura 1.4.

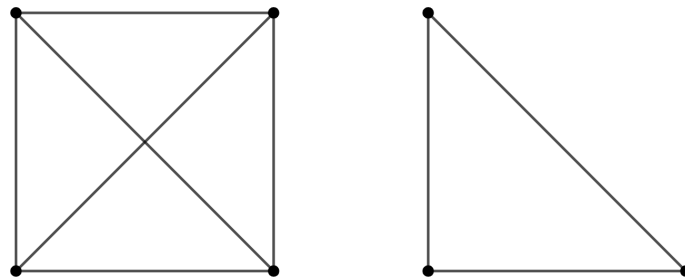


Figura 1.4: Um grafo e um de seus subgrafos, respectivamente.

Um *automorfismo* de um grafo  $G = (V, E)$  é uma bijeção  $f : V \rightarrow V$  tal que:

---

<sup>3</sup>Todos os grafos ao longo do texto serão considerados simples.

$$\{u, v\} \in E \text{ se, e somente se, } \{f(u), f(v)\} \in E$$

para todos os vértices  $u, v$  em  $V$ . Em outras palavras, um automorfismo é uma permutação dos vértices de  $G$  que preserva a estrutura das arestas do grafo. Ele mapeia o grafo em si mesmo, mostrando as simetrias internas do grafo. Dois vértices podem ser equivalentes sob um automorfismo, o que significa que existe um automorfismo do grafo que mapeia um vértice no outro. Um grafo é dito *vértice-transitivo* se, para quaisquer dois vértices  $u$  e  $v$  no grafo, existe um automorfismo que mapeia  $u$  em  $v$ .

Seja  $G = (V, E)$  um grafo. Uma sequência de vértices  $X = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ , onde  $v_i \in V$  e  $v_i v_{i+1} \in E$ , é dita *passeio* em  $G$ . Usaremos também a notação simplificada  $X = v_1 v_2 \dots v_k$ . Algumas definições relacionadas:

1. O valor  $k$  é a cardinalidade do passeio  $X$ .
2. Se um passeio  $X$  não repete arestas, então  $X$  é dito uma *trilha*.
3. Se em um passeio  $X = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ , temos  $v_0 = v_k$ , então  $X$  é *fechado*.
4. Se  $X$  é uma trilha que não repete vértices, então  $X$  é um *caminho*.
5. Um *ciclo* é um trilha fechada com uma única repetição de vértices e com pelo menos três vértices distintos.
6. Um grafo  $G = (V, E)$  é dito *acíclico* se  $G$  não possui ciclos.

Um grafo *caminho*, denotado por  $P_n$ , com  $n$  vértices é uma sequência de vértices  $v_1, v_2, \dots, v_n$  tal que há uma aresta entre  $v_i$  e  $v_{i+1}$  para  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ . Veja a Figura 1.5.

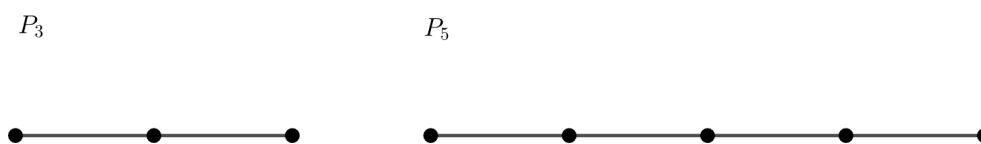


Figura 1.5: Os grafos  $P_3$  e  $P_5$ , respectivamente.

Um grafo  $G$  é dito *conexo*<sup>4</sup> se existir um caminho entre qualquer par de vértices. Caso contrário, ele é dito *desconexo*. Veja a Figura 1.6.

Um grafo  $G$  é *k-conexo* se ele contiver pelo menos  $k + 1$  vértices, mas não contiver um conjunto de  $k - 1$  vértices cuja remoção desconecte o grafo, e a *conectividade*  $\kappa(G)$  é o maior  $k$  tal que  $G$  é *k-conexo*.

Em um grafo conexo, a *distância* entre os dois vértices  $u, v \in V$ , denotada por  $dist(u, v)$ , é o comprimento do menor caminho (isto é, o número mínimo de arestas)

<sup>4</sup>Todos os grafos ao longo do texto serão considerados conexos.

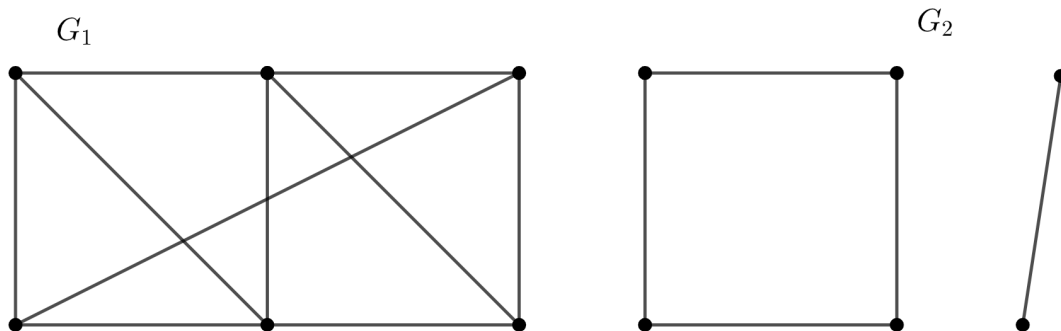


Figura 1.6: Um grafo conexo  $G_1$  e um grafo desconexo  $G_2$ , respectivamente.

que conecta  $u$  a  $v$ . O *diâmetro* de um grafo é o comprimento do menor caminho entre os vértices mais distantes. O diâmetro de um grafo é denotado por  $D(G)$ .

Um grafo  $G$  é dito *regular* de grau  $r$ , ou  $r$ -regular se todos os seus vértices possuírem o mesmo grau  $r$ . Em um grafo regular  $G$ , temos  $\delta(G) = \Delta(G)$ , o que destacamos através da notação  $\deg(G)$ . Veja a Figura 1.7.

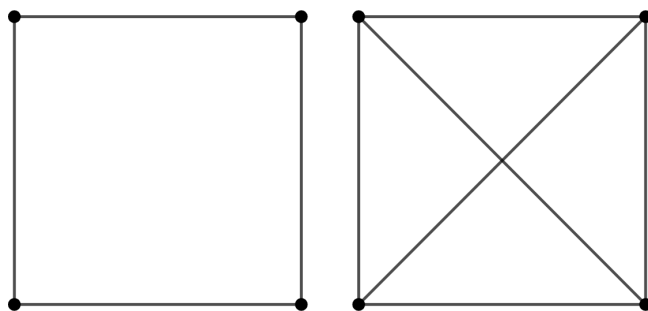


Figura 1.7: Um grafo 2-regular e um grafo 3-regular, respectivamente.

Um grafo 3-regular é dito grafo *cúbico*. O grafo de Petersen [17] é o grafo cúbico mais famoso, sendo estudado em diversos problemas. Veja a Figura 1.8.

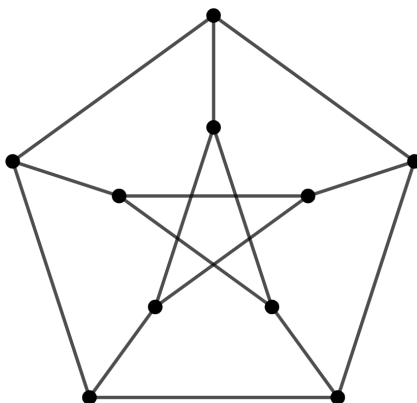


Figura 1.8: O grafo de Petersen.

Um grafo é dito *completo*, denotado por  $K_n$ , quando cada par distinto de vértices está conectado por exatamente uma aresta. Veja a Figura 1.9.



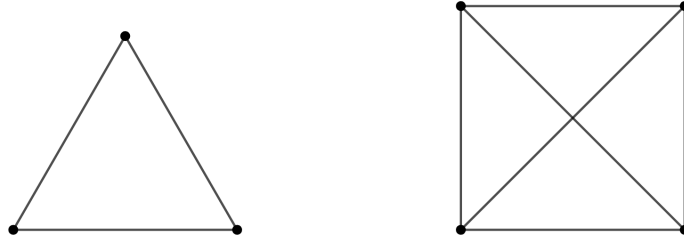


Figura 1.9: Os grafos completos  $K_3$  e  $K_4$ , respectivamente.

O grafo *ciclo*, denotado por  $C_n$ , é um grafo que contém um único ciclo passando por todos os seus vértices. Veja a Figura 1.11.

Um grafo potência de ciclo, denotado por  $C_n^k$ , é um grafo obtido de um ciclo  $C_n$ , onde se adiciona arestas entre todos os vértices à distância de no máximo  $k$ . Veja a Figura 1.10.

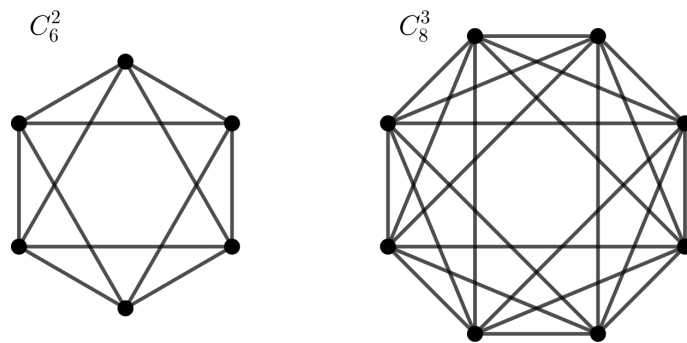


Figura 1.10: Os potências de ciclo  $C_6^2$  e  $C_8^3$ , respectivamente.

A *cintura* de um grafo é definida como o comprimento do menor ciclo do grafo. Uma *árvore* é um grafo conexo que não contém ciclos. Veja a Figura 1.3.

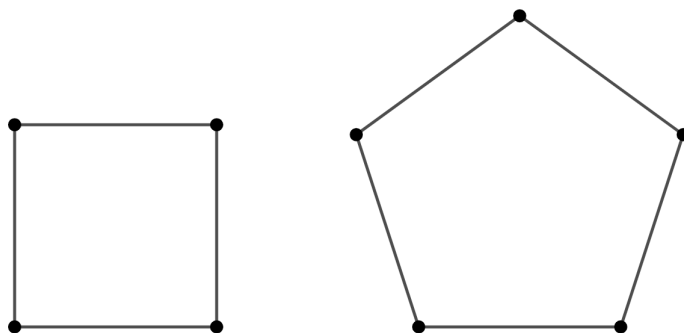


Figura 1.11: Os grafos ciclo  $C_4$  e  $C_5$ , respectivamente.

Um *hipercubo* de dimensão  $n$ , denotado por  $Q_n$ , é um grafo cujos vértices correspondem a todas as sequências binárias de comprimento  $n$ . Dois vértices estão conectados por uma aresta se e somente se diferem em exatamente um bit. Note que um hipercubo  $Q_n$  possui  $2^n$  vértices. Veja a Figura 1.12.

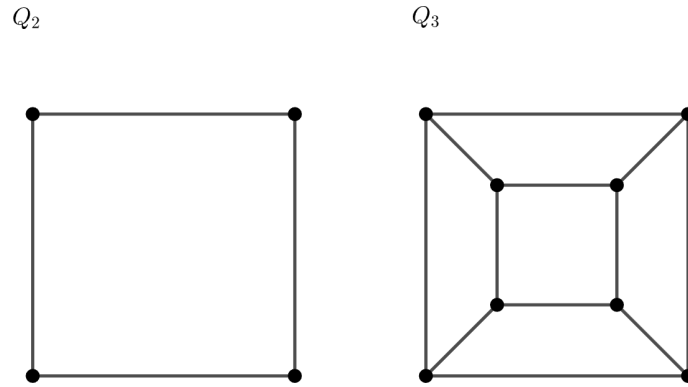


Figura 1.12: Os hipercubos  $Q_2$  e  $Q_3$ , respectivamente.

### 1.3 Complexidade de Algoritmos

A complexidade de algoritmos é um campo da ciência da computação que estuda a eficiência dos algoritmos em termos de tempo de execução e uso de recursos, como memória. O objetivo é avaliar como o desempenho de um algoritmo escala com o tamanho de sua entrada. Essa análise é fundamental para projetar sistemas eficientes e escolher algoritmos apropriados para problemas específicos. Nesta seção, discutiremos o tema brevemente, definindo apenas o que for necessário para o entendimento do que é um problema **NP**-completo.

Um algoritmo  $A$  é dito *eficiente* se sua complexidade for um polinômio no tamanho de sua entrada. Um problema é dito *tratável* se existe algoritmo eficiente que o resolva, e é dito *intratável* caso contrário. Para provar que um problema  $\Pi$  é tratável, basta mostrar um algoritmo eficiente que o resolva. Entretanto,  $\Pi$  é intratável se todo algoritmo que o resolve for ineficiente.

Dizemos que um problema de decisão  $\Pi \in \mathbf{P}$ , quando existe algoritmo polinomial que o resolva. Um certificado para um problema  $\Pi$  é uma justificativa para a resposta SIM. Um co-certificado para um problema  $\Pi$  é uma justificativa para a resposta NÃO. Um problema de decisão  $\Pi \in \mathbf{NP}$ , quando existe um certificado que possa ser reconhecido por um algoritmo polinomial.

**Fato 1.** Temos que  $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP}$ .

Uma *redução* é uma função  $f$  que mapeia instâncias de um problema  $\Pi_1$  em instâncias de um problema  $\Pi_2$  tal que:

1.  $\Pi_1(I) = \text{SIM} \iff \Pi_2(f(I)) = \text{SIM}$ ;
2.  $f$  pode ser computada em tempo polinomial.

A notação utilizada para redução é  $\Pi_1 \propto \Pi_2$ .

Um problema é dito **NP**-difícil se  $\Pi' \propto \Pi$ , para todo  $\Pi' \in \mathbf{NP}$ . Um problema é dito **NP**-completo se:

1.  $\Pi \in \mathbf{NP}$ ;
2.  $\Pi$  é  $\mathbf{NP}$ -difícil.

# Capítulo 2

## O Problema de Empilhamento em Grafos

O problema de empilhamento em grafos explora como recursos podem ser distribuídos e movidos estrategicamente dentro da estrutura de um grafo. A idéia central gira em torno da movimentação de pedras entre os vértices de um grafo, seguindo uma regra específica de movimentação. A intuição por trás do empilhamento pode ser entendida como um jogo ou desafio: dado um grafo com pedrinhas distribuídas em seus vértices, é possível mover pelo menos uma pedrinha para um vértice-alvo, independentemente de sua localização inicial? Esse tipo de questão leva a diversas explorações matemáticas, envolvendo não apenas o comportamento local das movimentações, mas também as propriedades globais do grafo.

O estudo do problema de empilhamento em grafos tem atraído atenção não apenas pela elegância intrínseca de seus problemas, mas também por suas aplicações em áreas como distribuição de recursos, redes de comunicação e algoritmos. Ele é particularmente útil em cenários onde é importante garantir que um recurso limitado possa ser deslocado de forma eficiente para atender a demandas específicas.

### 2.1 Origem do Problema

O problema de empilhamento em grafos, em inglês *graph pebbling*, foi originalmente introduzido por Lagarias e Saks como uma ferramenta para fornecer uma prova mais intuitiva para um teorema em teoria dos números [11], com o objetivo de simplificar e aprimorar a compreensão dos conceitos subjacentes.

**Teorema 1.** *Para qualquer conjunto  $N = \{n_1, \dots, n_q\}$  de  $q$  números naturais, existe um conjunto de índices não vazio  $I \subset \{1, \dots, q\}$  tal que  $q \mid \sum_{i \in I} n_i$  e  $\sum_{i \in I} \text{mdc}(q, n_i) \leq q$ .*

Sem a condição final, isso é uma aplicação direta do princípio da casa dos pombos.

As “casas” correspondem às classes de resíduos módulo  $q$ , e os “pombos” são as somas parciais  $a_i = n_1 + \dots + n_i$ . Se algum pombo cair na casa rotulada com 0 módulo  $q$ , terminamos. Caso contrário, pelo princípio da casa dos pombos, devem haver pelo menos dois pombos na mesma casa, digamos  $a_i$  e  $a_j$  com  $i < j$ . Neste caso, podemos considerar a diferença  $a_j - a_i$ , que é congruente a 0 módulo  $q$ , e também é a soma de elementos de  $N$ , especificamente  $a_{i+1} + \dots + a_j$ .

Quando introduzimos a condição de mdc, a afirmação se torna significativamente mais desafiadora de provar. Para estabelecer o resultado utilizando empilhamento em grafos, construímos um grafo e definimos um passo de empilhamento generalizado baseado na fatoração em números primos de  $q$ . As pedras, correspondendo a subconjuntos de  $N$ , são então colocadas nos vértices do grafo, com cada vértice representando o mdc do conjunto. Demonstra-se que encontrar uma configuração gananciosa de empilhamento para essa configuração é equivalente à conclusão do Teorema 1. Para mais detalhes, veja o artigo [7], e o artigo [8], onde é fornecida uma correção para a prova original.

## 2.2 Definições e Resultados

Finalmente, apresentamos as primeiras definições a respeito do problema de empilhamento.

Uma *configuração*  $C$  em um grafo  $G$  é uma função  $C : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ . O valor  $C(v)$  representa o número de pedras em um vértice  $v$ . O *tamanho*  $|C|$  de uma configuração  $C$  é o número total de pedras em  $G$ . Um *passo de empilhamento* consiste em remover duas pedras de um vértice e colocar uma pedra em um vértice adjacente. Note que uma pedra é perdida como custo dessa operação. Veja a Figura 2.1.

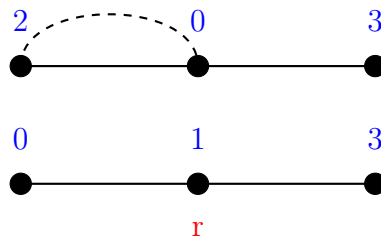


Figura 2.1: A execução de um passo de empilhamento, onde o vértice-alvo  $r$  é destacado.

Para um *vértice-alvo*  $r$ ,  $C$  é  *$r$ -solucionável* se for possível colocar uma pedra em  $r$  depois de uma sequência de passos de empilhamento e é  *$r$ -não solucionável*, caso contrário.

Foi provado em [12, 14] que decidir se  $C$  é  *$r$ -solucionável* em um grafo  $G$  é **NP-completo**.

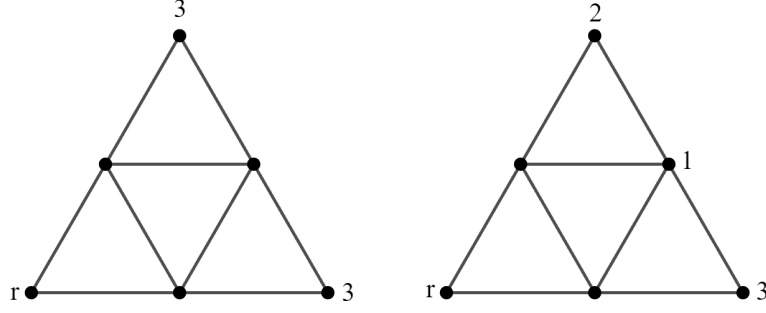


Figura 2.2: Uma configuração  $r$ -não solucionável e uma  $r$ -solucionável, respectivamente.

O número de empilhamento  $\pi(G, r)$  é o menor número natural  $t$  tal que toda configuração de tamanho  $t$  seja  $r$ -solucionável. O número de empilhamento de  $G$  é igual a  $\pi(G) = \max_r \pi(G, r)$ .

O Teorema 2 é o primeiro teorema publicado sobre o problema de empilhamento em grafos.

**Teorema 2** ([7]). *Seja  $G$  um hipercubo  $Q_n$ , então*

- (i)  $\pi(Q_n) \leq 2^n$ ;
- (ii) *Seja  $q$  o número de vértices com um número ímpar de pedras e seja  $t$  o número total de pedras. Se  $t > 2^{n+1} - q$ , então duas pedras podem ser movidas para qualquer vértice.*

*Demonstração.* A prova é feita por indução em  $n$ . É trivialmente verdadeira para  $n = 0$ . Suponha que seja verdadeira para  $n' < n$ . O hipercubo  $Q_n$  pode ser particionado em dois hipercubos  $Q_{n-1}$ , chamados  $M_1$  and  $M_2$ , onde  $v \in V(M_1)$ .

Seja  $v' \in V(M_2)$  adjacente a  $v$ . As arestas entre  $M_1$  e  $M_2$  formam um emparelhamento perfeito. Suponha que  $M_i$  contenha  $p_i$  pedras com  $q_i$  vértices possuindo um número ímpar de pedras, para  $i = 1, 2$ .

Suponha que haja  $p \geq 2^n$  pedras atribuídas aos vértices de  $Q_n$ . Mostraremos primeiro que (i) é válido. Se  $p_1 \geq 2^{n-1}$ , então, por indução, em  $M_1$ , uma pedra pode ser movida a  $v$ . Podemos assumir  $p_1 < 2^{n-1}$  e consideramos os dois casos:

*Caso (a1):  $q_2 > p_1$ .*

Como  $p_2 = p - p_1 > 2^n - q_2$ , por indução de (ii) em  $M_2$ , duas pedras podem ser movidas para  $v'$ . Portanto, uma pedra pode ser movida para  $v$ .

*Caso (a2):  $q_2 \leq p_1$ .*

Aplicamos passos de empilhamento em todos os vértices de  $M_2$  e podemos mover pelo menos  $(p_2 - q_2)/2$  pedras para os vértices de  $M_1$ . Portanto, em  $M_1$ , temos, ao todo  $p_1 + (p_2 - q_2)/2 \geq p_1 + (p_2 - p_1)/2 = (p_1 + p_2)/2 = 2^{n-1}$  pedras. Por indução, podemos então mover uma pedra para  $v$ . Isso estabelece (i).

