IMPACTO DE RUÍDO ESTRUTURAL DINÂMICO EM BUSCAS BASEADAS EM PASSEIOS QUÂNTICOS LACKADAISICAL

Gabriel Mauricio Oswald Vieira

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientadores: Nelson Maculan
Franklin de Lima Marquezino

Rio de Janeiro
Junho de 2026

IMPACTO DE RUÍDO ESTRUTURAL DINÂMICO EM BUSCAS BASEADAS EM PASSEIOS QUÂNTICOS LACKADAISICAL

Gabriel Mauricio Oswald Vieira

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Orientadores: Nelson Maculan
Franklin de Lima Marquezino

Aprovada por: Prof. Nelson Maculan
Prof. Franklin de Lima Marquezino
Prof. Carlile Campos Lavor
Prof. Luidi Gelabert Simonetti
Prof. Renato Portugal

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
JUNHO DE 2026

Vieira, Gabriel Mauricio Oswald

Impacto de Ruído Estrutural Dinâmico em Buscas Baseadas em Passeios Quânticos Lackadaisical/Gabriel Mauricio Oswald Vieira. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2026.

XIII, 52 p.: il.; 29, 7cm.

Orientadores: Nelson Maculan

Franklin de Lima Marquezino

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2026.

Referências Bibliográficas: p. 49 – 52.

1. Passeios Quânticos. 2. Descoerência. 3. Algoritmo de busca. 4. Percolação. 5. Lackadaisical. I. Maculan, Nelson *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

A meus filhos Roberto e Nina.

Agradecimentos

Gostaria de expressar minha profunda gratidão aos meus orientadores, Prof. Dr. Nelson Maculan e Prof. Dr. Franklin de Lima Marquezino, pela orientação, paciência, apoio e confiança ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço também ao Programa de Engenharia de Sistemas e Computação (PESC) da COPPE/UFRJ pela excelência acadêmica e pelo ambiente de pesquisa proporcionado.

A todos os colegas, professores e colaboradores que contribuíram de alguma forma para esta pesquisa, deixo aqui meu sincero agradecimento.

Gostaria de expressar um agradecimento especial à Profa. Dra. Marcia Rozenthal, pelo incentivo, pelos debates sempre produtivos, pela qualidade de suas opiniões e pela coorientação oferecida no momento mais difícil desta jornada.

Agradeço também à minha família e às pessoas mais próximas, como a Dra Patricia Silveira da Rosa, pelo apoio, incentivo e compreensão.

Por fim, agradeço à minha filha, Nina, pelo amor, carinho e suporte técnico no momento da defesa.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

IMPACTO DE RUÍDO ESTRUTURAL DINÂMICO EM BUSCAS BASEADAS EM PASSEIOS QUÂNTICOS LACKADAISICAL

Gabriel Mauricio Oswald Vieira

Junho/2026

Orientadores: Nelson Maculan
Franklin de Lima Marquezino

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Este trabalho investiga o impacto de ruído estrutural dinâmico, modelado por meio de falhas aleatórias de arestas (broken links), no desempenho de algoritmos de busca baseados em passeios quânticos discretos do tipo Lakadaisical em grafos toroides bidimensionais. O modelo Lakadaisical introduz self-loops ponderados que modificam a dinâmica de interferência quântica, permitindo melhorias na probabilidade de sucesso em cenários ideais.

Neste contexto, analisamos como a presença de ruído afeta a evolução temporal da probabilidade de sucesso e, em particular, seu comportamento assintótico. Resultados numéricos indicam a emergência de um regime intermediário no qual a probabilidade de sucesso converge para um valor limite não trivial, sugerindo uma transição entre dinâmicas puramente quânticas e clássicas.

Propomos uma interpretação para esse comportamento baseada no fato de que o ruído reduz progressivamente a contribuição de parte dos estados quânticos do sistema, fazendo com que apenas alguns componentes coerentes continuem influenciando a dinâmica no longo prazo. Essa análise aproxima os passeios quânticos com ruído dos modelos de percolação dinâmica e contribui para a compreensão do comportamento de algoritmos quânticos em ambientes abertos ou não isolados.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

IMPACT OF DYNAMIC STRUCTURAL NOISE ON LACKADAISICAL QUANTUM WALK-BASED SEARCH

Gabriel Mauricio Oswald Vieira

June/2026

Advisors: Nelson Maculan
Franklin de Lima Marquezino

Department: Systems Engineering and Computer Science

This work investigates the impact of dynamic structural noise, modeled through random edge failures (broken links), on the performance of search algorithms based on Lackadaisical discrete-time quantum walks on two-dimensional toroidal graphs. The Lackadaisical model introduces weighted self-loops that modify the quantum interference dynamics, enabling improvements in the success probability under ideal conditions.