Agora, basta provar (ii). Suponha que haja  $p = p_1 + p_2 > 2^{n+1} - q_1 - q_2$  pedras atribuídas aos vértices de  $Q_n$ . Queremos mostrar que duas pedras podem ser

movidas para  $v$ . Consideramos as seguintes três possibilidades:

*Caso (b1):*  $p_1 > 2^n - q_1$ .

Por indução de (ii) em  $M_1$ , duas pedras podem ser movidas para  $v$ .

*Caso (b2):*  $2^n - q_1 \geq p_1 \geq 2^{n-1}$ .

Como  $p_1 \geq 2^{n-1}$ , por indução de (i) em  $M_1$ , uma pedra pode ser movida para  $v$ . Como  $p_2 = p - p_1 > 2^{n+1} - q_1 - q_2 - p_1 \geq 2^n - q_2$ , duas pedras podem ser movidas para  $v'$  usando indução de (ii) em  $M_2$ . Portanto, um passo adicional de empilhamento resulta no movimento de mais uma pedra para  $v$ .

*Caso (b3):*  $p_1 < 2^{n-1}$ .

Para qualquer inteiro  $t$  que satisfaça  $p_2 \geq q_2 + 2t$ ,  $t$  pedras podem ser movidas para vértices de  $M_1$  enquanto  $p_2 - 2t$  pedras permanecem em  $M_2$ . Note que  $p_2 > 2^{n+1} - q - p_1 = (2^n - q_2) + (2^n - q_1 - p_1) \geq q_2 + (2^n - q_1 - p_1)$ , onde a última desigualdade decorre do fato de que  $q_2$  é no máximo  $2^{n-1}$ . Assim, tomando  $t$  como  $2^{n-1} - \lceil (q_1 + p_1) / 2 \rceil$ ,  $t$  pedras podem ser movidas para  $M_1$  deixando mais de  $2^n - q_2$  pedras em  $M_2$ . Em  $M_1$ , há  $p_1 + 2^{n-1} - \lceil (q_1 + p_1) / 2 \rceil = 2^{n-1} + \lfloor (p_1 - q_1) / 2 \rfloor \geq 2^{n-1}$  pedras. Podemos então mover uma pedra para  $v$  em  $M_1$  e, ao mesmo tempo, mover duas pedras para  $v'$  em  $M_2$ , o que resultará em mais uma pedra sendo movida para  $v$ . Como  $Q_n$  é vértice transitivo, concluímos também que  $\pi(Q_n) = 2^n$ .  $\square$

Apresentamos então dois fatos que nos permitem calcular cotas inferiores e superiores para o número de empilhamento de um grafo.

**Fato 2** ([5][11]). *Seja  $G$  um grafo, então  $\max\{n(G), 2^{D(G)}\} \leq \pi(G)$ .*

*Demonstração.* Vamos dividir esta prova em dois casos:

*Caso 1:* Suponha que  $\pi(G) < n(G)$ , então existe uma configuração de  $\pi$  pedras tal que não há mais de uma pedra em qualquer vértice e existe um vértice  $r$  sem nenhuma pedra. Como não há vértices com duas ou mais pedras, não podemos realizar nenhum passo de empilhamento. Portanto, não podemos mover uma pedra para o vértice  $r$ .

*Caso 2:* Suponha que  $\pi(G) < 2^{D(G)}$ . Como  $D(G)$  é o diâmetro de  $G$ , existem vértices  $u$  e  $v$  de forma que o caminho mais curto entre eles tem comprimento  $D(G)$ . Se todas as  $\pi(G)$  pedras estão posicionadas no vértice  $u$ , precisamos de  $2^{D(G)}$  pedras para chegar ao vértice  $v$ , mas temos menos de  $2^{D(G)}$  pedras.  $\square$

**Fato 3** ([5][11]). *Seja  $G$  um grafo, então  $\pi(G) \leq (n(G) - D(G))(2^{D(G)} - 1) + 1$ .*

*Demonstração.* Se um grafo  $G$  tem mais de  $(n(G) - D(G))(2^{D(G)} - 1)$  pedras, então, ou todo vértice possui pelo menos uma pedra sobre ele, ou ao menos um vértice possui pelo menos  $2^{D(G)}$  pedras. Para ver isso, considere não colocar nenhuma pedra em um vértice de  $G$  e  $2^{D(G)} - 1$  pedras em todos os outros vértices de  $G$ . Isso nos leva a  $(n(G) - 1)(2^{D(G)} - 1)$  pedras, e ainda temos uma pedra para colocar. Quando

o fizermos, ou um vértice terá  $2^{D(G)}$  pedras, ou todos os vértices terão pelo menos uma pedra. Se todos os vértices possuem uma pedra sobre eles, terminamos. Assim, suponha que  $v$  é um vértice com pelo menos  $2^{D(G)}$  pedras. Pela definição de diâmetro,  $v$  está a uma distância de no máximo  $D(G)$  de qualquer outro vértice. Portanto, se tomarmos  $r$  como *vértice-alvo*, há um caminho de  $v$  a  $r$  de comprimento no máximo  $D(G)$ . Se movermos  $2^{D(G)}$  pedras de  $v$  ao longo desse caminho, colocaremos uma pedra em  $r$ .  $\square$

Um grafo  $G$  é dito *Classe 0* quando  $\pi(G) = n$ . O Teorema 3 relaciona dois importantes parâmetros para o cálculo do número de empilhamento de um grafo, diâmetro e conectividade, com a definição de Classe 0.

**Teorema 3** ([8]). *Se  $D(G) = 2$  e  $\kappa(G) \geq 3$ , então  $G$  é Classe 0.*

Este teorema nos revela que, geralmente, é mais fácil calcular o número de empilhamento de um grafo denso do que de um grafo esparso. À primeira vista, essa conclusão pode parecer contraintuitiva, já que, em um grafo esparso, há menos arestas disponíveis para mover as pedras, o que poderia sugerir que seria mais fácil identificar estruturas que simplificassem o cálculo.

**Corolário 1** ([8]). *Quase todos os grafos são Classe 0.*

No entanto, por um viés probabilístico, quase todo grafo  $G$  satisfaz  $D(G) = 2$  e  $\kappa(G) \geq 3$ , evidenciando que a densidade contribui para a facilidade no cálculo do número de empilhamento.



# Capítulo 3

## Empilhamento em Grafos Regulares

Neste capítulo, iniciaremos apresentando os resultados já conhecidos relacionados ao problema de empilhamento em grafos regulares, fornecendo o contexto necessário para situar nossa pesquisa. Em seguida, discutiremos as duas principais técnicas utilizadas para a obtenção de melhores cotas superiores e inferiores do número de empilhamento, destacando sua relevância e aplicabilidade. Por fim, abordaremos os resultados já conhecidos sobre grafos Kneser e as tentativas de resultados sobre Snarks, bem como as contribuições originais que desenvolvemos em nossa pesquisa, ampliando o conhecimento sobre essas classes de grafos e avançando na compreensão de seus números de empilhamentos.

### 3.1 Resultados Conhecidos

Seguem então, as classes de grafos regulares cujo número de empilhamento é conhecido na literatura.

**Teorema 4** ([11]). *Seja  $G$  um grafo completo  $K_n$ , então  $\pi(K_n) = n$ .*

*Demonstração.* Note que  $K_n$  é vértice-transitivo e  $D(K_n) = 1$ . Então, segue imediatamente do Fato 2 que  $n \leq \pi(K_n)$ . Analogamente, do Fato 3, segue que  $\pi(K_n) \leq n$ . Assim,  $\pi(K_n) = n$ . □

**Teorema 5** ([7]). *Seja  $G$  um hipercubo  $Q_n$ , então  $\pi(Q_n) = 2^n$ .*

*Demonstração.* Segue como consequência imediata do Teorema 2. □

**Teorema 6** ([16]). *Seja  $G$  um grafo ciclo  $C_{2k}$ , então  $\pi(C_{2k}) = 2^k$ .*

*Demonstração.* Seja  $C_{2k} = xa_{k-1} \dots a_2 a_1 r b_1 b_2 \dots b_{k-1} x$ , onde  $r$  é o vértice-alvo. Como o diâmetro de  $C_{2k}$  é  $k$ , pelo Fato 2, temos que  $\pi(C_{2k}) \geq 2^k$ .

Agora, resta provar que  $\pi(C_{2k}) \leq 2^k$ . Suponha, para chegar a uma contradição, que temos um número maior ou igual a  $2^k$  pedras em  $C_{2k}$  e que não podemos mover

uma pedra para  $r$ . Se tivermos  $2^{k-1}$  pedras no caminho induzido pelos vértices rotulados  $a_i$ ,  $P_A = a_1 a_2 \dots a_{k-1}$ , podemos mover uma pedra para  $r$  ao longo de  $P_A$ , já que  $2^{k-1}$  pedras em  $a_{k-1}$  são suficientes, e uma pedra em  $a_i$ , onde  $i < k-1$ , vale mais do que uma pedra em  $a_{k-1}$  porque está mais próxima de  $r$ . O mesmo é válido para o caminho  $P_B = b_1 b_2 \dots b_{k-1}$ . Portanto, o número de pedras em  $P_A$  e  $P_B$  deve ser, cada um, menor ou igual a  $2^{k-1} - 1$ , já que não podemos alcançar  $r$  com pedras.

Além disso, devemos garantir que não haja pedras em excesso no vértice  $x$ . Podemos aplicar movimentos de empilhamento a partir do vértice  $x$  para os caminhos  $P_A$  ou  $P_B$ , o que adiciona ao número total de pedras em qualquer um dos caminhos. Se o número de pedras em  $x$  for ímpar, devemos deixar uma pedra em  $x$ , mas podemos mover pelo menos  $\frac{1}{2}(C(x) - 1)$  pedras de  $x$  para  $P_A$  ou  $P_B$ . Após mover pedras de  $x$  para qualquer um dos caminhos, ainda deve ser verdade que há no máximo  $2^{k-1} - 1$  pedras em cada caminho. Assim, sabemos que

$$|C(P_A)| + \frac{1}{2}C(x) - \frac{1}{2} \leq 2^{k-1} - 1$$

e, da mesma forma,

$$|C(P_B)| + \frac{1}{2}C(x) - \frac{1}{2} \leq 2^{k-1} - 1.$$

Assim, somando essas desigualdades, vemos que

$$|C(P_A)| + |C(P_B)| + C(x) - 1 \leq 2^k - 2$$

o que pode ser reescrito como

$$|C(P_A)| + |C(P_B)| + C(x) \leq 2^k - 1 < 2^k.$$

Mas isso é uma contradição.

O número  $|C(P_A)| + |C(P_B)| + C(x)$  é o número total de pedras que colocamos em  $C_{2k}$ , pois nenhuma pedra foi colocada em  $r$ , e assim, por hipótese,  $|C(P_A)| + |C(P_B)| + C(x) \geq 2^k$ , o que conclui a demonstração.  $\square$

**Teorema 7** ([16]). *Seja  $G$  um grafo ciclo  $C_{2k+1}$ , então  $2 \left\lfloor \frac{2^{k+1}}{3} \right\rfloor + 1$ .*

*Demonstração.* Seja  $C_{2k+1} = x a_{k-1} a_{k-2} \dots a_2 a_1 r b_1 b_2 \dots b_{k-2} b_{k-1} y x$ . Primeiro, provamos que  $\pi(C_{2k+1}) \geq 2 \left\lfloor \frac{2^{k+1}}{3} \right\rfloor + 1$  mostrando que não podemos mover uma pedra para  $r$  com menos de  $2 \left\lfloor \frac{2^{k+1}}{3} \right\rfloor + 1$  pedras.

Suponha que temos apenas  $2 \left\lfloor \frac{2^{k+1}}{3} \right\rfloor$  pedras e coloque  $\left\lfloor \frac{2^{k+1}}{3} \right\rfloor$  pedras em cada um dos vértices  $x$  e  $y$ . Agora  $x$  e  $y$  estão a uma distância  $k$  de  $r$ , e como não temos pedras em nenhum outro vértice, isso significa que precisamos de exatamente  $2^k$  pedras em  $x$  ou  $y$  para alcançar  $r$ . Se fizermos todos os possíveis passos de empilhamento de  $x$

para  $y$ , teremos apenas  $\left\lfloor \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{2^{k+1}}{3} \right\rfloor \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^{k+1}}{3} \right\rfloor$  pedras em  $y$ . Como  $2^{k+1}$  não é divisível por 3, sabemos que  $\left\lfloor \frac{2^{k+1}}{3} \right\rfloor$  é estritamente menor do que  $\frac{2^{k+1}}{3}$  e assim:

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{2^{k+1}}{3} \right\rfloor \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^{k+1}}{3} \right\rfloor &< \frac{1}{2} \left( \frac{2^{k+1}}{3} \right) + \frac{2^{k+1}}{3} \\ &= \frac{2^k + 2^{k+1}}{3} \\ &= \frac{2^k(1+2)}{3} \\ &= 2^k. \end{aligned}$$

E, portanto, temos menos que  $2^k$  pedras em  $y$ , e assim não podemos alcançar  $r$ . (O caso de mover as pedras para  $x$  é simétrico).

Agora, vamos mostrar que  $\pi(G) \leq 2 \left\lfloor \frac{2^{k+1}}{3} \right\rfloor + 1$ . Assuma, por contradição, que quando colocamos pelo menos  $2 \left\lfloor \frac{2^{k+1}}{3} \right\rfloor + 1$  pedras em  $C_{2^{k+1}}$  não podemos mover uma pedra para  $r$ . Assim como na prova para o ciclo par, se tivermos pelo menos  $2^{k-1}$  pedras em  $P_A$  ou  $P_B$ , podemos mover uma pedra para  $r$ . Assim, o número máximo de pedras que podemos mover para  $P_A$  ou  $P_B$  deve ser menor ou igual a  $2^{k-1} - 1$ . Seja o máximo de pedras que podemos mover de  $x$  e  $y$  para  $P_A = g_A(x, y)$  o máximo de pedras que podemos mover de  $x$  e  $y$  para  $P_B = g_B(x, y)$ . Então,

$$|C(P_A)| + g_A(x, y) \leq 2^{k-1} - 1$$

e

$$|C(P_B)| + g_B(x, y) \leq 2^{k-1} - 1.$$

Somando as desigualdades, temos

$$|C(P_A)| + g_A(x, y) + |C(P_B)| + g_B(x, y) \leq 2^k - 2.$$

Gostaríamos de analisar o mínimo do lado esquerdo da desigualdade porque, se conseguirmos mostrar que o mínimo do lado esquerdo é maior que  $2^k - 2$ , teremos demonstrado que para qualquer configuração possível de pedras chegamos a uma contradição, e sempre poderemos mover uma pedra para  $r$ . Atingimos esse mínimo quando  $|C(P_A)| = |C(P_B)| = 0$  e todas as pedras são colocadas em  $x$  e  $y$  pois  $P_A$  e  $P_B$  contribuem todas as suas pedras na desigualdade, mas  $x$  e  $y$  contribuem apenas com parte.

Agora gostaríamos de encontrar um limite inferior para  $g_A(x, y)$  e  $g_B(x, y)$  em termos de  $P(x)$  e  $P(y)$  para que possamos escrever a desigualdade em termos de  $P(x)$  e  $P(y)$ . Então, se o número de pedras em  $x$  for par e o número de pedras em  $y$  for divisível por quatro, podemos mover  $\frac{1}{2}C(x) + \frac{1}{4}C(y)$  pedras para  $a_{k-1}$ .

Mas se este não for o caso, então teremos no máximo uma pedra restante em  $x$  e uma pedra restante em  $y$  que não podemos mover. Isso corresponde a “ $\frac{3}{4}$  de uma pedra” que não podemos mover para  $a_{k-1}$  de  $x$  e  $y$ . Portanto, temos que  $\frac{1}{2}C(x) + \frac{1}{4}C(y) - \frac{3}{4} \leq g_A(x, y)$ . O caso para  $g_B(x, y)$  é o mesmo, nós apenas trocamos os papéis de  $x$  e  $y$ , e teremos  $\frac{1}{2}C(y) + \frac{1}{4}C(x) - \frac{3}{4} \leq g_B(x, y)$ . Considere isto e tomando  $|C(P_A)| = |C(P_B)| = 0$ , temos que

$$\frac{3}{4}(P(x) + P(y)) - \frac{3}{2} \leq 2^k - 2$$

o que pode ser simplificado como,

$$\begin{aligned} C(x) + C(y) &\leq \frac{4}{3} \left( 2^k - 2 + \frac{3}{2} \right) \\ &= \frac{4}{3} \left( 2^k - \frac{1}{2} \right) \\ &= 2 \left( \frac{2^{k+1}}{3} \right) - \frac{2}{3} \\ &\leq 2 \left( \left\lfloor \frac{2^k + 1}{3} \right\rfloor + \frac{2}{3} \right) - \frac{2}{3} \\ &= 2 \left\lfloor \frac{2^k + 1}{3} \right\rfloor + \frac{2}{3} \\ &< 2 \left\lfloor \frac{2^k + 1}{3} \right\rfloor + 1. \end{aligned}$$

Isso é uma contradição, pois  $C(x) + C(y) \geq 2 \left\lfloor \frac{2^{k+1}}{3} \right\rfloor + 1$  porque colocamos todas as pedras em  $x$  e  $y$ . □

**Teorema 8** ([10]). *Seja  $G$  o grafo  $C_n^k$ , então  $G$  é Classe 0 para  $k \geq n/2(\lg n - \lg \lg n)$ .*

**Teorema 9** ([11]). *Seja  $G$  o grafo de Petersen, então  $\pi(G) = n$ .*

*Demonstração.* Seja  $r$  o vértice-alvo e  $C(r) = 0$ .

*Caso 1:* Suponha que um vizinho  $v$  de  $r$  possui uma pedra. Podemos considerar dois ciclos disjuntos de comprimento cinco:  $C_r$ , que contém  $r$ , e  $C_v$ , que contém  $v$ , de tal forma que cada vértice em  $C_r$  é adjacente a exatamente um vértice em  $C_v$ . Isso é possível para qualquer  $r$  e  $v$  pela simetria do grafo de Petersen.

Sabemos que  $\pi(C_5) = 5$  pelo Teorema 7. Se houver cinco ou mais pedras em  $C_r$ , podemos colocar uma pedra em  $r$ . Caso contrário, teremos seis ou mais pedras em  $C_v$ . Ignorando uma pedra em  $v$ , ainda teremos cinco pedras em  $C_v$  e podemos colocar mais uma pedra em  $v$ . Portanto, teremos duas pedras em  $v$ , e como  $v$  é um vizinho de  $r$ , podemos colocar uma pedra  $r$ .

*Caso 2:* Suponha que nenhum vizinho de  $r$  possui uma pedra.

Sabemos que os seis vértices além de  $r$  e  $N(r)$  possuem todas as pedras sobre eles. Esses seis vértices formam um  $C_6$ . Note que para qualquer  $r$ , podemos gerar um  $C_6$  com seus vértices não adjacentes. Assim, todo vértice do  $C_6$  é adjacente a um vértice  $v \in N(r)$ . Portanto, se conseguirmos colocar quatro ou mais pedras em um vértice no  $C_6$ , podemos colocar uma pedra em  $r$ .

Agora, considere apenas o  $C_6$ . Se algum vértice  $x \in C_6$  tiver  $C(x) \geq 4$ , já terminamos, então suponha que todos os vértices  $x$  tenham  $C(x) \leq 3$ . Começamos com o caso onde pelo menos um vértice, digamos  $w$ , tem  $C(w) = 3$ . Ignore essas três pedras em  $w$  e teremos sete pedras restantes em  $C_6$  para mover mais uma para  $w$ . Sabemos pelo Teorema 6 que  $\pi(C_6) = 8$ , e que precisamos de oito pedras apenas quando todas as pedras estão no vértice mais distante de  $r$ . Como assumimos que  $C(x) \leq 3$  para todo  $x \in C_6$ , não podemos ter todas as pedrinhas no vértice mais distante de  $w$ . Assim, sete serão suficientes para mover mais uma para  $w$ .

Assuma que  $C(x) \leq 2$  para todos os vértices. Suponha que cinco vértices tenham duas pedrinhas sobre eles, e um tenha zero pedras. Devemos ter três vértices consecutivos com duas pedras e podemos mover quatro para o vértice do meio. O único outro caso é se tivermos quatro vértices com duas pedras e os outros dois com uma. Se três dos vértices com duas pedras forem adjacentes, já terminamos, caso contrário, temos o seguinte ciclo, onde os vértices denotados por  $u$  têm duas pedras e os vértices denotados por  $x$  têm uma pedra:  $uuxuux$ . E aqui podemos aplicar um passo de empilhamento de qualquer  $u$  para seu adjacente  $v$ , e teremos três vértices consecutivos com duas pedras. Assim, conseguimos colocar uma pedra em  $r$ .

Concluimos assim que  $\pi(G, r) = 10$  e como o grafo de Petersen é vértice-transitivo,  $\pi(G) = 10$ .  $\square$

## 3.2 Principais Técnicas utilizadas

Nesta seção, abordaremos as duas principais técnicas que foram utilizadas para a obtenção dos resultados dos artigos [1] e [2]. Ambos podem ser vistos no Apêndice A e no Apêndice B. Primeiramente, introduziremos a técnica que usualmente nos fornece uma cota inferior mais precisa que a obtida utilizando o Fato 2.

Dado um grafo  $G$  com vértices  $u$  e  $v$  tais que  $N_a[u] \cap N_b[v] = \emptyset$  para alguns inteiros não negativos  $a$  e  $b$ . Definimos a configuração  $C^* = C_{u,v}^*$  por  $C^*(v) = 2^{a+b+1} - 1$ ,  $C^*(x) = 0$  para todo  $x \in (N_a[u] \cup N_b[v]) - v$ , e  $C^*(x) = 1$  caso contrário.

Os autores de [9] demonstraram o seguinte lema (conhecido como SNL *Small Neighborhood Lemma*) para fornecer uma cota inferior de  $\pi(G)$ .

**Lema 1.** (*Lema da Vizinhaça Pequena [9]*) *Seja  $G$  um grafo e  $u, v \in V(G)$  tais que  $N_a[u] \cap N_b[v] = \emptyset$  para alguns inteiros não negativos  $a$  e  $b$ . Então  $C^*$  é  $u$ -*

não solucionável. Consequentemente,  $\pi(G) \geq \pi(G, u) > |C^*|$ . Em particular, se  $N_a[u] \cap N_b[v] = \emptyset$  e  $|N_a[u] \cup N_b[v]| < 2^{a+b+1}$ , então  $G$  não é Classe 0.

Pode-se observar como o SNL é, de certa forma, um refinamento da cota inferior exponencial básica.

Resta-nos discutirmos uma técnica que, analogamente, nos fornece cotas superiores mais precisas que as obtidas pelo Fato 3. Descrevemos uma abordagem de otimização linear introduzida em [10].

Para uma configuração desconhecida  $C$  em um grafo  $G$  com vértice-alvo  $r$ , consideramos um subgrafo conexo  $H$  de  $G$  que contém  $r$ . O objetivo é a obtenção de uma desigualdade linear nas variáveis  $C(v)$  com  $v \in V(H)$  que é satisfeita sempre que  $C$  é  $r$ -não solucionável.

Dada uma coleção de tais desigualdades sobre várias escolhas de  $H$ , podemos então maximizar  $|C| = \sum_{v \in V(G)} C(v)$  sujeito a essas restrições, assumindo que  $C(v) \geq 0$  para todo  $v \in V(G)$ . O valor ótimo deste programa linear é, portanto, uma cota inferior estrita para  $\pi(G, r)$ . Esse valor pode ser exato para alguns grafos; no entanto, este é realmente um problema de otimização inteira e, assim, geralmente resultará em um valor menor do que o real. Essa ideia foi aplicada com sucesso quando  $H$  é uma árvore (generalizada para alguns grafos que não são árvores em [9]). Por fim, apresentamos o método.

Seja  $T$  uma subárvore de um grafo  $G$  enraizada no vértice  $r$ , com pelo menos dois vértices. Para um vértice  $v \in V(T)$ , seja  $v^+$  o pai de  $v$ ; isto é, o vizinho de  $v$  em  $T$  que está um passo mais próximo de  $r$  (também dizemos que  $v$  é um filho de  $v^+$ ). Chamamos  $T$  de uma  $r$ -estratégia quando a associamos a uma função peso  $w_T$  não-negativa com a propriedade de que  $w_T(r) = 0$  e  $w_T(v^+) \geq 2w_T(v)$  para qualquer outro vértice  $v$  que não seja vizinho de  $r$  (e  $w_T(v) = 0$  para vértices que não estão em  $T$ ). Seja  $\mathbf{T}$  a configuração com  $\mathbf{T}(r) = 0$ ,  $\mathbf{T}(v) = 1$  para todos os outros  $v \in V(T)$ , e  $\mathbf{T}(v) = 0$  em qualquer outro lugar. Agora definimos o  $T$ -peso de qualquer configuração  $C$  (incluindo  $\mathbf{T}$ ) por  $w_T(C) = \sum_{v \in V} w_T(v)C(v)$ . O seguinte lema (conhecido como WFL *Weight Function Lemma*) é usado para fornecer uma cota superior para  $\pi(G)$ .

**Lema 2** (Lema da Função Peso [10]). *Seja  $T$  uma  $r$ -estratégia de  $G$  com função peso associada  $w_T$ . Suponha que  $C$  seja uma configuração  $r$ -não solucionável de pedras em  $V(G)$ . Então  $w_T(C) \leq w_T(\mathbf{T})$ .*

### 3.3 Grafos de Kneser

Nesta seção, apresentaremos os resultados conhecidos na literatura sobre o número de empilhamento dos grafos Kneser, bem como os avanços alcançados nesta pesquisa. Antes de explorarmos esses resultados, é fundamental definirmos essa classe de grafos. Todos os resultados desta seção podem ser vistos em detalhes no artigo [1] que está no Apêndice A.

Dado dois inteiros positivos  $m$  e  $t$ , o *grafo de Kneser*  $K(m, t)$  é o grafo cujos vértices representam os  $t$ -subconjuntos de  $1, \dots, m$ , com dois vértices sendo adjacentes se, e somente se, eles correspondem a subconjuntos disjuntos. Veja a Figura 3.1.

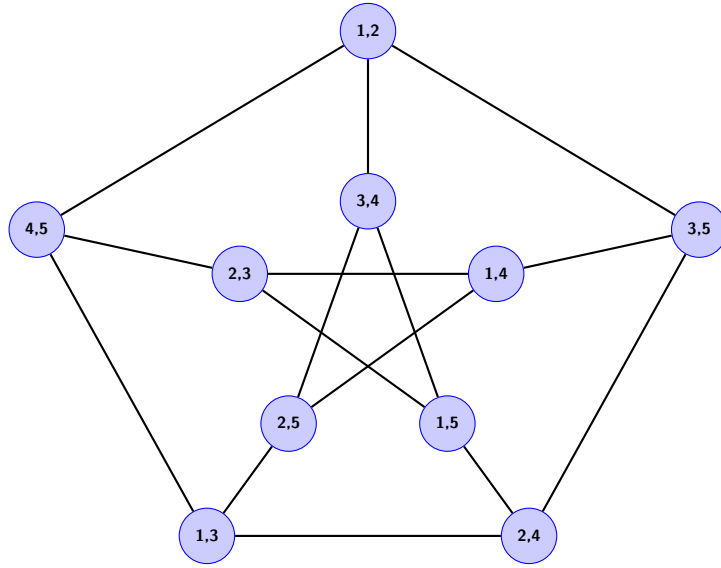


Figura 3.1: O grafo de Kneser  $K(5, 2)$ , também conhecido como grafo de Petersen e por ser o menor snark.

Assim, o grafo  $K(m, t)$  tem  $\binom{m}{t}$  vértices e é regular, com grau  $\deg(K(m, t)) = \binom{m-t}{t}$ . Quando  $m = 2t$ , cada vértice é adjacente a apenas outro vértice, e o grafo de Kneser  $K(2t, t)$  é um emparelhamento perfeito. Portanto, assumimos que  $m \geq 2t + 1$  para que o grafo  $K(m, t)$  seja conexo. Para  $m \geq 1$ , o grafo  $K(m, 1)$  é o grafo completo com  $m$  vértices, então assumimos que  $t > 2$ . O caso especial  $K(2t + 1, t)$  é conhecido como o *grafo ímpar*  $O_t$ ; em particular,  $O_2 = K(5, 2)$  é o grafo de Petersen. Os grafos ímpares constituem o caso mais esparsos de grafos de Kneser conexos.

Como os grafos de Kneser são regulares e transitivos em relação às arestas, sua conectividade de vértices é igual ao seu grau  $\binom{m-t}{t} \geq t + 1 \geq 3$  (ver [13]). O diâmetro de  $K(m, t)$  é dado em [21] como  $\lceil \frac{t-1}{m-2t} \rceil + 1$ . Note que esse valor é igual a  $t$  para  $m = 2t + 1$  e igual a 2 para  $m \geq 3t - 1$ .

Considerando o Teorema 3 e o Corolário 1, além do fato de que  $K(m, t)$  é 3-conexo com diâmetro dois, para todo  $m \geq 3t - 1$  e  $t \geq 2$ , temos o seguinte corolário:

**Corolário 2.** *Se  $t \geq 2$  e  $m \geq 3t - 1$ , então  $K(m, t)$  é Classe 0.*

Com base nesta evidência, a seguinte questão foi levantada em [8], a qual desde então tem sido conjecturada em diversas palestras sobre o assunto por Hurlbert.

**Conjectura 1.** *Se  $m \geq 2t + 1$ , então  $K(m, t)$  é Classe 0.*

Assim, considerando o Corolário 2 e a Conjectura 1, os três primeiros grafos na lacuna gerada por estes resultados são:  $K(7, 3)$ ,  $K(9, 4)$  e  $K(10, 4)$ . O objetivo central da pesquisa é provar que todos os grafos  $K(m, t)$  são Classe 0. Como obter este resultado é extremamente ambicioso, concentramo-nos em tentar provar que os três grafos em questão são Classe 0 e obtivemos os seguintes resultados:

**Teorema 10** ([1]). *Temos que  $35 \leq \pi(K(7, 3)) \leq 36$ .*

**Teorema 11** ([1]). *Temos que  $126 \leq \pi(K(9, 4)) \leq 141$ .*

**Teorema 12** ([1]). *Temos que  $\pi(K(10, 4)) = 210$ ; i.e.,  $K(10, 4)$  é Classe 0.*

### 3.4 Grafos snarks

Nesta seção, apresentamos os resultados das primeiras investigações corretas na literatura sobre o número de empilhamento dos grafos snarks, já que fizemos correções em resultados anteriormente publicados para os snarks flor e para o grafo de Watkins. Também são apresentados os resultados obtidos a partir dos snarks de Blanuša. Todos os resultados desta seção podem ser vistos em detalhes no artigo [2] que está no Apêndice B.

Definimos a histórica família de grafos *snark*, que são grafos cúbicos, sem pontes e classe 2 (uma definição proveniente do problema de coloração de arestas, que foge do escopo do texto). O grafo de Petersen, apresentado na Figura 3.1, é o menor snark, com 10 vértices, e foi descoberto em 1898 [17]. Desde então, muitos outros foram descobertos. Não existem snarks de ordem 12, 14 e 16, enquanto que snarks existem para qualquer ordem par maior que 16. Os snarks de Blanuša são os dois snarks descobertos por Danilo Blanuša em 1946 [4], quando apenas o snark de Petersen era conhecido [4]. Tanto o snark Blanuša 1 quanto o Blanuša 2 possuem 18 vértices. Myriam Preissmann provou em 1982 que existem exatamente dois snarks de ordem 18 [18]. O snark de Watkins é o snark com 50 vértices, descoberto por John J. Watkins em 1989 [22].

Antes da publicação do artigo [2], os dois únicos estudos sobre o número de empilhamento em snarks foram [2] e [19]. Os resultados publicados nesses artigos foram os seguintes:

**Fato 4** ([15]). *Seja um snark flor  $J_n$  com  $n \geq 5$ . Temos que  $\pi(J_n) = 4n + 1$ .*

**Fato 5** ([19]). *Seja  $J_{50}$  o grafo de Watkins. Temos que  $\pi(J_{50}) = 166$ .*



A seguir, apresenta-se uma tabela que compila os resultados de [2], os quais corrigem os fatos enunciados acima, que estavam incorretos, e apresentam novos resultados sobre os grafos de Blanuša.

Snark	$n(G)$	$D(G)$	$\pi(G)$
Flor $J_3$	12	3	$12 \leq \pi(J_3) \leq 13$
Flor $J_5$	20	4	$23 \leq \pi(J_5) \leq 30$
Flor $J_7$	28	5	$41 \leq \pi(J_7) \leq 61$
Flor $J_m$ ( $m = 2k + 1 \geq 7$ )	$4m$	$k + 2$	$2^{k+2} + 9 \leq \pi(J_m) \leq \lceil 2^{k+2}9/5 + 2k - 18/5 \rceil + 1$
Blanuša (1 e 2)	18	4	$23 \leq \pi(G) \leq 34$
Watkins	50	7	$183 \leq \pi(G) \leq 5462$

Tabela 3.1: Cotas superiores e inferiores obtidas em [2].

# Capítulo 4

## Conclusões

Ao longo da pesquisa realizada durante o doutorado, expandimos a literatura existente sobre o problema de empilhamento em grafos regulares, fazendo avanços no estudo de grafos Kneser e Snarks. Através de novas técnicas e abordagens, conseguimos proporcionar uma compreensão mais aprofundada sobre o problema em relação aos grafos Kneser. Além disso, contribuímos com os primeiros resultados para grafos Snarks, que ainda não haviam sido explorados de forma satisfatória neste problema.

Essas contribuições representam um passo importante para o avanço da teoria do problema de empilhamento, abrindo caminho para futuras investigações e em diferentes classes de grafos regulares. Futuramente, tem-se o objetivo de estudar o problema de empilhamento para grafos regulares considerando os grafos prisma que também generalizam o grafo de Petersen, Möbius ladder que são cúbicos e têm aplicações em química e em física, e também os bipartidos completos balanceados  $K_{n,n}$ .

Paralelamente à pesquisa desta tese, foi iniciado um projeto em colaboração com o Dr. Hurlbert e Bardenova, que visa a generalização do problema de empilhamento. Este estudo considera a atribuição de um número qualquer de pedras a um número qualquer de vértices-alvo em grafos do tipo caminho e árvore.

# Referências Bibliográficas

- [1] ADAUTO, M., BARDENOVA, V., DA CRUZ, M., et al., 2024, “Pebbling in Kneser Graphs”, *Lecture Notes in Computer Science*, v. 14579, pp. 46–60.
- [2] ADAUTO, M., FIGUEIREDO, C., HURLBERT, G., et al., 2025, “On the pebbling numbers of Flower, Blanuša and Watkins snarks”, *Discrete Applied Mathematics*, v. 361, pp. 336–346.
- [3] BONDY, J., MURTY, U., 2008, *Graph Theory*. New York, Springer.
- [4] CAVICCHIOLI, A., MESCHIARI, M., RUINI, B., et al., 1998, “A survey on snarks and new results: Products, reducibility and a computer search”, *J. Graph Theory*, v. 28, n. 2, pp. 57–86. ISSN: 1097-0118.
- [5] CHAN, M., GODBOLE, A. P., 2008, “Improved pebbling bounds”, *Discrete Mathematics*, v. 308, n. 11, pp. 2301–2306.
- [6] CHARTRAND, G., ZHANG, P., 2008, *Chromatic Graph Theory*. CRC Press.
- [7] CHUNG, F., 1989, “Pebbling in hypercubes”, *SIAM J. Disc. Math.*, v. 2, pp. 467–472.
- [8] CLARKE, T., HOCHBERG, R., HURLBERT, G., 1997, “Pebbling in diameter two graphs and products of paths”, *J. Graph Theory*, v. 25, n. 2, pp. 119–128.
- [9] CRANSTON, D. W., POSTLE, L., XUE, C., et al., 2017, “Modified linear programming and class 0 bounds for graph pebbling”, *J. Comb. Optim.*, v. 34, n. 1, pp. 114–132.
- [10] HURLBERT, G., 2017, “The weight function lemma for graph pebbling”, *J. Combin. Opt.*, v. 34, n. 2, pp. 343–361.
- [11] HURLBERT, G., 1999, “A survey of graph pebbling”, *Congressus Numerantium*, v. 139, pp. 41–64.

- [12] HURLBERT, G., KIERSTEAD, H., 2005, “Graph pebbling complexity and fractional pebbling”, (Unpublished).
- [13] LOVÁSZ, L., 1979, *Combinatorial Problems and Exercises*. Amsterdam, New York, Oxford, North Holland.
- [14] MILANS, K., CLARK, B., 2006, “The complexity of graph pebbling”, *SIAM J. Discrete Math.*, v. 20, n. 3, pp. 769–798.
- [15] MONICA, M. C., SUGANYA, A. S., 2017, “Pebbling in Flower Snark Graph”, *Global J. Pure Appl. Math.*, v. 13, n. 6, pp. 1835–1843.
- [16] PACHTER, L., SNEVILY, H., VOXMAN, B., 1995, “On pebbling graphs”, *Congressus Numerantium*, v. 107, pp. 65–80.
- [17] PETERSEN, J., 1898, “Sur le théorème de Tait”, *Interméd. Math.*, v. 15, pp. 225 – 227.
- [18] PREISSMANN, M., 1982, “Snarks of order 18”, *Discrete Mathematics*, v. 42, n. 1, pp. 125–126. ISSN: 0012-365X.
- [19] SREEDEVI, S., ANILKUMAR, M. S., 2019, “Pebbling In Watkins Snark Graph”, *Internat. J. Res. Advent Tech.*, v. 7, n. 2.
- [20] SZWARCFITER, J., 2018, *Teoria computacional de grafos: os algoritmos*. Rio de Janeiro, Elsevier.
- [21] VALENCIA-PABON, M., VERA, J.-C., 2005, “On the diameter of Kneser graphs”, *Discrete Mathematics*, v. 305, n. 1-3, pp. 383–385.
- [22] WATKINS, J. J., 1989, “Snarks”, *Ann. New York Acad. Sci.*, v. 576, pp. 606–622.
- [23] WEST, D., 2001, *Introduction to Graph Theory*. New York, Pearson.

# Apêndice A

## Manuscrito: Pebbling in Kneser Graphs

Este apêndice contém o manuscrito:

Matheus Adauto, Viktoriya Bardenova, Mariana da Cruz, Celina M. H. de Figueiredo, Glenn Hurlbert, Diana Sasaki. Pebbling in Kneser Graphs. Publicado em *Lecture Notes in Computer Science* [1].



# Pebbling in Kneser Graphs

Matheus Adauto<sup>1,3</sup>(✉) , Viktoriya Bardenova<sup>3</sup> , Mariana da Cruz<sup>1</sup> ,  
Celina de Figueiredo<sup>1</sup> , Glenn Hurlbert<sup>3</sup> , and Diana Sasaki<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brazil

{adauto, celina, mmartins}@cos.ufrj.br

<sup>2</sup> Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brazil

diana.sasaki@ime.uerj.br

<sup>3</sup> Department of Mathematics and Applied Mathematics, Virginia Commonwealth University, Richmond, VA, USA

{bardenovav, ghurlbert}@vcu.edu

**Abstract.** Graph pebbling is a game played on graphs with pebbles on their vertices. A pebbling move removes two pebbles from one vertex and places one pebble on an adjacent vertex. The pebbling number  $\pi(G)$  is the smallest  $t$  so that from any initial configuration of  $t$  pebbles it is possible, after a sequence of pebbling moves, to place a pebble on any given target vertex. We consider the pebbling number of Kneser graphs, and give positive evidence for the conjecture that every Kneser graph has pebbling number equal to its number of vertices.

**Keywords:** graph pebbling · Kneser graphs · odd graphs · weight function method

## 1 Introduction

Graph pebbling is a network model for studying whether or not a given supply of discrete pebbles can satisfy a given demand via pebbling moves. A pebbling move across an edge of a graph takes two pebbles from one endpoint and places one pebble at the other endpoint; the other pebble is lost in transit as a toll. The pebbling number of a graph is the smallest  $t$  such that every supply of  $t$  pebbles can satisfy every demand of one pebble by a vertex. The number of vertices is a sharp lower bound, and graphs where the pebbling number equals the number of vertices is a topic of much interest [7, 9].

Pebbling numbers of many graphs are known: cliques, trees, cycles, cubes, diameter 2 graphs, graphs of connectivity exponential in its diameter, and others [11]. The pebbling number has also been determined for subclasses of chordal graphs: split graphs [2], semi-2-trees [3], and powers of paths [4], among others. Other well-known families of graphs (e.g. flower snarks [1]) have been investigated; here we continue the study on Kneser graphs. In order to state our main results in Sect. 2, we first introduce graph theoretic definitions, followed by graph pebbling terminology, and then present some context for these results.

### 1.1 General Definitions

In this paper,  $G = (V, E)$  is always a simple connected graph. The numbers of vertices and edges of  $G$  as well as its diameter, are denoted by  $n(G)$ ,  $e(G)$ , and  $D(G)$ , respectively, or simply  $n$ ,  $e$ , and  $D$ , when it is clear from the context. For a vertex  $w$  and positive integer  $d$ , denote by  $N_d(w)$  the set of all vertices that are at distance exactly  $d$  from  $w$ , with  $N_d[w] = \cup_{i=0}^d N_i(w)$  being the set of all vertices that are at distance at most  $d$  from  $w$ .

Given two positive integers  $m$  and  $t$ , the *Kneser graph*  $K(m, t)$  is the graph whose vertices represent the  $t$ -subsets of  $\{1, \dots, m\}$ , with two vertices being adjacent if, and only if, they correspond to disjoint subsets. Thus,  $K(m, t)$  has  $\binom{m}{t}$  vertices and is regular, with degree  $\deg(K(m, t)) = \binom{m-t}{t}$ . When  $m = 2t$ , each vertex is adjacent to just one other vertex and the Kneser graph  $K(2t, t)$  is a perfect matching. Therefore we assume that  $m \geq 2t + 1$  so that  $K(m, t)$  is connected. For  $m \geq 1$ ,  $K(m, 1)$  is the complete graph on  $m$  vertices, so we assume that  $t > 2$ . The special case  $K(2t + 1, t)$  is known as the *odd graph*  $O_t$ ; in particular,  $O_2 = K(5, 2)$  is the Petersen graph. The odd graphs constitute the sparsest case of connected Kneser graphs. A graph  $G$  is  $k$ -connected if it contains at least  $k + 1$  vertices but does not contain a set of  $k - 1$  vertices whose removal disconnects the graph, and the connectivity  $\kappa(G)$  is the largest  $k$  such that  $G$  is  $k$ -connected.

Since Kneser graphs are regular and edge-transitive, their vertex connectivity equals their degree  $\binom{m-t}{t} \geq t + 1 \geq 3$  (see [13]). The diameter of  $K(m, t)$  is given in [15] to be  $\lceil \frac{t-1}{m-2t} \rceil + 1$ . Notice that this value equals  $t$  for  $m = 2t + 1$  and equals 2 for  $m \geq 3t - 1$ .

### 1.2 Graph Pebbling Definitions

A *configuration*  $C$  on a graph  $G$  is a function  $C : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ . The value  $C(v)$  represents the number of pebbles at vertex  $v$ . The size  $|C|$  of a configuration  $C$  is the total number of pebbles on  $G$ . A *pebbling move* consists of removing two pebbles from a vertex and placing one pebble on an adjacent vertex. For a target vertex  $r$ , a configuration  $C$  is  *$r$ -solvable* if one can place a pebble on  $r$  after a sequence of pebbling moves, and is  *$r$ -unsolvable* otherwise. Also,  $C$  is *solvable* if it is  $r$ -solvable for all  $r$ . The *pebbling number*  $\pi(G, r)$  is the minimum number  $t$  such that every configuration of size  $t$  is  $r$ -solvable. The pebbling number of  $G$  equals  $\pi(G) = \max_r \pi(G, r)$ .