In this context, we analyze how the presence of noise affects the temporal evolution of the success probability and, in particular, its asymptotic behavior. Numerical results indicate the emergence of an intermediate regime in which the success probability converges to a nontrivial limiting value, suggesting a transition between purely quantum and classical dynamics.

We propose an interpretation for this behavior based on the fact that noise progressively reduces the contribution of part of the system's quantum states, causing only a few coherent components to continue influencing the long-term dynamics. This analysis brings noisy quantum walks closer to dynamic percolation models and contributes to the understanding of the behavior of quantum algorithms in open environments.

Sumário

Lista de Figuras **xi**

1 Introdução **1**
1.1 Contexto 1
1.2 Motivação 1
1.3 Problema de Pesquisa 2
1.4 Contribuições da Tese 2
1.5 Organização da Tese 3
1.5.1 Declaração de uso de IA 4

2 Fundamentos de Passeios Quânticos em Grafos **5**
2.1 O Toro Bidimensional 5
2.2 Passeio Aleatório Clássico 6
2.3 Passeio Quântico Discreto 7
2.3.1 Operador Moeda 7
2.3.2 Operador Shift e Estrutura Permutativa 7
2.3.3 Caráter Permutativo 8
2.3.4 Interpretação Física 8
2.3.5 Reversibilidade e Emergência da Irreversibilidade 8
2.3.6 Experimentos e Evidências da Reversibilidade 9
2.3.7 Reversibilidade na Mecânica Quântica 11
2.4 Passeios quânticos lackadaisical 13
2.5 Adequação da Modelagem em Grafos 16
2.6 Decoerência por percolação em passeios quânticos em tempo discreto 16

3 Revisão Bibliográfica **19**
3.1 Passeios Aleatórios Clássicos em Grafos 19
3.2 Passeios Quânticos Discretos 19
3.3 Busca Baseada em Passeios Quânticos 20
3.4 Passeios Quânticos Lackadaisical 20
3.5 Abordagem Analítica 21

3.6 Operador Shift e Estrutura Permutativa 21
3.7 Decoerência, Broken Links e Percolação Dinâmica 22

4 Modelo de Busca por Passeio Quântico Lackadaisical 23
4.1 Espaço de Hilbert 23
4.2 Operador de Moeda 24
4.3 Operador Shift 24
4.4 Interpretação da Dinâmica 25

5 Modelagem de Busca Quântica Lackadaisical sob Ruído Estrutural 26
5.1 Introdução 26
5.2 Passeio Quântico Lackadaisical em Grafos Bidimensionais 27
5.3 Introdução de Ruído Estrutural 27
5.3.1 Modelo de Simulação de Ruído por Percolação 28
5.4 Evolução Quântica Dependente do Tempo 29
5.5 Interpretação como Processo Unitário Aleatório 30
5.6 Formulação do Problema de Busca 30

6 Impacto de Broken Links na Probabilidade de Sucesso da Busca 31
6.1 Introdução 31
6.2 Configuração Experimental 31
6.3 Evolução Temporal da Probabilidade de Sucesso 32
6.4 Dependência com a Taxa de Broken Links 33
6.5 Dependência com o Tamanho do Grafo 35
6.6 Robustez do Comportamento Assintótico 35
6.7 Resultados numéricos 35
6.8 Discussão 37

7 Convergência Assintótica Universal 39
7.1 Introdução 39
7.2 Modelo Considerado 40
7.3 Evidências Numéricas 40
7.4 Aspectos do Regime Assintótico 41
7.5 Interpretação do Fenômeno 41

8 Conclusões e Trabalhos Futuros 46
8.1 Síntese dos Resultados 46
8.2 Discussão Geral 46
8.3 Trabalhos Futuros 47
8.4 Considerações Finais 47