The basic lower and upper bounds for every graph are as follows.

**Fact 1** ([5, 10]). *For every graph  $G$  we have  $\max\{n(G), 2^{D(G)}\} \leq \pi(G) \leq (n(G) - D(G))(2^{D(G)} - 1) + 1$ .*

A graph is called *Class 0* if  $\pi(G) = n(G)$ . For example, complete graphs, hypercubes, and the Petersen graph are known to be Class 0 [10].

### 1.3 Context

The upper bound in Fact 1 is due to the pigeonhole principle. The simplest pigeonhole argument yields an upper bound of  $(n(G) - 1)(2^{D(G)} - 1) + 1$ : a

configuration of this size guarantees that either the target vertex  $r$  has a pebble on it or some other vertex has at least  $2^{D(G)}$  pebbles on it, which can then move a pebble to  $r$  without assistance from pebbles on other vertices. The improvement of Chan and Godbole [5] combines the vertices on a maximum length induced path from  $r$  into one “pigeon hole”, recognizing that  $2^{D(G)}$  pebbles on that path is enough to move one of them to  $r$ . Generalizing further, one can take any spanning tree  $T$  of  $G$  and realize that the same pigeonhole argument yields the upper bound  $|L(T)|(2^{D(G)} - 1) + 1$ , where  $L(T)$  is the set of leaves of  $T$ . Then Chung [6] found that the paths from the leaves to  $r$ , which typically overlap, could instead be shortened in a special way so as to partition the edges of  $T$ , thereby decreasing the exponent of 2 for most of the leaves. (The proof of her result needed double induction, however, rather than the pigeonhole principle.) In short, she defined the *maximum path partition* of  $T$  and used it to derive the exact formula for  $\pi(T, r)$ . We will not need to use this formula here, but we will record the resulting upper bound.

**Fact 2.** *If  $T$  is a spanning tree of  $G$  and  $r$  is a vertex of  $G$ , then  $\pi(G, r) \leq \pi(T, r)$ .*

Moreover, Fact 2 holds if  $T$  is any spanning subgraph of  $G$ . However, it is mostly used when  $T$  is a tree because we have Chung’s formula for trees. In Sect. 3.1 we describe a powerful generalization from [12] that uses many (not necessarily spanning) trees instead of just one, and utilizes linear optimization as well.

## 2 Results

Here we briefly present known results on the pebbling numbers of Kneser graphs, followed by our new theorems, which we will prove in Sect. 4 after describing the tools used for them in Section 3.

### 2.1 Historical Contributions

It was proved in [14] that every diameter two graph  $G$  has pebbling number at most  $n(G) + 1$ , and in [7] the authors characterize which diameter two graphs are Class 0. As a corollary they derive the following result.

**Theorem 3** ([7]). *If  $D(G) = 2$  and  $\kappa(G) \geq 3$ , then  $G$  is Class 0.*

As those authors pointed out, since almost every graph is 3-connected with diameter 2, it follows that almost all graphs are Class 0. Additionally, since  $K(m, t)$  is 3-connected with diameter two for every  $m \geq 3t - 1$  and  $t \geq 2$ , one obtains the following corollary.

**Corollary 4.** *If  $t \geq 2$  and  $m \geq 3t - 1$ , then  $K(m, t)$  is Class 0.*

A much better asymptotic result was obtained in [9].



**Theorem 5 ([9]).** *For any constant  $c$  there is a  $t_0$  such that, for all  $t \geq t_0$  and  $s \geq c(t/\lg t)^{1/2}$  and  $m = 2t + s$ , we have that  $K(m, t)$  is Class 0.*

Based on this evidence, the following was raised as a question in [7], which has since been conjectured in numerous talks on the subject by Hurlbert.

**Conjecture 6.** *If  $m \geq 2t + 1$ , then  $K(m, t)$  is Class 0.*

## 2.2 Our Contributions

From Corollary 4 we see that the smallest three open cases for Kneser graphs are  $K(7, 3)$ ,  $K(9, 4)$ , and  $K(10, 4)$ . In every case, the lower bound of  $K(m, t) \geq \binom{m}{t}$  comes from Fact 1. Conjecture 4 posits that these graphs have pebbling numbers equal to their number of vertices, namely  $\binom{7}{3} = 35$ ,  $\binom{9}{4} = 126$ , and  $\binom{10}{4} = 210$ , respectively. Our main results in this paper address the upper bounds for these cases.

Fact 1 delivers upper bounds of 224, 1830, and 1449, respectively. By using breadth-first-search spanning trees, Fact 2, and Chung’s tree formula, it is not difficult to derive the improved upper bounds of 54, 225, and 247, respectively. However, our Theorems 7, 8, and 9, below, are significantly stronger. Besides the infinite family  $K(m, 2)$  and the Kneser graphs satisfying Theorem 5, Theorem 9 gives further positive evidence to Conjecture 6.

**Theorem 7.** *For  $K(7, 3)$  we have  $35 \leq \pi(K(7, 3)) \leq 36$ .*

**Theorem 8.** *For  $K(9, 4)$  we have  $126 \leq \pi(K(9, 4)) \leq 141$ .*

**Theorem 9.** *For  $K(10, 4)$  we have  $\pi(K(10, 4)) = 210$ ; i.e.,  $K(10, 4)$  is Class 0.*

Additionally, the most obvious infinite family of open cases for Kneser graphs are the odd graphs  $K(2t + 1, t)$  for  $t \geq 3$ . We note that the number of vertices of  $G = K(2t + 1, t)$  is  $n = \binom{2t+1}{t}$ , which Stirling’s formula implies is asymptotic to  $4^{t+1}/\sqrt{\pi t}$ , so that  $t$  is roughly (in fact greater than)  $(\lg n)/2$ . Observe also that for odd graphs, we have  $D(G) = t$ . Thus Fact 1 yields an upper bound on  $\pi(G)$  on the order of  $n^{1.5}$ . Here we improve this exponent significantly.

**Theorem 10.** *For any  $t \geq 3$ , let  $n = n(K(2t + 1, t))$  and  $\alpha = \log_4((5e)^{2/3}) \approx 1.25$ . Then we have  $n \leq \pi(K(2t + 1, t)) \leq .045n^\alpha(\lg n)^{\alpha/2} < .045n^{1.26}(\lg n)^{0.63}$ .*

We will also prove in Theorem 19 below that a well-known lower bound technique (Lemma 13) will not produce a lower bound for odd graphs that is higher than that of Fact 1.

## 3 Techniques

### 3.1 Upper Bound

Here we describe a linear optimization technique invented in [12] to derive upper bounds on the pebbling numbers of graphs.

Let  $T$  be a subtree of a graph  $G$  rooted at the vertex  $r$ , with at least two vertices. For a vertex  $v \in V(T)$ , a *parent* of  $v$ , denoted by  $v^+$ , is the unique neighbor of  $v$  in  $T$  whose distance to  $r$  is one less than that of  $v$ . Moreover  $v$  is called a *child* of  $v^+$ ). We say that  $T$  is an  *$r$ -strategy* if we assign to it a non-negative *weight function*  $w$  having the properties that  $w(r) = 0$  and  $w(v^+) \geq 2w(v)$  for every vertex  $v \in V(T)$  that is not a neighbor of  $r$ . In addition,  $w(v) = 0$  for vertices not in  $T$ .

Now set  $\mathbf{T}$  to be the configuration defined by  $\mathbf{T}(r) = 0$ ,  $\mathbf{T}(v) = 1$  for all  $v \in V(T) - \{r\}$ , and  $\mathbf{T}(v) = 0$  for all  $v \in V(G) - V(T)$ . Then the *weight* of any configuration  $C$ , including  $\mathbf{T}$ , is defined to be  $w(C) = \sum_{v \in V} w(v)C(v)$ . The following Lemma 11 provides an upper bound on  $\pi(G)$ .

**Lemma 11 (Weight Function Lemma, [12]).** *Let  $T$  be an  $r$ -strategy of  $G$  with associated weight function  $w$ . Suppose that  $C$  is an  $r$ -unsolvable configuration of pebbles on  $V(G)$ . Then  $w(C) \leq w(\mathbf{T})$ .*

The main use of Lemma 11 is as follows. Given a collection of  $r$ -strategies, the Weight Function Lemma delivers a corresponding set of linear equations. From these, one can use linear optimization to maximize the size of a configuration, subject to those constraints. If  $\alpha$  is the result of that optimization, then the size of every  $r$ -unsolvable configuration is at most  $\lfloor \alpha \rfloor$  and so  $\pi(G, r) \leq \lfloor \alpha \rfloor + 1$ .

A special instance of Lemma 11 yields the following result.

**Lemma 12 (Uniform Covering Lemma, [12]).** *Let  $\mathcal{T}$  be a set of strategies for a root  $r$  of a graph  $G$ . If there is some  $q$  such that, for each vertex  $v \neq r$ , we have  $\sum_{T \in \mathcal{T}} T(v) = q$ , then  $\pi(G, r) = n(G)$ .*

### 3.2 Lower Bound

Now we turn to a technique introduced in [8] to derive lower bounds for the pebbling numbers of graphs.

**Lemma 13 (Small Neighborhood Lemma [8]).** *Let  $G$  be a graph and  $u, v \in V(G)$ . If  $N_a[u] \cap N_b[v] = \emptyset$  and  $|N_a[u] \cup N_b[v]| < 2^{a+b+1}$ , then  $G$  is not Class 0.*

The idea behind Lemma 13 is that one considers the configuration that places  $2^{a+b+1} - 1$  pebbles on  $u$ , 1 pebble on each vertex of  $V(G) - (N_a[u] \cup N_b[v])$ , and no pebbles elsewhere. It is not difficult to argue that this configuration is  $v$ -unsolvable and, under the hypotheses of Lemma 13, has size at least  $n(G)$ . Thus, what the idea behind the Small Neighborhood Lemma delivers is slightly stronger: if  $N_a[u] \cap N_b[v] = \emptyset$  then  $\pi(G, u) \geq n(G) + 2^{a+b+1} - |N_a[u] \cup N_b[v]|$ .

With this in mind, when attempting to prove that a graph is not Class 0, one always checks if the Small Neighborhood Lemma applies. We show in Theorem 19 below that this lemma cannot apply to odd graphs. Thus, if one attempts to prove that some odd graph is not Class 0, a different method would be required.

## 4 Proofs

We begin with an important result that describes the distance structure of Kneser graphs. This result and its consequent corollary will be used in both the upper and lower bound arguments that follow.

**Lemma 14** ([15]). *Let  $A$  and  $B$  be two different vertices of  $K(m, t)$ , where  $t \geq 2$  and  $m \geq 2t + 1$ . If  $|A \cap B| = s$ , then  $\text{dist}(A, B) = \min\{2\lceil \frac{t-s}{m-2t} \rceil, 2\lceil \frac{s}{m-2t} \rceil + 1\}$ . In particular,  $D(K(m, t)) = \lceil \frac{t-1}{m-2t} \rceil + 1$ .*

For odd graphs, this yields the following characterization of vertices at a fixed distance from any given vertex, a corollary that is easily proved by induction.

**Corollary 15.** *Let  $A \in V(K(2t+1, t))$ . For each  $0 \leq d \leq t$  we have  $B \in N_d(A)$  if and only if  $|B \cap A| = t - d/2$  for even  $d$  and  $|B \cap A| = \lfloor d/2 \rfloor$  for odd  $d$ . Consequently  $|N_d(A)| = \binom{t}{\lfloor d/2 \rfloor} \binom{t+1}{\lceil d/2 \rceil}$  for all  $d$ .*

### 4.1 Upper Bounds

Because Kneser graphs are vertex-transitive, we know that for every vertex  $r$  we have  $\pi(K(m, t)) = \pi(K(m, t), r)$ . Thus we may set  $r = \{1, \dots, t\}$  in each case.

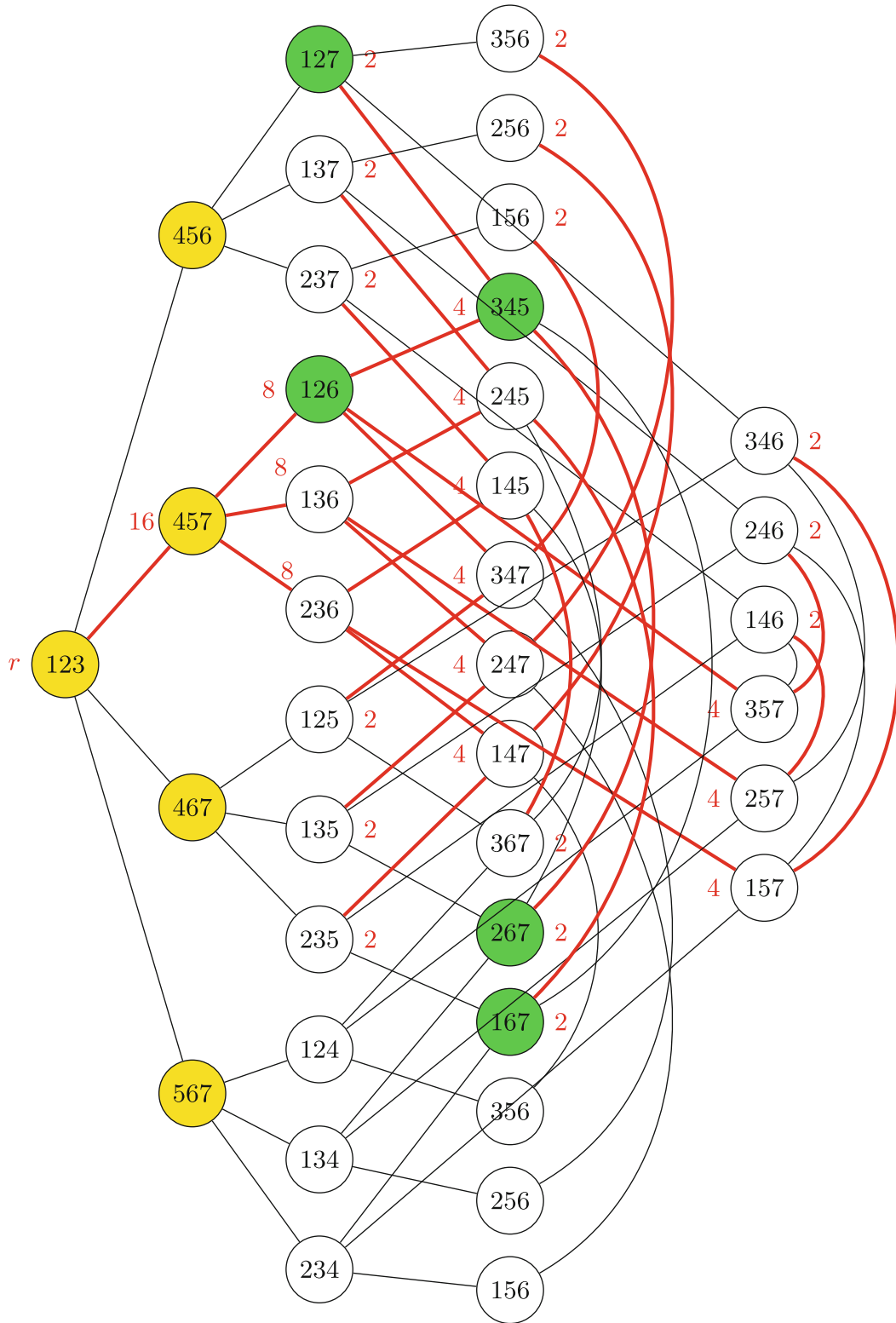
#### Proof of Theorem 7

*Proof.* Let  $G = K(7, 3)$ . We describe a particular  $r$ -strategy  $\mathbf{T}$  (see Fig. 1, with weights in red). From this, we set  $\mathcal{T}$  to be the set of all  $r$ -strategies determined by the set of automorphisms of  $G$  that fix  $r$ . The result of summing together all the corresponding inequalities given by Lemma 11 is that every pair of vertices having the same distance from  $r$  will have the same coefficient.

Thus, note that  $\mathcal{T}$  is a set of  $3!4! = 144$   $r$ -strategies, one for each permutation of  $\{1, \dots, 7\}$  that fixes  $r$ . As  $D(G) = 3$ , and considering the structure of  $G$  from Corollary 15, we see that  $|N_1(r)| = 4$ ,  $|N_2(r)| = 12$ , and  $|N_3(r)| = 18$ . For each  $d$  define  $c_d$  to be the average of the coefficients in  $N_d(r)$ :  $c_1 = 16/4 = 4$ ,  $c_2 = [3(8) + 6(2)]/12 = 3$ , and  $c_3 = [9(4) + 9(2)]/18 = 3$ . We now consider the sum of all these inequalities and then re-scale by dividing the result by 144. The result is that if  $v \in N_d(r)$  then the coefficient of  $C(v)$  in the re-scaled inequality equals  $c_d$ . Thus we derive

$$\begin{aligned}
 3|C| &= \sum_{v \neq r} 3C(v) \\
 &\leq \sum_{v \in N_1(r)} 4C(v) + \sum_{v \in N_2(r)} 3C(v) + \sum_{v \in N_3(r)} 3C(v) \\
 &\leq \sum_{v \in N_1(r)} 4 + \sum_{v \in N_2(r)} 3 + \sum_{v \in N_3(r)} 3 \quad (\text{by Lemma 11}) \\
 &= 3(n(K(7, 3)) - 1) + |N_1(r)| \\
 &= 3(35) + 1.
 \end{aligned}$$

Hence  $|C| \leq 35$  and so  $\pi(K(7, 3)) \leq 36$ . □



**Fig. 1.** The Kneser graph  $K(7, 3)$ , with red edges showing the strategy  $\mathcal{T}$  defined in the proof of Theorem 7, and yellow and green vertices illustrating  $N_1[123] \cup N_1[345]$  in the proof of Theorem 19. It is easy to see that  $N_2[123] \cup N_0[345]$  is a much larger set, containing 18 vertices instead of 10. Note that vertices 356, 256, and 156 have been drawn twice (near the top and the bottom) for ease in drawing their edges and that  $N_3(123)$  has been drawn in the rightmost two columns for similar reasons.

**Proof of Theorem 8**

*Proof.* Let  $G = K(9, 4)$ . We describe a particular  $r$ -strategy  $\mathbf{T}$  (see Fig. 2), using the tree  $T$  defined as follows: choose a vertex  $v \in N_1(r)$  and set  $T_0 = \{r\}$  and  $T_1 = \{v\}$ ; for each  $d \in \{2, 3, 4\}$  set  $T_d = \{u \in N_d(r) \cap N_1(w) \mid w \in T_{d-1}\}$ ; then set  $T_5 = \{u \in (N_5(r) - T_4) \cap N_1(w) \mid w \in T_4\}$ . Note that  $|T_1| = 1$ ,  $|T_2| = \binom{4}{3} \binom{1}{1} = 4$ ,  $|T_3| = \binom{4}{1} \binom{4}{3} = 16$ ,  $|T_4| = \binom{4}{2} \binom{4}{1} = 24$ , and  $|T_5| = \binom{4}{2} \binom{4}{2} = 36$ . Indeed, these calculations are derived from observing that the distance from a vertex  $u \in T_d$  to  $r$  is  $d$ , while its distance to  $v$  is  $d - 1$ , and using Lemma 14 for both instances. Now define  $\mathbf{T}$  by giving weight  $160/2^d$  to each vertex in  $T_d$ .

From this, we set  $\mathcal{T}$  to be the set of all  $r$ -strategies determined by the set of automorphisms of  $K(9, 4)$  that fix  $r$ . The result of summing together all the corresponding inequalities given by Lemma 11 is that every pair of vertices having the same distance from  $r$  will have the same coefficient.

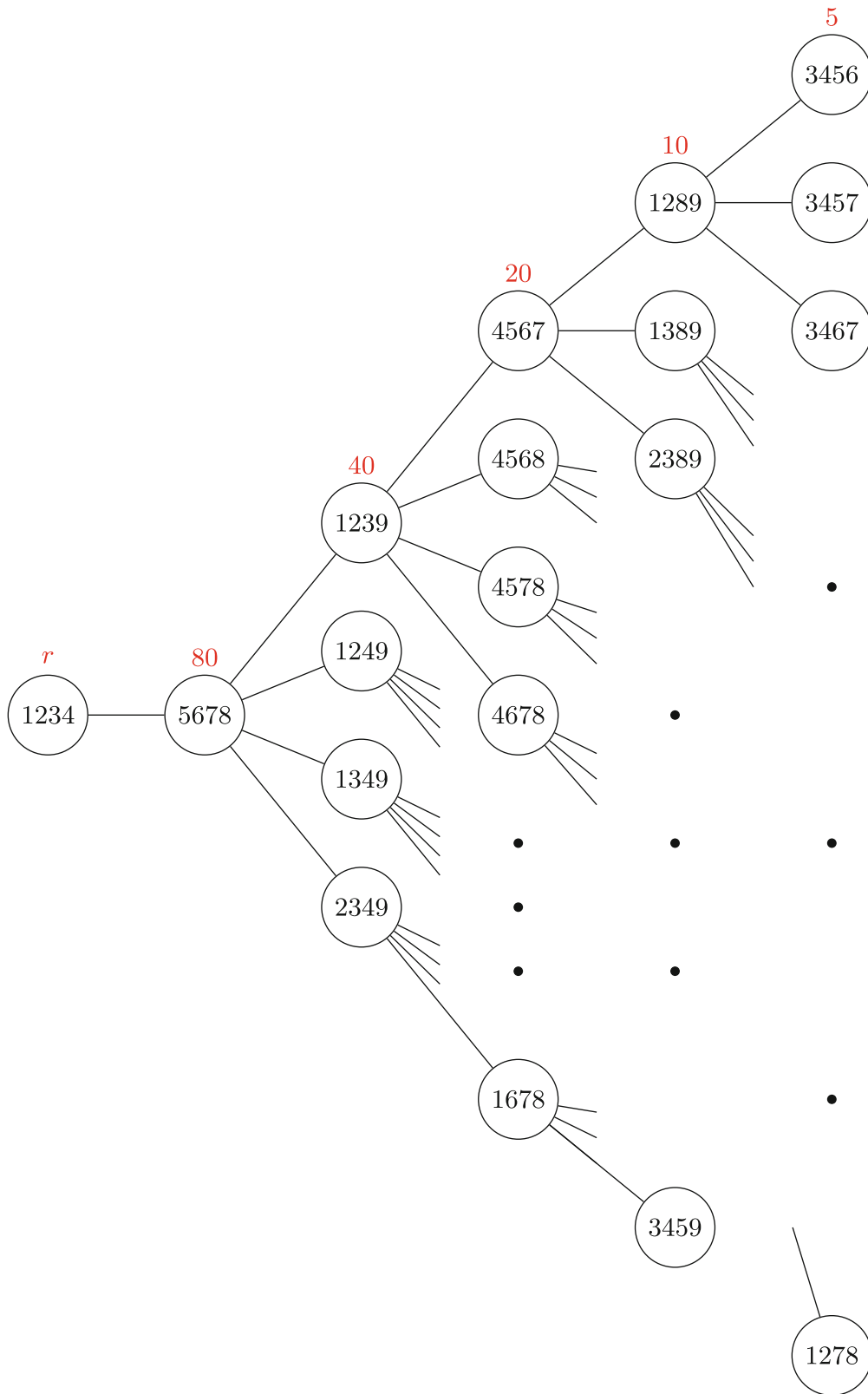
Thus, note that  $\mathcal{T}$  is a set of  $4!5! = 2880$   $r$ -strategies, one for each permutation of  $\{1, \dots, 9\}$  that fixes  $r$ . As  $D(G) = 4$ , and considering the structure of  $G$  from Corollary 15, we see that  $|N_1(r)| = 5$ ,  $|N_2(r)| = 20$ ,  $|N_3(r)| = 40$ , and  $|N_4(r)| = 60$  (see Table 1). For each  $d$  define  $c_d$  to be the average of the coefficients in  $N_d(r)$ :  $c_1 = 80/5 = 16$ ,  $c_2 = [4(40)]/20 = 8$ ,  $c_3 = [16(20)]/40 = 8$ , and  $c_4 = [24(10) + 36(5)]/60 = 7$ . We now consider the sum of all these inequalities and then re-scale by dividing the result by 2880. The result is that if  $v \in N_d(r)$  then the coefficient of  $C(v)$  in the re-scaled inequality equals  $c_d$ . Thus we derive

$$\begin{aligned} 7|C| &= \sum_{v \neq r} 7C(v) \\ &\leq \sum_{v \in N_1(r)} 16C(v) + \sum_{v \in N_2(r)} 8C(v) + \sum_{v \in N_3(r)} 8C(v) + \sum_{v \in N_4(r)} 7C(v) \\ &\leq \sum_{v \in N_1(r)} 16 + \sum_{v \in N_2(r)} 8 + \sum_{v \in N_3(r)} 8 + \sum_{v \in N_3(r)} 7 \quad (\text{by Lemma 11}) \\ &= (5)(16) + (20)(8) + (40)(8) + (60)(7) \\ &= 980. \end{aligned}$$

Hence  $|C| \leq 140$  and so  $\pi(K(9, 4)) \leq 141$ . □

**Proof of Theorem 9**

*Proof.* Let  $G = K(10, 4)$ . We describe a particular  $r$ -strategy  $\mathbf{T}$  (see Fig. 3), using the tree  $T$  defined as follows: choose vertex  $v = \{5, 6, 7, 8\} \in N_1(r)$  and define the set  $Z = \{9, 0\}$ . We assign the label  $(x, y, z)$  to a vertex  $u$  if  $u$  shares  $x$ ,  $y$ , and  $z$  elements with  $r$ ,  $v$ , and  $Z$ , respectively;  $V(x, y, z)$  will denote the set of vertices with such a label. We add edges in  $T$  from  $v$  to all its neighbors in  $N_2(r)$ ; i.e. to  $V(3, 0, 1) \cup V(2, 0, 2)$ . Because  $V(2, 2, 0) \subset N_2(r) \cap N_1(u)$  for some  $u \in V(2, 0, 2)$ , we extend  $T$  with edges from  $V(2, 0, 2)$  to  $V(2, 2, 0)$ . Finally, we add edges in  $T$  from  $V(3, 0, 1)$  to  $V(1, 2, 1) \cup V(1, 3, 0)$ . Note that  $|V(3, 0, 1)| = 8$ ,



**Fig. 2.** A schematic diagram of the strategy  $T$  in  $K(9,4)$  defined in the proof of Theorem 8, with weights in red. As in Fig. 1, the vertices in both of the rightmost two columns have maximum distance (4) from  $r$  (1234); the two columns differ, however, in their distances (3 and 4, respectively) from 5678.

**Table 1.** Number and structure of  $K(9, 4)$  vertices per distance to the root  $\{1, 2, 3, 4\}$ , according to Corollary 15. Columns 3 and 4 show the numbers of elements chosen from the sets  $\{1, 2, 3, 4\}$  and  $\{5, 6, 7, 8, 9\}$ , respectively, for vertices at each distance; e.g.,  $A \in N_2(\{1, 2, 3, 4\})$  if and only if  $|A \cap \{1, 2, 3, 4\}| = 3$  and  $|A \cap \{5, 6, 7, 8, 9\}| = 1$ .

Distance $i$	$ N_i(\{1, 2, 3, 4\}) $	$\{1, 2, 3, 4\}$	$\{5, 6, 7, 8, 9\}$
0	$\binom{4}{4} \cdot \binom{5}{0} = 1$	4	0
1	$\binom{4}{0} \cdot \binom{5}{4} = 5$	0	4
2	$\binom{4}{3} \cdot \binom{5}{1} = 20$	3	1
3	$\binom{4}{1} \cdot \binom{5}{3} = 40$	1	3
4	$\binom{4}{2} \cdot \binom{5}{2} = 60$	2	2

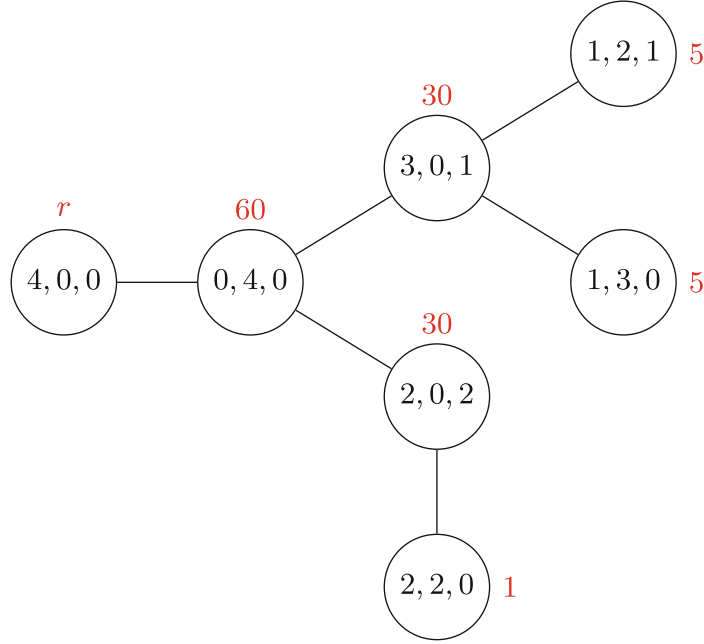
$|V(2, 0, 2)| = 6$ ,  $|V(2, 2, 0)| = 36$ ,  $|V(1, 2, 1)| = 48$ , and  $|V(1, 3, 0)| = 16$ , while  $|N_1(r)| = 15$ ,  $|N_2(r)| = 114$ , and  $|N_3(r)| = 80$ .

Now we define  $\mathbf{T}$  by giving weight 60 to  $v$ , weight 30 to each vertex of  $V(3, 0, 1) \cup V(2, 0, 2)$ , weight 5 to each vertex of  $V(1, 2, 1) \cup V(1, 3, 0)$ , and weight 1 to each vertex of  $V(2, 2, 0)$ . From this, we set  $\mathcal{T}$  to be the set of all  $r$ -strategies determined by the set of  $4!6!$  automorphisms of  $K(10, 4)$  that fix  $r$ . The result of summing together all the corresponding inequalities given by Lemma 11 is that every pair of vertices having the same distance from  $r$  will have the same coefficient.

For each  $d$  define  $c_d$  to be the average of the coefficients in  $N_d(r)$ :  $c_1 = [60(1)]/15 = 4$ ,  $c_2 = [30(8)+30(6)+1(36)]/114 = 4$ , and  $c_3 = [5(48)+5(16)]/80 = 4$ . We now consider the sum of all these inequalities and then re-scale by dividing the result by  $4!6!$ . The result is that if  $v \in N_d(r)$  then the coefficient of  $C(v)$  in the re-scaled inequality equals  $c_d$ . By Lemma 12 we have that  $\pi(G, r) = n(G) = 210$ ; i.e.  $K(10, 4)$  is Class 0.  $\square$

### Proof of Theorem 10

*Proof.* Let  $G = K(2t + 1, t)$ . Theorems 7 and 8 already have better bounds, so we will assume that  $t \geq 5$ . As in the proof of Theorem 8, we set  $r = \{1, \dots, t\}$ , choose some  $v \in N_1(r)$ , and define the tree  $T$  by  $T_0 = \{r\}$ ,  $T_1 = \{v\}$ , and for each  $d \in \{2, \dots, t\}$  set  $T_d = \{u \in N_d(r) \cap N_1(w) \mid w \in T_{d-1}\}$ , with  $T_{t+1} = \{u \in (N_t(r) - T_t) \cap N_1(w) \mid w \in T_t\}$ . We note that  $|N_d(r)| = \binom{t}{\lfloor d/2 \rfloor} \binom{t+1}{\lceil d/2 \rceil}$  for  $1 \leq d \leq t$  and that  $|T_d| = \binom{t}{\lfloor d/2 \rfloor} \binom{t}{\lceil d/2 \rceil - 1}$  for  $1 \leq d \leq t - 1$ , with  $|T_t| = \binom{t}{\lfloor t/2 \rfloor} \binom{t}{\lceil t/2 \rceil - 1}$  and  $|T_{t+1}| = \binom{t}{\lfloor t/2 \rfloor} \binom{t}{\lceil t/2 \rceil}$  when  $t$  is even and  $|T_t| = \binom{t}{\lfloor t/2 \rfloor} \binom{t}{\lceil t/2 \rceil}$  and  $|T_{t+1}| = \binom{t}{\lfloor t/2 \rfloor} \binom{t}{\lceil t/2 \rceil - 1}$  when  $t$  is odd. Now define  $\mathbf{T}$  by giving weight  $w_d = (t + 1)2^{t+1-d}$  to each vertex in  $T_d$  for all  $d > 0$ .



**Fig. 3.** A schematic diagram of the strategy  $\mathcal{T}$  in  $K(10,4)$  defined in the proof of Theorem 9, with weights in red. Each vertex of the tree represents a set of vertices of the form  $(x, y, z)$ , where  $x, y,$  and  $z$  are the numbers of digits chosen from  $\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7, 8\},$  and  $\{9, 0\},$  respectively.

From this, we set  $\mathcal{T}$  to be the set of all  $r$ -strategies determined by the set of  $t!(t+1)!$  automorphisms of  $G$  that fix  $r$ . The result of summing together all the corresponding inequalities given by Lemma 11 is that every pair of vertices having the same distance from  $r$  will have the same coefficient. For each  $d$  define  $c_d$  to be the average of the coefficients in  $N_d(r)$ :

$$c_d = \begin{cases} |T_d|w_d/|N_d(r)| = \lceil d/2 \rceil 2^{t+1-d} & \text{for } d < t \text{ and} \\ (|T_t|w_t + |T_{t+1}|w_{t+1})/|N_t(r)| = \begin{cases} 3t/2 + 1 & \text{for even } t \text{ and} \\ 3\lceil t/2 \rceil & \text{for odd } t. \end{cases} \end{cases}$$

We now consider the sum of all these inequalities and then re-scale by dividing the result by  $t!(t+1)!$ . The result is that if  $v \in N_d(r)$  then the coefficient of  $C(v)$  in the re-scaled inequality equals  $c_d$ . Because  $c_t$  is the smallest coefficient when  $t \geq 6$  (it is  $c_4$  when  $t = 5$  but we can add some edges from  $T_5$  into  $N_4(r) - T_4$ , as in the proof of Theorem 7, with sufficiently chosen weights to remedy this without effecting the calculations below), and using Lemma 11, we derive

$$\begin{aligned} c_t|C| &= \sum_{v \neq r} c_t C(v) \leq \sum_{d=1}^t \sum_{v \in N_d(r)} c_d C(v) \\ &\leq \sum_{d=1}^t \sum_{v \in N_d(r)} c_d = \sum_{d=1}^t |N_d(r)| c_d. \end{aligned} \tag{1}$$



By computing the ratios  $r_d = |N_d(r)|c_d/|N_{d-1}(r)|c_{d-1}$  we find that  $r_d = (t - a + 1)/2a$  for  $d \in \{2a, 2a + 1\}$ , showing that the sequence  $|N_1(r)|c_1, \dots, |N_t(r)|c_t$  is unimodal with its maximum occurring when  $d = j := 2\lceil(t + 1)/3\rceil - 1$ . Hence from Inequality 1 we obtain the upper bound

$$|C| < t|N_j(r)|c_j/c_t, \quad (2)$$

which yields that

$$\pi(G) \leq t|N_j(r)|c_j/c_t = t \binom{t}{\lfloor j/2 \rfloor} \binom{t+1}{\lceil j/2 \rceil} \lceil j/2 \rceil 2^{t+1-j} / (3t/2). \quad (3)$$

Because the bound in Inequality 2 is so generous, we can dispense with floors and ceilings and addition/subtraction by one, approximating  $j/2$  by  $t/3$  and considering it to be an integer, thereby replacing the right side of Inequality 3 by the following. We use the notation  $x^h = x(x-1)\cdots(x-h+1)$ , observe that  $x^h \leq (x-h/2)^h$ , and make use of the lower bound  $x! \geq (x/e)^x \sqrt{2ex}$ , which works for all  $x$ , rather than using Stirling's asymptotic formula.

$$\begin{aligned} t \binom{t}{t/3}^2 \frac{(t/3)2^{2t/3}}{(3t/2)} &= \left( \frac{t^{t/3}}{(t/3)!} \right)^2 \frac{(2t)2^{2t/3}}{9} \leq \left( \frac{5t}{6} \right)^{2t/3} \left( \frac{3e}{t} \right)^{2t/3} \frac{(2t)2^{2t/3}}{9(2et/3)} \\ &= \frac{(5e)^{2t/3}}{3e} < 5.7^t/8 < n \left( \frac{\pi^{\alpha/2}}{2^{3+2\alpha}} \right) t^{\alpha/2} < .045n^\alpha (\lg n)^{\alpha/2}, \end{aligned}$$

where  $\alpha = \log_4((5e)^{2/3})$ . This completes the proof.  $\square$

## 4.2 Lower Bound Attempt

The following two claims will be useful in proving Theorem 19.

**Claim 16.** *The following inequalities hold for all  $k \geq 1$ .*

1.  $\binom{4k+1}{k} / \binom{4k-3}{k-1} > 4$ .
2.  $\binom{4k+2}{k} \binom{4k+4}{k+2} / \binom{4k-2}{k-1} \binom{4k}{k+1} > 16$ .
3.  $\binom{4k+1}{k} \binom{4k+2}{k} / \binom{4k-3}{k-1} \binom{4k-2}{k-1} > 16$ .
4.  $\binom{4k+3}{k} \binom{4k+4}{k+1} / \binom{4k-1}{k-1} \binom{4k}{k} > 16$ .

*Proof.* We only display the proof for the first inequality, as the others use identical techniques. Indeed, we calculate

$$\begin{aligned} \frac{\binom{4k+1}{k}}{\binom{4k-3}{k-1}} &= \frac{(4k+1)\cdots(4k-k+2)(k-1)!}{(4k-3)\cdots(4k-k-1)k!} \\ &= \frac{(4k+1)\cdots(4k-2)}{(4k-k+1)\cdots(4k-k-1)k} \\ &= \left( \frac{4k+1}{k} \right) \left( \frac{4k}{3k+1} \right) \left( \frac{4k-1}{3k} \right) \left( \frac{4k-2}{3k-1} \right) > \frac{4k}{k} = 4 \end{aligned}$$

since  $k \geq 1$ .  $\square$

The next corollary follows from Claim 16 by induction.

**Corollary 17.** *The following inequalities hold for all  $k \geq 1$ .*

1.  $\binom{4k+1}{k} > 4^k$ .
2.  $\binom{4k+2}{k} \binom{4k+4}{k+2} > 16^k$ .
3.  $\binom{4k+1}{k} \binom{4k+2}{k} > 16^k$ .
4.  $\binom{4k+3}{k} \binom{4k+4}{k+1} > 16^k$ .

For any vertex  $r$  in  $K(2t + 1, t)$  and any  $0 \leq d \leq t$  define  $g_d(t) = |N_d(r)|$ .

**Claim 18.** *The following inequalities hold for every  $0 \leq d \leq t$ .*

1.  $g_d(2d + 2) + g_{d+1}(2d + 2) \geq 2^{2d+2}$ .
2.  $2g_d(2d + 1) \geq 2^{2d+1}$ .

*Proof.* Recall the formulas from Corollary 15:  $g_d(t) = \binom{t}{\lfloor d/2 \rfloor} \binom{t+1}{\lceil d/2 \rceil}$  for even  $d$  and  $g_d(t) = \binom{t}{\lfloor d/2 \rfloor} \binom{t+1}{\lceil d/2 \rceil}$  for odd  $d$ . We will only display the proof for the first inequality, as the second uses identical techniques.

When  $d = 2s - 1$  is odd we have by Corollary 17 that

$$\begin{aligned} g_{2s-1}(4s) + g_{2s}(4s) &= \binom{4s}{s-1} \binom{4s+1}{s} + \binom{4s}{s} \binom{4s+1}{s} \\ &= \binom{4s+1}{s}^2 > 4^{2s} = 2^{2d+2}. \end{aligned}$$

The case when  $d = 2s$  is even is proven similarly. □

**Theorem 19.** *The hypotheses of Lemma 13 are not satisfied for any odd graph.*

*Proof.* Recall from above that  $D(K(2t + 1, t)) = t$  and define  $f_d(t) = |N_d[A]| = \sum_{i=0}^d g_d(t)$ , where  $A$  is any vertex. Then we must show that  $f_a(t) + f_b(t) \geq 2^{a+b+1}$  for every  $a \geq b$  and  $t \geq a + b + 1$ .

We first reduce to the “balanced” case, in which  $a \leq b + 1$ ; that is, we prove that  $f_a(t) + f_b(t) \geq f_x(t) + f_y(t)$ , where  $x = \lceil \frac{a+b}{2} \rceil$  and  $y = \lfloor \frac{a+b}{2} \rfloor$ . It is sufficient to show that  $f_a(t) + f_b(t) \geq f_{a-1}(t) + f_{b+1}(t)$  whenever  $a > b + 1$ . This inequality is equivalent to

$$g_a(t) = f_a(t) - f_{a-1}(t) \geq f_{b+1}(t) - f_b(t) = g_{b+1},$$

which is trivial since Corollary 15 states that  $g_d(t) = \binom{t}{\lfloor d/2 \rfloor} \binom{t+1}{\lceil d/2 \rceil}$  and binomial coefficients increase up to  $\lfloor t/2 \rfloor$ .

Second, we reduce to the case in which  $t = a + b + 1$ ; that is, we prove that  $f_x(t) + f_y(t) \geq f_x(a + b + 1) + f_y(a + b + 1)$ . This inequality follows simply from the property that  $\binom{t}{d}$  is an increasing function in  $t$  when  $d$  is fixed.

Third, we note the obvious relation that  $f_x(a + b + 1) + f_y(a + b + 1) \geq g_x(a + b + 1) + g_y(a + b + 1)$ , since each  $g_d(t)$  is merely the final term of the summation  $f_d(t)$ .

Thus it suffices to show that

1.  $g_y(2y + 2) + g_{y+1}(2y + 2) \geq 2^{2y+2}$  and
2.  $2g_y(2y + 1) \geq 2^{2y+1}$ ,

which follows from Claim 18. The above arguments yield

$$\begin{aligned}
 f_a(t) + f_b(t) &\geq f_x(t) + f_y(t) \\
 &\geq f_x(a + b + 1) + f_y(a + b + 1) \\
 &\geq f_x(x + y + 1) + f_y(x + y + 1) \\
 &\geq g_x(x + y + 1) + g_y(x + y + 1) \geq 2^{a+b+1}.
 \end{aligned}$$

The final inequality follows from the identity  $x + y = a + b$  and the two cases that  $x = y$  or  $x = y + 1$ . □

## 5 Concluding Remarks

As discussed above, all diameter two Kneser graphs are Class 0, and we verified in Theorem 9 that the diameter three Kneser graph  $K(10, 4)$  is also Class 0, while the diameter three Kneser graph  $K(7, 3)$  remains undecided. By Lemma 14 we see that  $D(K(m, t)) \leq 3$  for all  $m \geq (5t - 1)/2$ . The following theorem shows that graphs with high enough connectivity are Class 0 (the value  $2^{2D(G)+3}$  is not thought to be best possible, but cannot be smaller than  $2^{D(G)}/D(G)$ ). It is this theorem that was used to prove Theorem 5.

**Theorem 20** ([9]). *If  $G$  is  $2^{2D(G)+3}$ -connected, then  $G$  is Class 0.*

Accordingly, Theorem 20 implies that diameter three Kneser graphs with connectivity at least  $2^9$  are Class 0, which occurs when  $\binom{m-t}{t} \geq 512$  because connectivity equals degree for Kneser graphs. This begs the following subproblem of Conjecture 6.