Referências Bibliográficas **49**

Lista de Figuras

2.1 À esquerda, representação de uma grade bidimensional 4×4 com contorno periódico e self-loops de peso ℓ associados a cada vértice. O vértice marcado é indicado pelo círculo branco. À direita, uma representação tridimensional. 6

2.2 Probabilidade de sucesso em função do tempo para a busca com Moeda de Grover em uma grade bidimensional de $N = 32 \times 32$ vértices e self-loop de peso $\ell = 4/N$ em cada vértice, assumindo ausência de ruído. (Colorido online.) 15

2.3 A eliminação de uma aresta faz com que o fluxo de amplitude seja redirecionado. (a) Nenhuma aresta foi removida. (b) A aresta (v, w) foi removida. 17

6.1 Distribuição média de probabilidade $\overline{P}_T(x, y)$ em uma grade toroidal 16×16 após $T = 10000$ passos da busca por passeio quântico lackadaisical. Cada subplot corresponde a um par diferente de parâmetros, com a probabilidade de broken links p e o peso do self-loop ℓ indicados no título. As distribuições são mostradas como mapas de calor sobre a grade. (Colorido online.) 33

6.2 Probabilidade de sucesso ao longo do tempo sob decoerência por broken links, para uma grade toroidal 32×32. Cada curva representa a média de 50 simulações ruidosas independentes. A região sombreada indica o desvio padrão entre as execuções. A linha horizontal pontilhada marca a distribuição uniforme como referência. (Colorido online.) 34

6.3 Probabilidade de sucesso ao longo do tempo sob probabilidade de broken links ($p = 0.01$) e diferentes pesos de self-loop, para uma grade toroidal 32×32. Cada curva representa a média de 50 simulações ruidosas independentes. A região sombreada indica o desvio padrão entre as execuções. A linha horizontal pontilhada marca a distribuição uniforme como referência. (Colorido online.) 36

6.4 Probabilidade máxima de sucesso em função do peso do self-loop ℓ para diversas taxas de ruído por broken links p em uma grade toroidal 16×16. Para todos os níveis de ruído, o pico permanece próximo do valor ótimo sem ruído $\ell \approx 4/N$, indicando que o parâmetro que maximiza o desempenho é notavelmente estável sob ruído de percolação dinâmica. Embora a probabilidade geral de sucesso diminua com o aumento de p, a localização do ℓ ótimo permanece essencialmente inalterada, sustentando a interpretação de que a estrutura de interferência que determina o peso ótimo do loop no passeio ideal é amplamente preservada no regime ruidoso. 38

7.1 Cauda longa da probabilidade de sucesso para probabilidade de broken links $p = 0.5$. Os resultados são obtidos a partir da média sobre 100 execuções independentes, cada uma com 10.000 passos, utilizando $\ell = 4/N$ em uma grade toroidal 32×32. A probabilidade média de sucesso aproxima-se de 0.25. $P_{\text{success}}(t)$. 41

7.2 Cauda longa da probabilidade de sucesso para probabilidade de broken links $p = 0.01$. Os resultados são obtidos a partir da média sobre 100 execuções independentes, cada uma com 600 passos, utilizando $\ell = 4/N$ em uma grade toroidal 16×16. A probabilidade média de sucesso aproxima-se de 0.25. $P_{\text{success}}(t)$. 42

7.3 Cauda longa da probabilidade de sucesso para taxa de broken links $p = 0.90$. Os resultados são obtidos a partir da média sobre 10 execuções independentes, cada uma com 20.000 passos, utilizando $\ell = 4/N$ em uma grade toroidal 16×16. A probabilidade média de sucesso aproxima-se de 0.25. $P_{\text{success}}(t)$. 43

7.4 Broken Link 90%. Sobre 10 execuções independentes com 50.000 passos, $\ell = 4/N$, grade $= 16 \times 16$. 43

7.5 Cauda longa da probabilidade de sucesso para taxa de broken links $p = 0.001$. Os resultados são obtidos a partir da média sobre 10 execuções independentes, cada uma com 10.000 passos, utilizando $\ell = 4/N$ em uma grade toroidal 16×16. A probabilidade média de sucesso aproxima-se de 0.25. $P_{\text{success}}(t)$. 44