**Problem 21.** *For all  $t \geq 5$  and  $m \geq (5t - 1)/2$ , if  $\binom{m-t}{t} \leq 511$  then is  $K(m, t)$  Class 0? In particular, can the Weight Function Lemma be used to prove so?*

For example, if  $t = 5$ , then the interval of interest in Problem 21 is  $12 \leq m \leq 16$ .

We also see from our work both the power and the limitations of the usage of the Weight Function Lemma. For example, it did not produce a very close bound for  $K(9, 4)$ , which has diameter 4, but did produce the actual pebbling number for  $K(10, 4)$ , which has diameter 3. Indeed the power of strategies weakens as the diameter grows. Curiously, though, it did not yield a Class 0 result for  $K(7, 3)$ , which also has diameter 3. (Conceivably, it did give the right answer, but we do not believe this.) The trees we used in the proof for this case were very simple and structured and were all isomorphic. In trying to improve the result, we had a computer generate hundreds of thousands of tree strategies and fed them into linear programming software and even used integer programming. No results were better than the bound we presented in Theorem 7.

For fixed  $t$  the Kneser graphs  $K(m, t)$  with the largest diameter ( $t$ ) have  $m = 2t + 1$ ; the odd graphs. We see that weight functions produce a fairly large

upper bound in this case, with the multiplicative factor of  $n^{26}(\lg n)^{63}$  attached, where  $n = n(K(2t + 1, t))$ . Nonetheless, this is the best known bound. Along these lines we offer the following additional subproblem of Conjecture 6.

**Problem 22.** *Find a constant  $c$  such that  $\pi(K(2t + 1, t)) \leq cn$ , where  $n = n(K(2t + 1, t))$ .*

## References

1. Adauto, M., Cruz, M., Figueiredo, C., Hurlbert, G., Sasaki, D.: On the pebbling numbers of some snarks. [arXiv:2303.13292](https://arxiv.org/abs/2303.13292) [math.CO] (2023)
2. Alcón, L., Gutierrez, M., Hurlbert, G.: Pebbling in split graphs. *SIAM J. Discret. Math.* **28**(3), 1449–1466 (2014)
3. Alcón, L., Gutierrez, M., Hurlbert, G.: Pebbling in semi-2-trees. *Discret. Math.* **340**(7), 1467–1480 (2017)
4. Alcón, L., Hurlbert, G.: Pebbling in powers of paths. *Discret. Math.* **346**(5), 113315 (20 p.) (2023)
5. Chan, M., Godbole, A.P.: Improved pebbling bounds. *Discret. Math.* **308**(11), 2301–2306 (2008)
6. Chung, F.R.K.: Pebbling in hypercubes. *SIAM J. Discret. Math.* **2**(4), 467–472 (1989)
7. Clarke, T., Hochberg, R., Hurlbert, G.: Pebbling in diameter two graphs and products of paths. *J. Graph Theor.* **25**(2), 119–128 (1997)
8. Cranston, D.W., Postle, L., Xue, C., Yegerer, C.: Modified linear programming and class 0 bounds for graph pebbling. *J. Combin. Optim.* **34**(1), 114–132 (2017)
9. Czygrinow, A., Hurlbert, G., Kierstead, H., Trotter, W.: A note on graph pebbling. *Graphs Combin.* **18**(2), 219–225 (2002)
10. Hurlbert, G.: A survey of graph pebbling. *Congr. Numer.* **139**, 41–64 (1999)
11. Hurlbert, G.: Recent progress in graph pebbling. *Graph Theor. Notes N.Y.* **49**, 25–37 (2005)
12. Hurlbert, G.: The weight function lemma for graph pebbling. *J. Combin. Optim.* **34**(2), 343–361 (2017)
13. Lovász, L.: *Combinatorial Problems and Exercises*. North Holland, Amsterdam, New York, Oxford (1979)
14. Pachter, L., Snevily, H., Voxman, B.: On pebbling graphs. *Congr. Numer.* **107**, 65–80 (1995)
15. Valencia-Pabon, M., Vera, J.C.: On the diameter of Kneser graphs. *Discret. Math.* **305**(1–3), 383–385 (2005)

## Apêndice B

# Manuscrito: On the pebbling numbers of Flower, Blanuša and Watkins snarks

Este apêndice contém o manuscrito:

Matheus Adauto, Celina M. H. de Figueiredo, Glenn Hurlbert, Diana Sasaki. On the pebbling numbers of Flower, Blanuša and Watkins snarks. Publicado em *Discrete Applied Mathematics* [2].



# On the pebbling numbers of Flower, Blanuša and Watkins snarks<sup>☆</sup>

Matheus Adauto<sup>a</sup>, Celina de Figueiredo<sup>a</sup>, Glenn Hurlbert<sup>b</sup>, Diana Sasaki<sup>c,\*</sup>

<sup>a</sup> Federal University of Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brazil

<sup>b</sup> Virginia Commonwealth University, Richmond, United States of America

<sup>c</sup> Rio de Janeiro State University, Rio de Janeiro, Brazil

## ARTICLE INFO

### Article history:

Received 19 February 2024

Received in revised form 18 September 2024

Accepted 26 October 2024

Available online xxxx

### Keywords:

Graph pebbling

Snarks

Diameter

Girth

## ABSTRACT

Graph pebbling is a game played on graphs with pebbles on their vertices. A pebbling move removes two pebbles from one vertex and places one pebble on an adjacent vertex. The pebbling number  $\pi(G)$  is the smallest  $t$  so that from any initial configuration of  $t$  pebbles it is possible, after a sequence of pebbling moves, to place a pebble on any given target vertex. In this paper, we provide the first results on the pebbling numbers of snarks. Until now, only the Petersen graph had its pebbling number correctly established, although attempts had been made for the Flower and Watkins snarks.

© 2024 Elsevier B.V. All rights are reserved, including those for text and data mining, AI training, and similar technologies.

## 1. Introduction

Graph pebbling is a mathematical game or puzzle that involves moving pebbles along the edges of a connected graph, subject to certain rules. The objective of the game is to place a certain number of pebbles on specific vertices of the graph, typically with the aim of reaching a particular configuration of pebbles or minimizing the number of moves required to achieve a given configuration. Various forms of graph pebbling have applications in number theory, computer science, physics, and combinatorial optimization, and have been studied extensively in mathematics (see [10]).

In this paper,  $G = (V, E)$  is always a simple connected graph. The numbers of vertices and edges of  $G$  and its diameter are denoted by  $n(G)$ ,  $e(G)$ , and  $D(G)$ , respectively. For a vertex  $w$  and a positive integer  $k$ , denote by  $N_k[w]$  the set of all vertices that are at a distance at most  $k$  from  $w$ . The *girth* is the length of a shortest cycle in the graph.

### 1.1. Pebbling number

A *configuration*  $C$  on a graph  $G$  is a function  $C : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ . The value  $C(v)$  represents the number of pebbles at vertex  $v$ . A vertex with zero, one, at most one, or at least two pebbles on it is called *empty*, *a singleton*, *small*, or *big*, respectively. The size  $|C|$  of a configuration  $C$  is the total number of pebbles on  $G$ . A *pebbling move* consists of removing two pebbles from a vertex and placing one pebble on an adjacent vertex. For a *target* vertex  $r$ ,  $C$  is  *$r$ -solvable* if one can place a pebble on  $r$  after a sequence of pebbling moves, and is  *$r$ -unsolvable* otherwise. It was shown in [11,12] that deciding if  $C$  is  $r$ -solvable on  $G$  is NP-complete. The *pebbling number*  $\pi(G, r)$  is the minimum number  $t$  such that every configuration of size  $t$  is  $r$ -solvable. The *pebbling number of  $G$*  equals  $\pi(G) = \max_r \pi(G, r)$ .

<sup>☆</sup> Partially supported by CNPq, FAPERJ and CAPES.

\* Corresponding author.

E-mail addresses: [adauto@cos.ufrj.br](mailto:adauto@cos.ufrj.br) (M. Adauto), [celina@cos.ufrj.br](mailto:celina@cos.ufrj.br) (C. de Figueiredo), [ghurlbert@vcu.edu](mailto:ghurlbert@vcu.edu) (G. Hurlbert), [diana.sasaki@ime.uerj.br](mailto:diana.sasaki@ime.uerj.br) (D. Sasaki).



three vertex orbits. Thus the only targets necessary to contemplate are, without loss of generality,  $v_0$ ,  $z_0$ , and  $x_0$ . Thus the Flower snark  $J_m$  ( $m = 2k + 1$ ) has diameter  $k + 2$ , as well as girth  $m$  for  $m \in \{3, 5\}$  and 6 if  $m \geq 7$ .

The Watkins snark is the snark with 50 vertices discovered by John J. Watkins in 1989 [18] depicted in Fig. 4. The Watkins snark has diameter 7 and girth 5.

### 1.3. Motivation

Studying the pebbling numbers in specific snarks is important because it helps to explore the boundaries of graph properties in complex and challenging contexts. The importance of snarks arises from the fact that famous conjectures would have snarks as minimal counterexamples, for instance Tutte's 5-Flow Conjecture, the 1-Factor Double Cover Conjecture, and the Cycle Double Cover Conjecture. Evaluating pebbling numbers in snarks provides important insights into how pebbling problems behave on graphs with extreme properties, helping to refine and expand understanding of the limits and capabilities of pebbling algorithms. Furthermore, Pebbling concepts can be applied to communication networks and distributed computing. Understanding pebbling in extreme graphs like snarks can improve algorithms and techniques in these areas. Studying pebbling in snarks also tests the limits of current pebbling methods. With infinite families such as powers of paths,  $k$ -paths, and interval graphs, one can leverage inductive methods because of hereditary properties. With non-hereditary infinite families such as Kneser and Johnson graphs, there is much symmetry that one can exploit to obtain results. One can hope to be pushed into developing new tools by expanding to well-studied families with less symmetry but still sharing some implicit structure. This work is a preliminary step in that direction, first finding the limits of current pebbling methods on such a family. Hence, this study's importance lies in expanding theoretical knowledge about complex graphs and in the potential application of pebbling concepts in practical contexts and more general algorithms.

### 1.4. Results

It is known that the Petersen graph is Class 0 [7]. It is the smallest snark and was the only one whose pebbling number was known. We use the Small Neighborhood Lemma presented in Section 2 to prove that the Petersen graph is the only Class 0 snark with at least 23 vertices or girth at least 5.

**Theorem 1.** *The only Class 0 snark of girth at least 5 is the Petersen graph. Moreover, if  $G$  is a Class 0 snark with girth at most 4, then  $n(G) \leq 22$ .*

We also prove the following bounds on the pebbling numbers of snarks. Recall that the basic lower and upper bounds for a graph are  $\max\{n(G), 2^{D(G)}\} \leq \pi(G) \leq (n(G) - D(G))(2^{D(G)} - 1) + 1$ . For the Flower snarks, this means that  $12 \leq \pi(J_3) \leq 64$ ,  $20 \leq \pi(J_5) \leq 241$ , and  $32 \leq \pi(J_7) \leq 691$ . Theorem 1 improves the  $J_5$  lower bound to  $21 \leq \pi(J_5)$ . Theorem 2 provides much tighter bounds, and corrects a claim of [13] that, for  $m \geq 5$ ,  $\pi(J_m) = 4m + 1$ . In fact, Theorem 2 identifies the correct order of magnitude ( $2^{k+2}$ ) of  $\pi(J_m)$  as  $m$  grows, up to some constant between 1 and 1.8.

**Theorem 2.** *We have  $\pi(J_3) \leq 13$ ,  $23 \leq \pi(J_5) \leq 30$ ,  $41 \leq \pi(J_7) \leq 61$ , and for all  $k \geq 3$  with  $m = 2k + 1$ , we have  $2^{k+2} + 8 \leq \pi(J_m) \leq \lfloor 2^{k+2}9/5 + 2k - 18/5 \rfloor + 1$ .*

For the Blanuša snarks the basic bounds give  $18 \leq \pi(B_i) \leq 211$ . Theorem 1 improves the  $B_i$  lower bound to  $19 \leq \pi(B_i)$ . Theorem 3 provides much tighter bounds for  $B_i$ .

**Theorem 3.** *We have  $23 \leq \pi(B_i) \leq 34$ .*

For the Watkins snark  $W$  the basic bounds give  $128 \leq \pi(W) \leq 5462$ . Theorem 4 provides a tighter lower bound, and corrects a claim of [16] that  $\pi(W) = 166$ .

**Theorem 4.** *The pebbling number of the Watkins graph  $W$  satisfies  $183 \leq \pi(W)$ .*

## 2. Techniques

### 2.1. For lower bounds

Given a graph  $G$  with vertices  $u$  and  $v$  such that  $N_a[u] \cap N_b[v] = \emptyset$  for some non-negative integers  $a$  and  $b$ . Define the configuration  $C^* = C_{u,v}^*$  by  $C^*(v) = 2^{a+b+1} - 1$ ,  $C^*(x) = 0$  for all  $x \in (N_a[u] \cup N_b[v]) - \{v\}$ , and  $C^*(x) = 1$  otherwise. The authors of [6] proved the following lemma (SNL) to provide a lower bound on  $\pi(G)$ .

**Lemma 1** (Small Neighborhood Lemma [6]). *Let  $G$  be a graph and  $u, v \in V(G)$  such that  $N_a[u] \cap N_b[v] = \emptyset$  for some non-negative integers  $a$  and  $b$ . Then  $C^*$  is  $u$ -unsolvable. Consequently,  $\pi(G) \geq \pi(G, u) > |C^*|$ . In particular, if  $N_a[u] \cap N_b[v] = \emptyset$  and  $|N_a[u] \cup N_b[v]| < 2^{a+b+1}$ , then  $G$  is not Class 0.*



One can see how SNL is, in some sense, a sharpening of the basic exponential lower bound. One immediate consequence we will use here is the following corollary.

**Corollary 1.** *If  $G$  is an  $n$ -vertex cubic graph, with diameter at least 4 and girth at least 5, then there is an unsolvable configuration of size  $15 + (n - 14)$ .*

Another consequence we will use here is the following corollary.

**Corollary 2 ([6]).** *If  $G$  is an  $n$ -vertex Class 0 graph with diameter at least 3, then  $e(G) \geq \frac{5}{3}n - \frac{11}{3}$ .*

A graph  $H$  is a retract of a graph  $G$  if there is a function  $\phi : V(G) \rightarrow V(H)$  that preserves edges; that is, if  $uv \in E(G)$  then  $\phi(u)\phi(v) \in E(H)$ .

We will make use of the following lemma in the proof of the lower bound of Theorem 3, since a subgraph of the Blanuša graph has a  $C_9$  retract, and of the lower bound of Theorem 4, since a subgraph of the Watkins graph has a  $C_{15}$  retract.

**Lemma 2 (Retract Lemma [5]).** *If  $H$  is a retract of  $G$ , then  $\pi(H) \leq \pi(G)$ .*

The idea of the proof of Lemma 2 is straightforward, as any solution along edges in  $G$  has a corresponding solution along its retracted edges in  $H$ .

Another helpful lemma uses the notion of pebble weights. Given a target vertex  $r$ , define the  $r$ -weight of a pebble on a vertex  $v$  to be  $2^{-k}$ , where  $k$  is the distance from  $v$  to  $r$ . Furthermore, the  $r$ -weight of a configuration  $C$  is defined to be the sum of the  $r$ -weights of its pebbles.

**Lemma 3 ([8]).** *Suppose that a configuration  $C$  on a graph  $G$  is  $r$ -solvable for some target vertex  $r$ . Then  $C$  has  $r$ -weight at least 1.*

The lemma is proved by noting that a pebbling step never increases the  $r$ -weight of a configuration, and any configuration with a pebble on the target has  $r$ -weight at least 1. In fact, the  $r$ -weight is maintained if and only if the pebbling step decreases the distance to the target  $r$ . Hence, when  $G$  is a path and  $r$  is one of its leaves,  $r$ -weight at least 1 characterizes  $r$ -solvable configurations, which is not true for general graphs. However, a generalization of this  $r$ -weight concept is introduced as weights for upper bounds in Section 2.2.

## 2.2. For upper bounds

Here we describe a linear optimization approach introduced in [9]. For an unknown configuration  $C$  on a graph  $G$  with target vertex  $r$ , we consider a connected subgraph  $H$  of  $G$  that contains  $r$ . The intention is to derive a linear inequality in the variables  $C(v)$  with  $v \in V(H)$  that is satisfied whenever  $C$  is  $r$ -unsolvable. Given a collection of such inequalities over various choices of  $H$ , we can then maximize  $|C| = \sum_{v \in V(G)} C(v)$  subject to those constraints, assuming that  $C(v) \geq 0$  for all  $v \in V(G)$ . The optimum value of this linear program is therefore a strict lower bound on  $\pi(G, r)$ . This value may be tight for some graphs; however, this is really an integer optimization problem, and so typically will yield a result less than the truth. This idea was successfully carried out when  $H$  is a tree (generalized to some non-trees in [6]). We introduce the method now.

Let  $T$  be a subtree of a graph  $G$  rooted at vertex  $r$ , with at least two vertices. For a vertex  $v \in V(T)$  let  $v^+$  denote the parent of  $v$ ; i.e. the  $T$ -neighbor of  $v$  that is one step closer to  $r$  (we also say that  $v$  is a child of  $v^+$ ). We call  $T$  an  $r$ -strategy when we associate with it a non-negative weight function  $w_T$  with the property that  $w_T(r) = 0$  and  $w_T(v^+) \geq 2w_T(v)$  for every other vertex  $v$  that is not a neighbor of  $r$  (and  $w_T(v) = 0$  for vertices not in  $T$ ). Let  $\mathbf{T}$  be the configuration with  $\mathbf{T}(r) = 0$ ,  $\mathbf{T}(v) = 1$  for all other  $v \in V(T)$ , and  $\mathbf{T}(v) = 0$  everywhere else. We now define the  $T$ -weight of any configuration  $C$  (including  $\mathbf{T}$ ) by  $w_T(C) = \sum_{v \in V} w_T(v)C(v)$ . The following lemma (WFL) is used to provide an upper bound on  $\pi(G)$ .

**Lemma 4 (Weight Function Lemma [9]).** *Let  $T$  be an  $r$ -strategy of  $G$  with associated weight function  $w_T$ . Suppose that  $C$  is an  $r$ -unsolvable configuration of pebbles on  $V(G)$ . Then  $w_T(C) \leq w_T(\mathbf{T})$ .*

One way to view  $T$ -weights as a generalization of  $r$ -weights is as follows. Consider when  $T$  is a path  $v_0v_1 \cdots v_n$  and let  $C$  be a  $v_0$ -unsolvable configuration on  $T$ . Then notice that the formula for  $v_0$ -weights of pebbles on the vertices of  $T$  form a valid weight function  $w_T$  if we re-weight  $v_0$  at 0 instead of 1, which changes nothing in practice because  $C(v_0) = 0$ . In this case, WFL states that  $\sum_{i=1}^n C(v_i)2^{-i} \leq \sum_{i=1}^n 2^{-i} = 1 - 2^{-n}$ . Because  $C$  is a non-negative integer-valued function, this is equivalent to  $\sum_{i=1}^n C(v_i)2^{-i} < 1$ ; i.e. the  $v_0$ -weight of  $C$  is less than one. Furthermore, the  $r$ -weights of a general graph  $G$  can be thought of as the  $T$ -weights of a breadth-first-search spanning tree  $T$  of  $G$ , rooted at the target vertex  $r$ . Then an  $r$ -unsolvable configuration  $C$  satisfies the WFL inequality and so, by retracting  $T$  onto a path of length equal to the eccentricity of  $r$ , we obtain the aforementioned  $r$ -weight condition for  $C$ .

### 3. Proofs

#### 3.1. Proof of Theorem 1

Note that every snark has exactly  $3n/2$  edges, and that the Petersen graph has diameter equal to 2 and all other snarks have diameter at least 3. Then, by Corollary 2, if  $n(G) > 22$  we get  $3n/2 < (5n - 11)/3$ . Therefore, every snark with  $n(G) > 22$  is not Class 0. The remaining non-Petersen snarks with fewer vertices and girth at least 5 (among them, the Flower  $J_5$ , the Blanušas, and the Loupekines) all have diameter  $4 > 2 + 1$ , so for any vertices  $u$  and  $v$  at distance 4 from each other we have  $|N_2[u]| = 10$  and  $|N_1[v]| = 4$ . Thus  $|N_2[u] \cup N_1[v]| = 14 < 16 = 2^{2+1+1}$ , and so none of these graphs are Class 0 by SNL.  $\square$

#### 3.2. Proof of Theorem 2

First we prove the lower bounds. For these we only need to display a configuration, of size one less than the lower bound, that cannot reach some target.

The diameter of the Flower graph  $J_m$ ,  $m = 2k + 1$ , is  $k + 2$ , and the distance between  $v_0$  and  $x_k$  is  $k + 2$ . The rotational symmetry of the Flower graph  $J_m$  gives  $2m$  petals, each of which is in a 6-cycle.

For  $J_5$ , the diameter is 4 and the girth is 5. The  $v_0$ -unsolvable configuration  $C_{v_0, x_2}^*$ , that is provided by SNL for  $a = 2$  and  $b = 1$  places 15 pebbles on  $x_2$  and one pebble on each of the 6 vertices not in set  $N_2[v_0] \cap N[x_2]$ , and has size 21. Notice that we can add a pebble to  $z_{-1}$  to obtain the configuration  $C$  in Fig. 1. It is not difficult to argue that  $C$  is also  $v_0$ -unsolvable, since any supposed solution would need to use the pebble at  $z_{-1}$ .