7.6 Cauda longa da probabilidade de sucesso para taxa de broken links $p = 0.0001$. Os resultados são obtidos a partir da média sobre 3 execuções independentes, cada uma com 50.000 passos, utilizando $\ell = 4/N$ em uma grade toroidal 16×16. A probabilidade média de sucesso aproxima-se de 0.25. $P_{\text{success}}(t)$ 44

7.7 Probabilidade de sucesso para taxa de broken links $p = 0.0001$. Os resultados são obtidos a partir de 1 execução com 500 passos, utilizando $\ell = 4/N$ em uma grade toroidal 16×16. A probabilidade de sucesso inicia convergência. $P_{\text{success}}(t)$ 45

Capítulo 1

Introdução

1.1 Contexto

A computação quântica tem se destacado como uma área promissora, oferecendo potencial para a resolução eficiente de problemas que são intratáveis em modelos clássicos. Entre as diversas abordagens propostas para o desenvolvimento de algoritmos quânticos, os passeios quânticos emergem como uma ferramenta particularmente relevante, apresentando aplicações em busca, amostragem e simulação de sistemas físicos [6, 17]

Em particular, algoritmos de busca baseados em passeios quânticos têm sido amplamente estudados devido à sua capacidade de explorar a estrutura de grafos de forma eficiente, superando, em certos casos, estratégias clássicas equivalentes [11, 34]. Esses algoritmos dependem criticamente de fenômenos de interferência quântica, que permitem a amplificação da probabilidade de encontrar vértices marcados.

No entanto, a implementação prática de tais algoritmos está sujeita a diferentes formas de ruído. A presença de decoerência pode comprometer significativamente o desempenho desses sistemas, tornando essencial a investigação de sua robustez frente a perturbações [18].

1.2 Motivação

Grande parte dos estudos sobre ruído em passeios quânticos concentra-se em modelos nos quais a decoerência atua diretamente sobre o estado quântico, por exemplo, por meio de perturbações na moeda ou no espaço de posições. Entretanto, em diversos cenários físicos e computacionais, é igualmente relevante considerar ruídos que afetam a própria estrutura do grafo subjacente.

Nesse contexto, o modelo de broken links, no qual arestas do grafo são removidas de forma aleatória ao longo do tempo, surge como uma abordagem natural para

descrever ruídos estruturais. Esse tipo de ruído pode ser interpretado como uma forma de percolação dinâmica, introduzindo uma dependência temporal na topologia do sistema.

Adicionalmente, modelos lackadaisical, que incorporam self-loops com pesos ajustáveis, têm sido propostos como uma forma de melhorar o desempenho de algoritmos de busca baseados em passeios quânticos [42]. A combinação desses dois elementos — passeios lackadaisical e ruído estrutural — levanta questões fundamentais sobre o comportamento dinâmico desses sistemas.

1.3 Problema de Pesquisa

O problema central investigado nesta tese consiste em compreender o impacto do ruído estrutural, modelado por meio de broken links, sobre o desempenho de algoritmos de busca baseados em passeios quânticos lackadaisical em grafos bidimensionais.

Mais especificamente, busca-se analisar como a remoção dinâmica de arestas influencia a evolução da probabilidade de sucesso do algoritmo, bem como identificar possíveis regimes dinâmicos emergentes associados à presença desse tipo de ruído.

1.4 Contribuições da Tese

As principais contribuições deste trabalho podem ser sintetizadas nos seguintes pontos:

- A formulação de um modelo de busca quântica lackadaisical em grafos bidimensionais sob ruído estrutural dinâmico, interpretado como uma evolução unitária condicionada a grafos aleatórios;
- A análise do impacto de broken links na dinâmica da probabilidade de sucesso, evidenciando o papel do ruído estrutural na modificação dos padrões de interferência quântica;
- A discussão do papel do operador flip-flop shift e de seu caráter permutativo na preservação da unitariedade e da reversibilidade microscópica da dinâmica quântica.
- A identificação de um regime assintótico universal, caracterizado pela convergência da probabilidade de sucesso para aproximadamente 1/4, independente do tamanho do grafo e da intensidade do ruído dentro de um regime apropriado;