For  $m \geq 7$  (i.e.  $k \geq 3$ ), we will use  $C^* = C_{v_0, x_k}^*$  only. In this case, the girth is equal to 6. So  $|N_2[v_0]| = 1 + 3 + 6$ , and for any integer  $3 \leq i \leq k$ , the set of vertices at distance  $i$  from  $v_0$  is  $\{v_i, v_{-i}, z_{i-1}, z_{-(i-1)}, x_{i-2}, y_{i-2}, x_{-(i-2)}, y_{-(i-2)}\}$ . Hence, for any integer  $2 \leq i \leq k$ , we have  $|N_i[v_0]| = 1 + 3 + 6 + (i - 2)8 = 8i - 6$ . Similarly, one can enumerate  $|N_i[u]| = 1 + 3 + 6 + (i - 2)8 = 8i - 6$  for any vertex  $u$ . Let  $a$  and  $b$  be non-negative integers that are at least 2 and such that  $a + b = k + 1$ . Vertices  $v_0$  and  $x_k$  are at distance  $k + 2$ , which is the diameter of  $J_m$ , from which follows  $|N_a[v_0]| + |N_b[x_k]| = 8(a + b) - 12 = 8k - 4$  and  $n - |N_a[v_0]| - |N_b[x_k]| = 8$ . In fact, one can check that  $V(J_m) - (N_a[v_0] \cup N_b[x_k]) = \{y_{a-1}, y_a, x_{-(a-1)}, y_{-(a-1)}, x_{-a}, z_{-a}, x_{-(a+1)}, v_{-(a+1)}\}$ . This yields  $|C^*| = (2^{a+b+1} - 1) + (n - |N_a[v_0]| - |N_b[x_k]|) = 2^{k+2} + 7$ .

Now we prove the upper bounds, using WFL. We shall define strategies with root  $z_0$ . We refer to the Appendix for the strategies with roots  $v_0$  and  $x_0$ , that give values not larger than the ones given by strategies presented for root  $z_0$ .

For  $J_3$ , we define three  $z_0$ -strategies  $T_0, T_1$ , and  $T_{-1}$  by

- $T_0(v_0, v_1, v_{-1}, z_1, z_{-1}, x_1, y_1, x_{-1}, y_{-1}) = (8, 4, 4, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$ ,
- $T_1(x_0, x_1, x_{-1}, z_1, z_{-1}, v_{-1}) = (8, 4, 4, 1, 2, 1)$  and
- $T_{-1}(y_0, y_1, y_{-1}, z_1, z_{-1}, v_1) = (8, 4, 4, 2, 1, 1)$ ,

giving rise to the inequality  $|C| \leq \frac{1}{5}(T_0 + T_1 + T_{-1}) \leq 64/5$  whenever  $C$  is  $v_0$ -unsolvable. Hence  $\pi(J_3, z_0) \leq 13$ . Using the strategies presented in the Appendix for targets  $v_0$  and  $x_0$ , we may conclude that  $\pi(J_3) \leq 13$ .

For  $J_5$ , we define three  $z_0$ -strategies  $T_0, T_1$ , and  $T_{-1}$  by

- $T_0(v_0, v_1, v_{-1}, v_2, v_{-2}, z_1, z_{-1}, z_2, z_{-2}, x_2, y_2, x_{-2}, y_{-2}) = (16, 8, 8, 4, 4, 4, 4, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$ ,
- $T_1(x_0, x_1, x_{-1}, x_2, x_{-2}, z_2, z_{-2}, v_2, z_{-1}) = (16, 8, 8, 4, 4, 2, 1, 1, 1)$  and
- $T_{-1}(y_0, y_1, y_{-1}, y_2, y_{-2}, z_2, z_{-2}, v_{-2}, z_1) = (16, 8, 8, 4, 4, 1, 2, 1, 1)$ ,

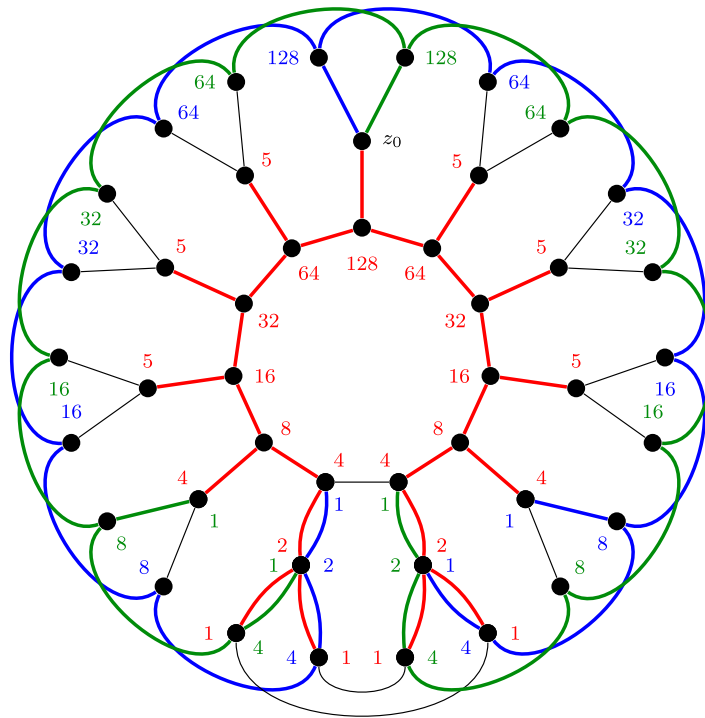
giving rise to the inequality  $|C| \leq \frac{1}{5}(T_0 + T_1 + T_{-1}) \leq 146/5$  whenever  $C$  is  $v_0$ -unsolvable. Hence  $\pi(J_5, z_0) \leq 30$ . Using the strategies presented in the Appendix for targets  $v_0$  and  $x_0$ , we may conclude that  $\pi(J_5) \leq 30$ .

For  $m \geq 5$  (i.e.  $k \geq 2$ ), please refer to Fig. 2 to see  $m = 11$ . Using the same pattern we have defined above for the three  $z_0$ -strategies for  $J_5$ , we define three corresponding  $z_0$ -strategies by

- $T_0(v_0, v_1, v_{-1}, v_2, v_{-2}, \dots, v_k, v_{-k}, z_k, z_{-k}, x_k, y_k, x_{-k}, y_{-k}) = (2^{k+2}, 2^{k+1}, 2^{k+1}, 2^k, 2^k, \dots, 4, 4, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$  and  $T_0(z_1, z_{-1}, \dots, z_{k-2}, z_{2-k}, z_{k-1}, z_{1-k}) = (5, 5, \dots, 5, 5, 4, 4)$ ;
- $T_1(x_0, x_1, x_{-1}, \dots, x_k, x_{-k}, z_k, v_k) = (2^{k+2}, 2^{k+1}, 2^{k+1}, \dots, 4, 4, 2, 1)$  and  $T_1(z_{-k}, z_{1-k}) = (1, 1)$ ; and
- $T_{-1}(y_0, y_1, y_{-1}, \dots, y_k, y_{-k}, z_{-k}, v_{-k}) = (2^{k+2}, 2^{k+1}, 2^{k+1}, \dots, 4, 4, 2, 1)$  and  $T_{-1}(z_k, z_{k-1}) = (1, 1)$ .

The sum  $T_0 + T_1 + T_{-1}$  has 3 vertices with coefficient  $2^{k+2}$ , 6 with  $2^i$  (for each  $3 \leq i \leq k + 1$ ), and  $2k + 6$  with coefficient 5, giving rise to the inequality

$$5|C| \leq T_0 + T_1 + T_{-1} = 3(2^{k+2}) + 6(2^3 + \dots + 2^{k+1}) + 5(2k + 6)$$



**Fig. 2.** The graph  $J_{11}$  and its three  $z_0$ -strategies  $T_0$  (in red),  $T_1$  (in blue), and  $T_{-1}$  (in green). (For interpretation of the references to color in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

$$\begin{aligned}
 &= 6(2^3 + \dots + 2^{k+2}) - 3(2^{k+2}) + 5(2k + 6) \\
 &= 48(2^k - 1) - 3(2^{k+2}) + 10k + 30 \\
 &= 36(2^k) + 10k - 18 \\
 &= 9(2^{k+2}) + 10k - 18,
 \end{aligned}$$

whenever  $C$  is  $z_0$ -unsolvable. Hence  $|C| \leq 2^{k+2}9/5 + 2k - 18/5$ , and so  $\pi(J_m, z_0) \leq \lfloor 2^{k+2}9/5 + 2k - 18/5 \rfloor + 1$ . Using the strategies presented in the [Appendix](#) for targets  $v_0$  and  $x_0$ , we may conclude that  $\pi(J_m) \leq \lfloor 2^{k+2}9/5 + 2k - 18/5 \rfloor + 1$ . In particular,  $\pi(J_7) \leq 61$ .  $\square$

### 3.3. Proof of Theorem 3

First we prove the lower bounds. [Corollary 1](#) gives the same lower bound  $20 \leq \pi(G)$ , for an arbitrary diameter 4, girth 5, cubic graph  $G$  with 18 vertices, like  $B_1$  and  $B_2$ , by defining an unsolvable configuration  $C^*$  of size 19, as follows. Consider a pair of vertices  $u$  and  $v$  at distance 4 in such a graph  $G$ . Define  $C^*(v) = 15$ ,  $C^*(x) = 0$  for all  $x \in (N_2[u] \cup N_1[v]) - \{v\}$ , and  $C^*(x) = 1$  otherwise. Hence,  $|C^*| = 19$ .

Please refer to [Fig. 3](#). Analogous arguments can be done for  $B_1$  and  $B_2$ , so we present with no loss of generality the arguments for  $B_2$ . We can establish the non trivial lower bound  $21 \leq \pi(B_2)$ , as an application of the [Retract Lemma 2](#), since a subgraph of  $B_2$  has a  $C_9$  retract and  $\pi(C_9) = 21$ . We can actually define an  $x_3$ -unsolvable configuration of size 22, by organizing  $B_2$  by distance from target  $x_3$ . Consider the  $C_9$  induced by  $x_3, x_1, z_1, z_2, z'_2, x'_2, x'_5, x'_3, z_3$ . Adjacent vertices  $z'_2$  and  $x'_2$  are at distance 4 from target  $x_3$ . Place 10 pebbles on  $z'_2$  and 10 pebbles on  $x'_2$  to get a  $x_3$ -unsolvable configuration of size 20. Additionally, place 1 pebble on  $z'_5$  and 1 pebble on  $x'_1$ , to get the desired  $x_3$ -unsolvable configuration of size 22, since  $z'_5$  and  $x'_1$  are among the vertices at distance 3 from target  $x_3$ , that are not in a cycle  $C_9$  together with  $x_3, z'_2$  and  $x'_2$ . Hence  $23 \leq \pi(B_2)$ .

Now we prove the upper bound  $\pi(B_2) \leq 34$ , using WFL. Note that we have six different roots, by considering:  $z_1 = z'_1, z_2 = z'_2 = z_5 = z'_5, x_1 = x'_1, x_2 = x'_2 = x_5 = x'_5, x_3 = x'_3 = x_4 = x'_4$ , and  $z_3 = z_4$ . We shall define strategies with root  $x_3$ , since this root gave us the largest upper bound. We refer to the [Appendix](#) for the strategies with the other five roots that give values not larger than the ones given by strategies presented for root  $x_3$ .

For  $B_2$ , we define three  $x_3$ -strategies  $T_1, T_2$ , and  $T_3$  by

- $T_1(x_1, z_1, x_4, z_2, z_4, z'_2, x'_4, x'_2) = (32, 16, 16, 8, 8, 4, 4, 2)$ ,
- $T_2(x_5, x_2, z_5, z'_5, z'_1, z'_2, x'_2) = (32, 7, 16, 8, 4, 2, 1)$  and
- $T_3(z_3, x'_3, x'_1, x'_5, z'_1, x'_2, x'_4) = (32, 16, 8, 8, 4, 4, 3)$ ,

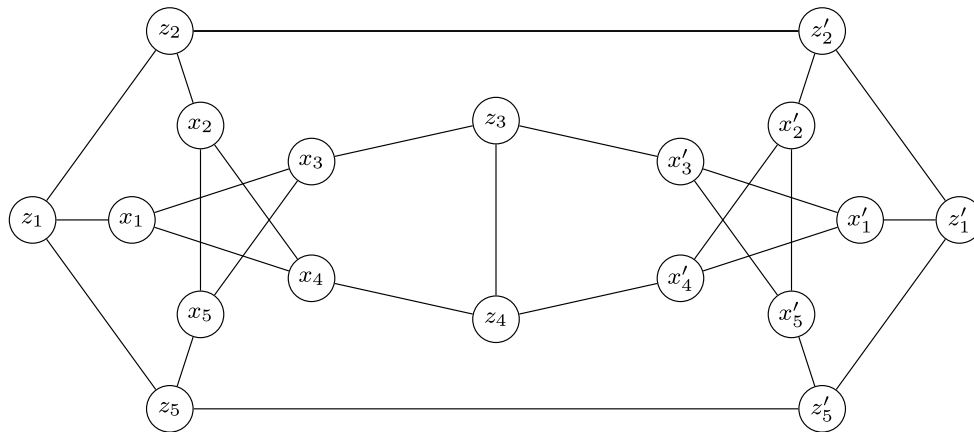


Fig. 3. Blanuša 2 and its labeling.

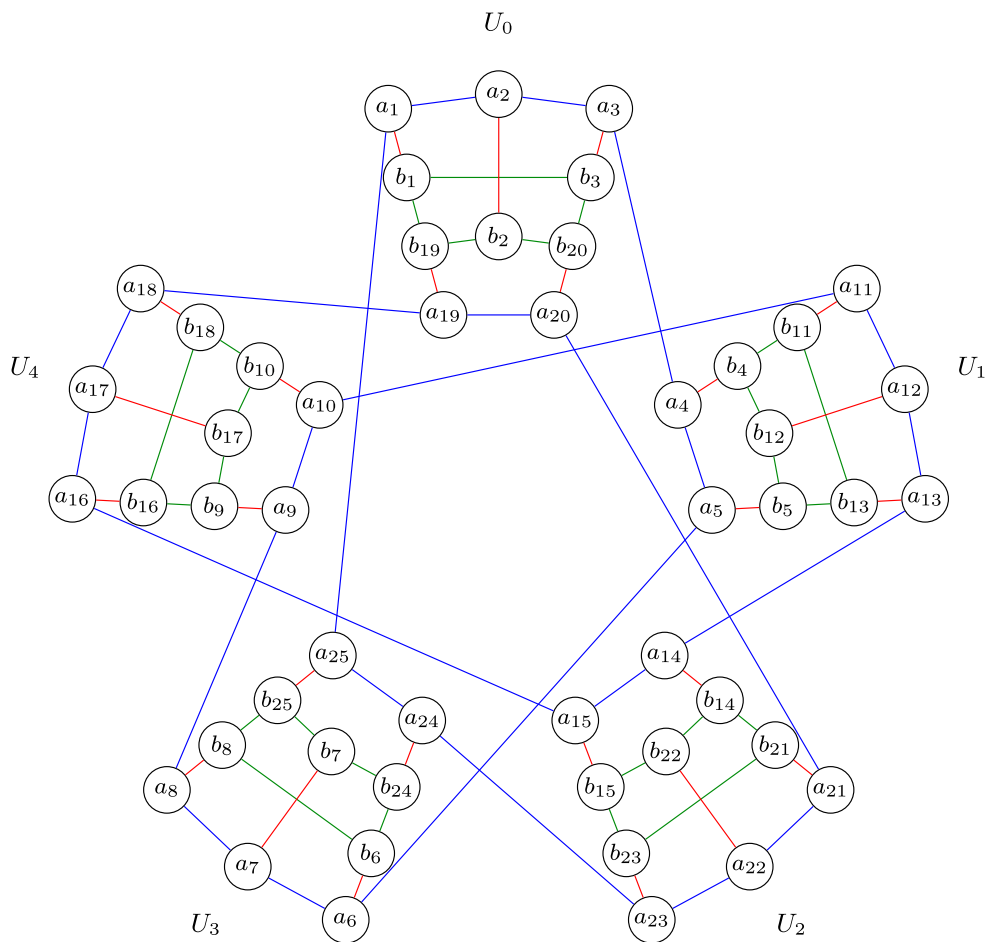
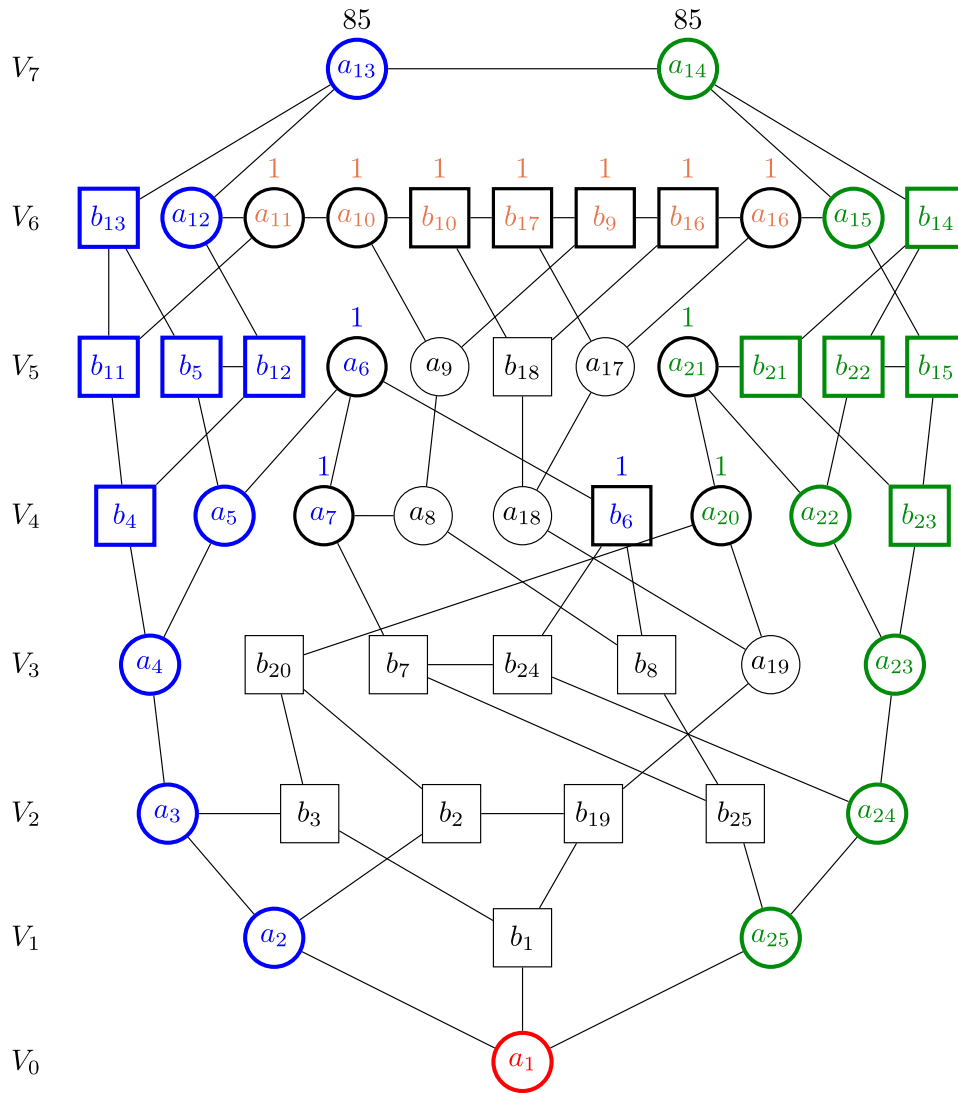


Fig. 4. The Watkins graph, shown in its traditional drawing. (For interpretation of the references to color in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

giving rise to the inequality  $|C| \leq \frac{1}{7}(T_1 + T_2 + T_3) \leq 236/7$  whenever  $C$  is  $x_3$ -unsolvable. Hence  $\pi(B_2, x_3) \leq 34$ . Using the strategies presented in the Appendix for the other five targets, we may conclude that  $\pi(B_2) \leq 34$ .  $\square$

### 3.4. Proof of Theorem 4

We first observe an isomorphism between the traditional drawing of  $W$  shown in Fig. 4 and the drawing of  $W$  in Fig. 5 that partitions its vertices by distance from  $a_1$  (those of distance  $i$  are in  $V_i$ ). Indeed, one can check that, in both drawings,  $W$  contains the 25-cycle  $a_1, a_2, \dots, a_{25}, a_1$  (shown with blue edges in Fig. 4 and circular vertex shapes in Fig. 5), five



**Fig. 5.** The Watkins graph, organized by distance from target  $a_1$ , along with an  $a_1$ -unsolvable configuration  $C$  of size 182. (For interpretation of the references to color in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

vertex-disjoint 5-cycles on the vertices  $b_1, \dots, b_{25}$  (shown with green edges in Fig. 4 and square vertex shapes in Fig. 5), and the perfect matching using the 25 pairs  $\{a_i, b_i\}$  (shown with red edges in Fig. 4). The point of showing Fig. 4 is to recognize  $W$  and its symmetries; the point of showing Fig. 5 is to make lower bound arguments about  $\pi(W)$ .

Next we prove the lower bound by displaying an  $a_1$ -unsolvable configuration of size 182; such a configuration  $C$  is shown in Fig. 5, with each vertex of  $V_7$  having 85 pebbles and 12 other vertices (7 orange, 3 blue, and 2 green) having one pebble each. The argument we give will make use of the vertex colors in Fig. 5.

For two vertices  $u$  and  $v$ , we call a  $uv$ -path of minimal length a  $uv$ -geodesic. Define  $V_B$  (resp.  $V_G$ ) to be the set of vertices in the union of all  $a_{13}a_1$ -geodesics (resp.  $a_{14}a_1$ -geodesics); these are shown in Fig. 5 with blue (resp. green) shapes, except for the target vertex  $a_1$  in red. Note that the path  $P_8$  is a retract of the subgraph of  $W$  induced by  $V_B$  (resp.  $V_G$ ), and so the graph  $W_{BG}$  induced by  $V_B \cup V_G$  has the cycle  $C_{15}$  as a retract. Hence  $\pi(W_{BG}) \geq \pi(C_{15}) = 171$ . In particular, by Lemma 2, the configuration  $C_{BG}$  – the restriction of the configuration  $C$  shown in Fig. 5 to  $V_B \cup V_G$  – is  $a_1$ -unsolvable in  $W_{BG}$ .