- A proposição de uma interpretação para esse fenômeno, baseada na supressão parcial da coerência quântica fazendo com que apenas parte da dinâmica de interferência permaneça ativa no longo prazo.
- Os resultados obtidos nesta tese contribuíram para a produção científica do autor, incluindo uma publicação internacional aceita pela Springer Nature e uma publicação em evento científico da Sociedade Brasileira de Computação (SBC), ambas relacionadas à investigação de passeios quânticos lackadaisical sob ruído estrutural em grafos toroides bidimensionais.
  - Oswald Vieira, Gabriel Mauricio, Maculan, N, Franklin de Lima Marquezino, Noise-resilient spatial search with lackadaisical quantum walks. Quantum Inf Process 25, 183 (2026). Publisher = Springer Nature, https://doi.org/10.1007/s11128-026-05205-1
  - VIEIRA, Gabriel Mauricio Oswald; LOPES, Rui Aldé; MACULAN, Nelson; MARQUEZINO, Franklin de Lima. An Algebraic Model for Simulation of Percolation Decoherence on Quantum-Walk-Based Search Algorithms. In: ENCONTRO DE TEORIA DA COMPUTAÇÃO (ETC), 9. , 2024, Brasília/DF. Anais [...]. Porto Alegre: Sociedade Brasileira de Computação, 2024 . p. 6-10. ISSN 2595-6116. DOI: https://doi.org/10.5753/etc.2024.2031.
- Conexão com modelos de percolação dinâmica.

Essas contribuições ampliam a compreensão do papel do ruído em algoritmos quânticos baseados em passeios, indicando que, sob determinadas condições, a desordem estrutural pode induzir comportamentos dinâmicos regulares e previsíveis.

1.5 Organização da Tese

Esta tese está organizada da seguinte forma:

No Capítulo 2, são apresentados os fundamentos teóricos de passeios quânticos, incluindo a definição do modelo discreto, operadores de evolução e o problema de busca em grafos.

No Capitulo 3 é apresentada a revisão bibliográfica que aborda os principais fundamentos teóricos e desenvolvimentos relacionados aos passeios quânticos discretos em grafos, com ênfase em algoritmos de busca quântica espacial, modelos lackadaisical e efeitos de ruído estrutural.

No Capítulo 4, é introduzido o modelo lackadaisical aplicado ao toro bidimensional, com a definição formal do grafo, operadores e configuração do problema de busca.

No Capítulo 5, desenvolve-se a modelagem do ruído estrutural por meio de broken links, formulando a dinâmica do sistema como um processo unitário dependente do tempo.

No Capítulo 6, são apresentados e discutidos resultados numéricos sobre o impacto do ruído estrutural na probabilidade de sucesso do algoritmo de busca.

No Capítulo 7, é analisado o regime assintótico da dinâmica, com a identificação de um comportamento universal caracterizado pela convergência da probabilidade de sucesso para aproximadamente 1/4.

Por fim, o Capítulo 8 apresenta as conclusões da tese e discute possíveis direções para trabalhos futuros.

1.5.1 Declaração de uso de IA

De acordo com a Portaria CNPq nº 2.664/2026, afirmo que durante a preparação deste trabalho, o autor utilizou o modelo [Chatgpt 5.3] exclusivamente para aprimoramento de estilo e gramática de trechos. Após a utilização da ferramenta, todo o conteúdo foi revisado, editado e validado pelo autor, que assume total responsabilidade pelo texto final. Nenhuma seção analítica ou conceitual foi gerada exclusivamente por inteligência artificial.

Capítulo 2

Fundamentos de Passeios Quânticos em Grafos

2.1 O Toro Bidimensional

Neste trabalho, consideramos exclusivamente toros bidimensionais quadrados, isto é, grades com o mesmo número de vértices nas direções horizontal e vertical. Seja $m \geq 3$ um inteiro positivo representando o número de vértices em cada dimensão. O número total de vértices do grafo é dado por

$$N = m^2.$$

O toro bidimensional é definido como o grafo não direcionado

$$G = (V, E),$$

em que o conjunto de vértices é

$$V = \left\{(i, j) \in \{0, 1, \ldots, m-1\}^2\right\}.$$

A conectividade periódica é estabelecida pela função de vizinhança

$$\mathcal{N} : V \to 2^V,$$

definida por

$$\mathcal{N}(i, j) = \{((i+1) \bmod m, j), ((i-1) \bmod m, j), (i, (j+1) \bmod m), (i, (j-1) \bmod m)\}.$$

O conjunto de arestas é então definido por

$$E = \{\{u, v\} \subseteq V \mid v \in \mathcal{N}(u)\}\,.$$

Como $m \geq 3$, cada vértice possui exatamente quatro vizinhos distintos, tornando o grafo 4-regular. A utilização da aritmética modular identifica automaticamente as bordas opostas da grade, eliminando vértices de fronteira e produzindo uma estrutura com conectividade periódica nas duas direções do plano [22, 26]. Ao longo deste trabalho restringimo-nos ao caso quadrado ($m = n$), condição que preserva a isotropia entre as direções horizontal e vertical e simplifica a análise dos operadores associados ao passeio quântico [17, 26]. Sobre essa topologia é construído o modelo lackadaisical. Nesse modelo, cada vértice recebe um self-loop de peso ℓ, permitindo que o caminhante quântico permaneça no vértice atual ou se desloque para um de seus quatro vizinhos. A introdução dos self-loops modifica a dinâmica do passeio quântico, sem alterar a topologia do toro subjacente [15, 40].

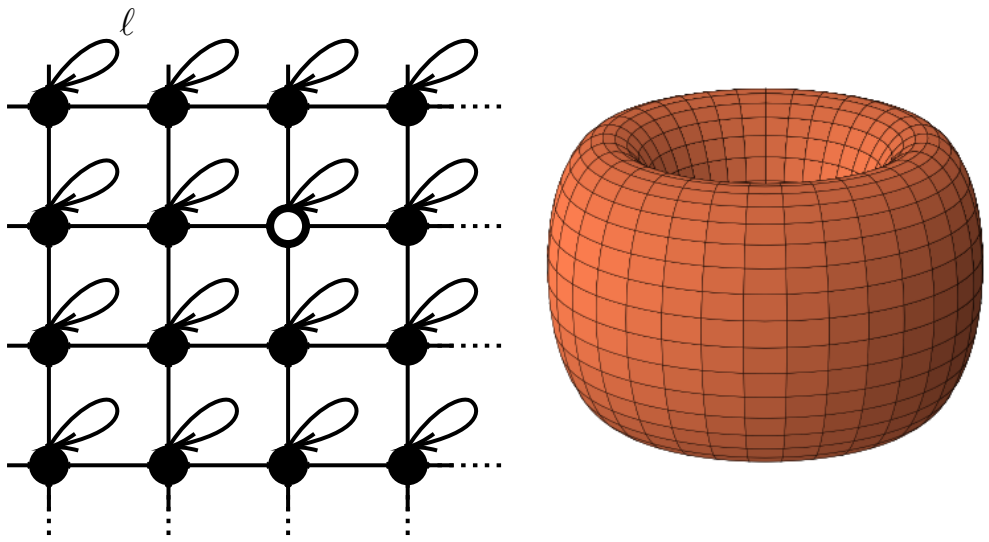

Figura 2.1: À esquerda, representação de uma grade bidimensional 4×4 com contorno periódico e self-loops de peso ℓ associados a cada vértice. O vértice marcado é indicado pelo círculo branco. À direita, uma representação tridimensional.

2.2 Passeio Aleatório Clássico

Define-se um processo estocástico X_t sobre V tal que [5, 22]:

$$P(X_{t+1} = (i', j') \mid X_t = (i, j)) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{se } (i', j') \in N(i, j), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Este processo define uma cadeia de Markov homogênea e irreducível sobre o toro [5].

2.3 Passeio Quântico Discreto

O passeio quântico discreto é definido sobre o espaço de Hilbert [3, 26]:

$$H = H_C \otimes H_V,$$

onde:

- H_V é o espaço de posição, gerado por $|i, j\rangle$;
- H_C é o espaço da moeda, de dimensão 4.

A evolução do sistema é dada por um operador unitário [17, 26]:

$$U = S \cdot (C \otimes I),$$

onde C é o operador moeda e S é o operador shift.

2.3.1 Operador Moeda

O operador moeda atua apenas no espaço interno e promove a mistura de amplitudes [3, 17]. Um exemplo típico é o operador de Grover [13, 34]:

$$C = 2|\psi\rangle\langle\psi| - I,$$

onde $|\psi\rangle$ é o estado uniforme no espaço da moeda.