Suppose that  $C_{BG}$  has a minimal  $a_1$ -solution  $\sigma$  in  $W$ . If  $\sigma$  uses the edge  $e_2 = a_2a_1$  then it does not use either of the edges  $b_1a_1$  or  $a_{25}a_1$ ; hence  $\sigma$  is an  $a_1$ -solution in the subgraph  $W_2 = W - e_2$ . However the distance from  $a_{14}$  to  $a_2$  is 7, and so the  $a_1$ -weight of  $C_{BG}$  equals  $85(3)/2^8 = 255/256 < 1$ , a contradiction. Similarly, if  $\sigma$  uses the edge  $e_1 = b_1a_1$  then we obtain the same  $a_1$ -weight calculation, while if  $\sigma$  uses the edge  $e_{25} = a_{25}a_1$  then we obtain a smaller  $a_1$ -weight calculation; in both cases we have a contradiction. Hence  $C_{BG}$  is not  $a_1$ -solvable in  $W$ . (This already invalidates the claim of [16] that  $\pi(W) = 166$ .) Therefore, if  $C$  is  $a_1$ -solvable in  $W$ , then any solution must use some of the pebbles in the configuration  $S = C - C_{BG}$  of singletons of  $C$ .

Now let  $\sigma$  be any minimal  $a_1$ -solution and let  $S_\sigma$  denote the set of singletons of  $S$  used by  $\sigma$ . We may rearrange the order of pebbling moves so that those moves involving  $S_\sigma$  are performed as early as possible. Now let  $C_\sigma$  denote the configuration that results from halting future pebbling moves of  $\sigma$  once the moves involving  $S_\sigma$  have been performed.

Additionally, denote by  $C'_\sigma$  the configuration  $C_\sigma - (S - S_\sigma)$ ; that is, from  $C_\sigma$ , throw away the singletons of  $S$  that were not used by  $\sigma$ . Obviously  $C'_\sigma$  is  $a_1$ -solvable. We argue that this is impossible by showing that the  $a_1$ -weight of  $C'_\sigma$  is less than 1.

A  $uv$ -slide is a path  $ua_1 \cdots a_k v$  in which  $u$  is big and each  $a_i$  is nonempty, the use of which allows for a pebble to move from  $u$  to  $v$  along the slide. A *potential slide* ignores the requirement that  $u$  is big; it is “potential” because it becomes a slide if  $u$  becomes big. Notice that every singleton vertex is part of a potential slide. Because the  $a_1$ -weight of  $C_{BG}$  in  $W$  equals  $1 - 2^{-8}$ ,  $C'_\sigma$  can only be  $a_1$ -solvable if we are able to increase the  $a_1$ -weight of  $C_{BG}$  by at least  $2^{-8}$  by using the slides of  $S$ . In other words, it must be that the  $a_1$ -weight of a pebble in  $C'_\sigma$  must be greater than the sum of the  $a_1$ -weight of the pebbles of  $C_{BG}$  that were used to create it. We show that this cannot happen.

Partition  $S = S_6 \cup S_B \cup S_G$ , where  $S_6 = S \cap V_6$  (the orange pebbles in Fig. 5),  $S_B = S \cap V_B$  (the blue pebbles in Fig. 5), and  $S_G = S \cap V_G$  (the green pebbles in Fig. 5). Using a slide in  $S_6$  requires two pebbles from  $V_5 \cup V_6$  and places one pebble in either  $V_5 \cup V_6$ . Such a pebble has the same or lesser  $a_1$ -weight than the total  $a_1$ -weight of the original two pebbles. Using a slide in  $S_B$  requires two pebbles from  $V_3 \cup V_4$  and places one pebble in  $V_3 \cup V_4$ ; this also cannot increase the  $a_1$ -weight. Using a slide in  $S_G$ , however, can increase the  $a_1$ -weight only if the two pebbles originate from  $b_{21}$  and the resulting pebble lands on  $b_{20}$ . Still, the resulting pebble must be used in  $\sigma$  to achieve this  $a_1$ -weight increase (of  $1/2^3 - 2/2^5 = 1/2^4$ ), although to do so requires at least  $2^6$  pebbles from  $V_7$ , resulting in a  $a_1$ -weight loss of  $2^7/2^7 - 1/2^3 > 1/2^4$ . Hence it is impossible to increase the  $a_1$ -weight of  $C'_\sigma$  via pebbling steps, and so  $C'_\sigma$ , and thus  $C$ , is  $a_1$ -unsolvable.  $\square$

#### 4. Final remarks

The previous work of [13] on Flower snarks and of [16] on the Watkins snark are at the foundation of our findings, since after reading their published papers, we have realized we were able to contribute to the subject. We hope the developed techniques and results will motivate more researchers to achieve better bounds on the pebbling numbers of snarks. Table 1 shows the state of art of the pebbling numbers of several well known snarks, using the basic bounds mentioned in the introduction, as well as Lemma 1, and Theorems 1, 2, 3 and 4.

#### Acknowledgments

This research was partly supported by CAPES, Brazil Finance Code 001, FAPERJ, Brazil (Grant No. E-26/202.793/2017, E-26/010.002239/201, E-26/010.002674/2019, E-26/201.360/2021), and CNPq, Brazil (Grant No. 407635/2018-1, 305356/2021-6, 313797/2020-0). The third author is grateful to the Federal University of Rio de Janeiro for partial support of his visit, and to his coauthors for their tremendous hospitality during his visit.

#### Appendix

##### Missing cases for the proof of Theorem 2

Regarding the upper bounds of Theorem 2, for the two other possible roots  $v_0$  and  $x_0$ , we have obtained below strategies that give values not larger than the ones given by strategies presented for root  $z_0$ .

For  $J_3$ , we define three  $v_0$ -strategies  $T_0$ ,  $T_1$ , and  $T_{-1}$  by

- $T_0(z_0, x_0, y_0, x_1, y_1, x_{-1}, y_{-1}, z_1, z_{-1}) = (8, 4, 4, 2, 2, 2, 2, 1, 1)$ ,
- $T_1(v_1, z_1, x_1, y_1, x_0, x_{-1}, y_{-1}) = (8, 4, 2, 2, 1, 1, 1)$  and
- $T_{-1}(v_{-1}, z_{-1}, x_{-1}, y_{-1}, y_0, x_1, y_1) = (8, 4, 2, 2, 1, 1, 1)$ ,

giving rise to the inequality  $|C| \leq \frac{1}{5}(T_0 + T_1 + T_{-1}) \leq 64/5$  whenever  $C$  is  $v_0$ -unsolvable. Hence  $\pi(J_3, v_0) \leq 13$ .

And we define three  $x_0$ -strategies  $T_0$ ,  $T_1$ , and  $T_{-1}$  by

- $T_0(z_0, v_0, y_0, v_{-1}, v_1, y_{-1}, y_1) = (8, 4, 4, 2, 2, 1, 1)$ ,
- $T_1(x_1, z_1, y_{-1}, v_1, z_{-1}, y_0, v_{-1}, v_0) = (8, 4, 4, 2, 1, 1, 1)$  and
- $T_{-1}(x_{-1}, z_{-1}, y_1, v_{-1}, z_1, v_1) = (8, 4, 4, 2, 1, 1)$ ,

giving rise again to the inequality  $|C| \leq \frac{1}{5}(T_0 + T_1 + T_{-1}) \leq 64/5$  whenever  $C$  is  $x_0$ -unsolvable. Hence  $\pi(J_3, x_0) \leq 13$ . We may conclude that  $\pi(J_3) \leq 13$ .

For  $J_5$ , we define three  $v_0$ -strategies  $T_0$ ,  $T_1$ , and  $T_{-1}$  by

- $T_0(z_0, x_0, y_0, x_1, y_1, x_{-1}, y_{-1}, x_2, y_2, x_{-2}, y_{-2}, z_2, z_{-2}) = (16, 8, 8, 4, 4, 4, 4, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$ ,
- $T_1(v_1, v_2, z_1, z_2, x_2, y_2, x_1, y_{-2}, x_{-2}, y_1) = (16, 8, 8, 4, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$  and

- $\mathbf{T}_{-1}(v_{-1}, v_{-2}, z_{-1}, z_{-2}, x_{-2}, y_{-2}, x_{-1}, y_2, x_2, y_{-1}) = (16, 8, 8, 4, 4, 2, 2, 1, 1, 1, 1),$

giving rise to the inequality  $|C| \leq \frac{1}{5}(\mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_{-1}) \leq 146/5$  whenever  $C$  is  $v_0$ -unsolvable. Hence  $\pi(J_5, v_0) \leq 30$ .  
 And we define three  $x_0$ -strategies  $\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1,$  and  $\mathbf{T}_{-1}$  by

- $\mathbf{T}_0(z_0, v_0, y_0, v_{-1}, v_1, y_{-1}, y_1, v_2, v_{-2}, y_2, y_{-2}, z_2) = (16, 8, 8, 4, 4, 4, 4, 2, 2, 1, 1, 1),$
- $\mathbf{T}_1(x_1, z_1, x_2, y_{-2}, z_2, y_{-1}, z_{-2}, y_2, v_2, v_1, v_{-2}) = (16, 8, 8, 4, 4, 1, 1, 1, 2, 1, 1)$  and
- $\mathbf{T}_{-1}(x_{-1}, z_{-1}, x_{-2}, z_{-2}, y_2, v_{-2}, y_1, v_2, v_{-1}) = (16, 8, 8, 4, 4, 2, 1, 1, 1, 1),$

giving rise again to the inequality  $|C| \leq \frac{1}{5}(\mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_{-1}) \leq 146/5$  whenever  $C$  is  $x_0$ -unsolvable. Hence  $\pi(J_5, x_0) \leq 30$ .  
 We may conclude that  $\pi(J_5) \leq 30$ .

For  $J_7$ , we define three  $v_0$ -strategies  $\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1,$  and  $\mathbf{T}_{-1}$  by

- $\mathbf{T}_0(z_0, x_0, y_0, x_1, y_1, x_{-1}, y_{-1}, x_2, z_1, z_{-1}, x_{-2}, y_2, y_{-2}, x_3, x_{-3}, y_3, y_{-3}, z_3, z_{-3}) = (32, 16, 16, 8, 8, 8, 8, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 2, 2, 2, 2, 1, 1),$
- $\mathbf{T}_1(v_1, v_2, z_1, v_3, z_2, z_3, x_2, y_2, x_3, y_3, x_{-3}, y_{-3}) = (32, 16, 1, 8, 5, 4, 1, 1, 2, 2, 1, 1)$  and
- $\mathbf{T}_{-1}(v_{-1}, v_{-2}, z_{-1}, v_{-3}, z_{-2}, z_{-3}, x_{-2}, y_{-2}, x_{-3}, y_{-3}, y_3, x_3) = (32, 16, 1, 8, 5, 4, 1, 1, 2, 2, 1, 1),$

giving rise to the inequality  $|C| \leq \frac{1}{5}(\mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_{-1}) \leq 278/5 < 56$  whenever  $C$  is  $v_0$ -unsolvable. Hence  $\pi(J_7, v_0) \leq 56$ .  
 And we define three  $x_0$ -strategies  $\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1,$  and  $\mathbf{T}_{-1}$  by

- $\mathbf{T}_0(z_0, v_0, y_0, v_1, v_{-1}, y_1, y_{-1}, v_2, v_{-2}, y_2, y_{-2}, v_3, v_{-3}, y_3, y_{-3}, z_3) = (32, 16, 16, 8, 8, 8, 8, 4, 4, 4, 4, 2, 2, 1, 1, 1),$
- $\mathbf{T}_1(x_1, z_1, x_2, z_2, x_3, v_2, y_{-3}, z_3, z_{-3}, y_3, v_3, v_{-3}) = (32, 5, 16, 8, 8, 1, 4, 4, 1, 1, 2, 1)$  and
- $\mathbf{T}_{-1}(x_{-1}, z_{-1}, x_{-2}, z_{-2}, x_{-3}, y_{-2}, v_{-2}, z_{-3}, y_3, v_{-3}, y_2, v_3) = (32, 5, 16, 8, 8, 1, 1, 4, 4, 2, 1, 1),$

giving rise to the inequality  $|C| \leq \frac{1}{5}(\mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_{-1}) \leq 284/5 < 57$  whenever  $C$  is  $x_0$ -unsolvable. Hence  $\pi(J_7, x_0) \leq 57$ .  
 We may conclude that  $\pi(J_7) \leq 61$ .

For  $J_9$ , we define three  $x_0$ -strategies  $\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1,$  and  $\mathbf{T}_{-1}$  by

- $\mathbf{T}_0(z_0, v_0, y_0, v_1, v_{-1}, y_1, y_{-1}, v_2, v_{-2}, y_2, y_{-2}, v_3, v_{-3}, y_3, y_{-3}, v_4, v_{-4}, y_4, y_{-4}, z_4) = (64, 32, 32, 16, 16, 16, 16, 8, 8, 8, 8, 4, 4, 4, 4, 2, 2, 2, 1, 1),$
- $\mathbf{T}_1(x_1, z_1, x_2, z_2, x_3, z_3, x_4, v_3, y_{-4}, z_4, z_{-4}, y_4, v_4, v_{-4}) = (64, 5, 32, 16, 16, 5, 8, 1, 2, 4, 1, 1, 2, 1)$  and
- $\mathbf{T}_{-1}(x_{-1}, z_{-1}, x_{-2}, z_{-2}, x_{-3}, v_{-2}, z_{-3}, x_{-4}, y_{-3}, v_{-3}, z_{-4}, y_4, v_{-4}, y_3, v_4) = (64, 5, 32, 16, 16, 8, 5, 8, 1, 1, 4, 2, 2, 1, 1),$

For  $m \geq 7$  (i.e.  $k \geq 3$ ), using the same pattern we have defined above for the three  $v_0$ -strategies for  $J_7$ , we define three corresponding  $v_0$ -strategies giving rise to the inequality

$$\begin{aligned} 5|C| &\leq \mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_{-1} \\ &= 3(2^{k+2}) + 4(2^{k+1}) + 6(2^k + \dots + 2^3) + 5(2k + 8) \\ &\leq 3(2^{k+2}) + 6(2^3 + \dots + 2^{k+1}) + 5(2k + 6), \end{aligned}$$

whenever  $C$  is  $v_0$ -unsolvable.

For  $m \geq 9$  (i.e.  $k \geq 4$ ), using the same pattern we have defined above for the three  $x_0$ -strategies for  $J_9$ , we define three corresponding  $x_0$ -strategies giving rise to the inequality

$$\begin{aligned} 5|C| &\leq \mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_{-1} \\ &= 3(2^{k+2}) + 4(2^{k+1}) + 8(2^k) + 6(2^{k-1} + \dots + 2^3) + 5(2k + 6) \\ &\leq 3(2^{k+2}) + 6(2^3 + \dots + 2^{k+1}) + 5(2k + 6), \end{aligned}$$

whenever  $C$  is  $x_0$ -unsolvable.

We may conclude that for  $m \geq 3$  (i.e.  $k \geq 1$ ),  $\pi(J_m) \leq \lfloor 2^{k+2}9/5 + 2k - 18/5 \rfloor + 1$ .

### Missing cases for the proof of Theorem 3

Regarding the upper bounds of Theorem 3, for the five other possible roots  $z_1, x_1, z_2, x_2,$  and  $z_3$ , we have obtained below strategies that give values not larger than the ones given by strategies presented for root  $x_3$ .

For  $B_2$ , we define three  $x_1$ -strategies  $T_1, T_2,$  and  $T_3$  by

- $T_1(x_3, z_3, x'_3, x'_1, x'_5, z'_1) = (32, 16, 16, 8, 8, 4),$
- $T_2(z_1, z_2, z_5, x_2, x_5, z'_2, z'_5, x'_2, x'_5, z'_1) = (16, 8, 8, 4, 4, 4, 4, 2, 2, 2)$  and
- $T_3(x_4, z_4, x'_4, x'_1, x'_2) = (32, 16, 8, 8, 4)$

giving rise to the inequality  $|C| \leq \frac{1}{4}(T_1 + T_2 + T_3) \leq 120/4$  whenever  $C$  is  $x_1$ -unsolvable. Hence  $\pi(B_2, x_1) \leq 31.$

For  $B_2$ , we define three  $x_2$ -strategies  $T_1, T_2,$  and  $T_3$  by

- $T_1(x_4, z_4, x'_4, x'_1, x'_3) = (16, 8, 4, 2, 1),$
- $T_2(z_2, z_1, z'_2, x_1, x'_2, z'_1, x'_1, x'_5, x'_3) = (16, 8, 8, 4, 4, 4, 2, 2, 1)$  and
- $T_3(x_5, x_3, z_5, z_3, z'_5, x'_3, x'_5) = (16, 8, 4, 4, 2, 2)$

giving rise to the inequality  $|C| \leq \frac{1}{4}(T_1 + T_2 + T_3) \leq 124/4$  whenever  $C$  is  $x_2$ -unsolvable. Hence  $\pi(B_2, x_2) \leq 32.$

For  $B_2$ , we define three  $z_1$ -strategies  $T_1, T_2,$  and  $T_3$  by

- $T_1(x_1, x_3, x_4, z_3, z_4, x'_3, x'_4, x'_1) = (16, 8, 8, 4, 4, 2, 2, 1),$
- $T_2(z_2, x_2, z'_2, x'_1, z'_1, x'_4, x'_1, x'_3, z_4) = (16, 5, 8, 4, 4, 2, 2, 2, 1)$  and
- $T_3(z_5, x_5, z'_5, z'_1, x'_5, x'_1, x'_3, x'_4, z_3) = (16, 5, 8, 4, 4, 2, 2, 1, 1)$

giving rise to the inequality  $|C| \leq \frac{1}{5}(T_1 + T_2 + T_3) \leq 133/5$  whenever  $C$  is  $z_1$ -unsolvable. Hence  $\pi(B_2, z_1) \leq 27.$

For  $B_2$ , we define three  $z_2$ -strategies  $T_1, T_2,$  and  $T_3$  by

- $T_1(z'_2, z'_1, x'_2, z'_5, x'_1, x'_4, x'_5, x'_3) = (16, 8, 8, 4, 4, 4, 4, 2),$
- $T_2(z_1, z_5, x_1, x_3, z_3, x'_3) = (16, 4, 8, 4, 2, 1)$  and
- $T_3(x_2, x_5, x_4, z_4, z_3, x'_3) = (16, 4, 8, 4, 2, 1)$

giving rise to the inequality  $|C| \leq \frac{1}{4}(T_1 + T_2 + T_3) \leq 120/4$  whenever  $C$  is  $z_2$ -unsolvable. Hence  $\pi(B_2, z_2) \leq 31.$

For  $B_2$ , we define three  $z_3$ -strategies  $T_1, T_2,$  and  $T_3$  by

- $T_1(z_4, x_4, x'_4, x_2, x'_2, z_2, z'_2) = (32, 16, 16, 8, 8, 4, 4),$
- $T_2(x'_3, x'_1, x'_5, z'_1, z'_5, z'_2) = (32, 16, 16, 8, 8, 4)$  and
- $T_3(x_3, x_1, x_5, z_1, z_5, z_2) = (32, 16, 16, 8, 8, 4)$

giving rise to the inequality  $|C| \leq \frac{1}{8}(T_1 + T_2 + T_3) \leq 133/5$  whenever  $C$  is  $z_3$ -unsolvable. Hence  $\pi(B_2, z_3) \leq 33.$

### Data availability

No data was used for the research described in the article.

### References

- [1] L. Alc3n, M. Gutierrez, G. Hurlbert, Pebbling in split graphs, *J. Discrete Math.* 28 (2014) 1449–1466.
- [2] C. Campos, S. Dantas, C. de Mello, The total-chromatic number of some families of snarks, *Discrete Math.* 311 (12) (2011) 984–988.
- [3] A. Cavicchioli, M. Meschiari, B. Ruini, F. Spaggiari, A survey on snarks and new results: Products, reducibility and a computer search, *J. Graph Theory* 28 (2) (1998) 57–86.
- [4] M. Chan, A.P. Godbole, Improved pebbling bounds, *Discrete Math.* 308 (11) (2008) 2301–2306.
- [5] F. Chung, Pebbling in hypercubes, *J. Discrete Math.* 2 (1989) 467–472.
- [6] D.W. Cranston, L. Postle, C. Xue, C. Yerger, Modified linear programming and class 0 bounds for graph pebbling, *J. Comb. Optim.* 34 (1) (2017) 114–132.
- [7] G. Hurlbert, A survey of graph pebbling, *Congr. Numer.* 139 (1999) 41–64.
- [8] G. Hurlbert, General graph pebbling, *Discrete Appl. Math.* 161 (9) (2013) 1221–1231.
- [9] G. Hurlbert, The weight function lemma for graph pebbling, *J. Combin. Opt.* 34 (2) (2017) 343–361.
- [10] G. Hurlbert, F. Kenter, Graph Pebbling: A blend of graph theory, number theory, and optimization, *Notices Amer. Math. Soc.* 68 (11) (2021) 1900–1913.
- [11] G. Hurlbert, H. Kierstead, Graph pebbling complexity and fractional pebbling, 2005, (Unpublished).
- [12] K. Milans, B. Clark, The complexity of graph pebbling, *J. Discrete Math.* 20 (3) (2006) 769–798.
- [13] M.C. Monica, A.S. Suganya, Pebbling in flower snark graph, *Glob. J. Pure Appl. Math.* 13 (6) (2017) 1835–1843.
- [14] J. Petersen, Sur le th3or3me de Tait, *Interm3d. Math.* 15 (1898) 225–227.
- [15] M. Preissmann, Snarks of order 18, *Discrete Math.* 42 (1) (1982) 125–126.
- [16] S. Sreedevi, M.S. Anilkumar, Pebbling in Watkins snark graph, *Int. J. Res. Adv. Tech.* 7 (2) (2019).
- [17] P.G. Tait, Remarks on the colourings of maps, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* 10 (1880) 729.
- [18] J.J. Watkins, Snarks, *Ann. New York Acad. Sci.* 576 (1989) 606–622.