2.3.2 Operador Shift e Estrutura Permutativa

O operador shift descreve a propagação da amplitude no grafo [26]. No caso do flip-flop shift, sua ação pode ser descrita como [26, 34]:

$$S|v, d\rangle = |v', d'\rangle,$$

onde v' é o vértice adjacente na direção d, e d' é a direção oposta.

Uma interpretação fundamental consiste em identificar o espaço de estados com o conjunto de arestas orientadas do grafo [26]. Nesse caso, cada estado $|v, d\rangle$ corresponde a uma aresta direcionada.

2.3.3 Caráter Permutativo

O operador S atua como uma permutação no espaço de estados [26]. Mais especificamente, trata-se de uma permutação involutiva, satisfazendo [34, 39]:

$$S^2 = I.$$

Essa propriedade implica que o operador shift reorganiza os estados sem perda de informação, preservando a reversibilidade da dinâmica [24, 26]. Do ponto de vista estrutural, o operador não realiza uma difusão probabilística, mas sim uma redistribuição determinística de amplitudes ao longo das arestas orientadas do grafo [23, 26].

2.3.4 Interpretação Física

A estrutura permutativa do operador shift está diretamente associada à reversibilidade microscópica de sistemas quânticos [24, 26]. A evolução unitária preserva a norma e não introduz dissipação, refletindo o caráter conservativo da dinâmica [30].

A escolha do flip-flop shift não é arbitrária, pois garante uma interpretação consistente da propagação como um processo reversível sobre graus de liberdade direcionais [23, 26].

2.3.5 Reversibilidade e Emergência da Irreversibilidade

A mecânica quântica, enquanto teoria fundamental da natureza, é regida por uma dinâmica unitária descrita pela equação de Schrödinger [24, 30]. Tal dinâmica possui uma propriedade central: sua reversibilidade temporal. Em termos formais, a evolução de um sistema isolado é dada por um operador unitário, o que implica a existência de uma operação inversa bem definida, capaz de reconstruir estados passados a partir do estado presente [24]. Essa característica sugere uma interpretação conceitual profunda: a natureza, em seu nível mais fundamental, não destrói informação. Em vez disso, a evolução quântica promove uma redistribuição contínua da informação no espaço de estados, preservando integralmente as correlações estabelecidas ao longo do tempo [33, 45]. Entretanto, a experiência macroscópica é marcada por fenômenos irreversíveis, usualmente descritos pela segunda lei da termodinâmica, na qual a entropia de sistemas isolados tende a aumentar [19]. Essa aparente contradição entre a reversibilidade microscópica e a irreversibilidade macroscópica é resolvida ao se reconhecer que a irreversibilidade não é uma propriedade fundamental da dinâmica, mas sim um fenômeno emergente [33, 45].

De fato, a irreversibilidade decorre da limitação prática de acesso a todos os graus de liberdade relevantes de um sistema. Ao considerar subsistemas ou ao introduzir

interações com o ambiente, a informação inicialmente localizada torna-se distribuída em correlações complexas, frequentemente inacessíveis ao observador. Esse processo, conhecido como decoerência, conduz a descrições efetivas não unitárias, ainda que a evolução global permaneça unitária [33, 45]. Nesse contexto, modelos de passeios quânticos em grafos, como o passeio quântico no toro bidimensional, constituem uma representação abstrata, porém fisicamente consistente, dessa dinâmica reversível [23, 26]. A evolução do sistema é construída a partir de operadores unitários — tipicamente compostos por uma operação de moeda e um operador de deslocamento (shift) — sendo este último frequentemente interpretado como uma permutação no espaço de Hilbert, especialmente na versão flip-flop [26]. Assim, o passeio quântico preserva explicitamente a informação ao longo de sua evolução, refletindo a estrutura reversível da mecânica quântica [24]. A introdução de mecanismos como broken links ou percolação dinâmica não implica uma quebra da unitariedade fundamental, mas sim a modelagem de uma perda efetiva de controle sobre o sistema [4, 18]. A natureza, em seu nível fundamental, não "esquece". Dado o estado presente, o passado está, em princípio, codificado nele. Dessa forma, pode-se afirmar que a reversibilidade da mecânica quântica sugere que a natureza, em seu nível mais fundamental, não apaga informação, mas apenas a redistribui no espaço de estados [45]. A irreversibilidade observada emerge não de uma quebra dessa dinâmica, mas da limitação intrínseca do observador em acessar todas as correlações geradas ao longo da evolução [33]. O ruído, ou a simulação deste, não torna a dinâmica não-unitária em nível fundamental; ele apenas transforma uma evolução unitária global em uma descrição efetiva não-unitária para o observador [18, 45].

2.3.6 Experimentos e Evidências da Reversibilidade

A ideia de reversibilidade na mecânica quântica possui não apenas importância matemática, mas também profundo significado filosófico. Durante séculos, a experiência humana consolidou a percepção de que o tempo possui uma direção inevitável: passado, presente e futuro parecem claramente distintos. Processos naturais aparentam ocorrer sempre em um único sentido. Objetos quebram, sistemas envelhecem e o caos parece aumentar continuamente. Entretanto, a física quântica introduziu uma visão surpreendente da natureza microscópica. As equações fundamentais que descrevem sistemas quânticos isolados não distinguem naturalmente passado e futuro. Isso levou a uma questão central: seria a reversibilidade apenas uma propriedade matemática elegante ou algo fisicamente observável? Ao longo do século XX, diversos experimentos passaram a indicar que a reversibilidade quântica não é apenas formalismo matemático, mas uma característica real da dinâmica microscópica. Um dos exemplos mais emblemáticos surgiu nos experimentos de eco de spin desenvolvidos

por Erwin Hahn em 1950 [14]. Nesses experimentos, sistemas compostos por muitos spins nucleares inicialmente evoluíam para estados aparentemente desordenados e incoerentes. Contudo, ao aplicar sequências apropriadas de pulsos eletromagnéticos, parte da evolução do sistema podia ser efetivamente revertida, produzindo um fenômeno conhecido como *spin echo*. Do ponto de vista filosófico, esse resultado foi extraordinário. Informações que pareciam perdidas devido à dispersão e ao aparente caos coletivo não haviam sido destruídas fundamentalmente; elas permaneciam codificadas na estrutura microscópica do sistema. O experimento sugeria que a natureza microscópica preserva informação de maneira muito mais rigorosa do que nossa intuição macroscópica normalmente supõe. Posteriormente, experimentos envolvendo ressonância magnética nuclear, óptica quântica e manipulação coerente de átomos passaram a demonstrar fenômenos semelhantes [35]. Em muitos casos, estados quânticos aparentemente degradados podiam recuperar coerência parcial quando submetidos a evoluções controladas cuidadosamente planejadas. Com o desenvolvimento da computação quântica, novas evidências tornaram-se ainda mais impressionantes. Sistemas compostos por qubits passaram a ser manipulados através de portas lógicas unitárias extremamente precisas, permitindo inverter operações quânticas complexas e reconstruir estados anteriores do sistema [24]. Esses experimentos possuem enorme relevância conceitual porque reforçam a ideia de que a irreversibilidade observada no cotidiano talvez não seja uma propriedade fundamental da natureza, mas um fenômeno emergente associado à interação entre sistemas macroscópicos e seus ambientes. Em outras palavras, a física moderna passou gradualmente a sugerir que o universo microscópico talvez não "esqueça" informação da forma como nossa experiência intuitiva sugere. O que percebemos como perda irreversível pode corresponder apenas à dispersão extremamente complexa da informação entre muitos graus de liberdade. Essa interpretação tornou-se ainda mais importante em discussões contemporâneas envolvendo informação quântica, decoerência e buracos negros. O chamado "paradoxo da informação" em buracos negros, por exemplo, surge justamente da tensão entre a reversibilidade fundamental da mecânica quântica e aparentes mecanismos irreversíveis de perda de informação gravitacional.

No contexto dos passeios quânticos, essa visão possui papel conceitual central. A evolução do sistema é construída explicitamente a partir de operadores unitários reversíveis, refletindo diretamente os princípios fundamentais da dinâmica quântica microscópica. O fato de esses modelos preservarem coerência e reversibilidade fornece importante sustentação física para sua utilização como representações legítimas de propagação quântica em sistemas discretos.

Assim, os experimentos relacionados à recuperação de coerência quântica não apenas validaram previsões matemáticas da mecânica quântica, mas também con-

tribuíram para uma mudança profunda na compreensão filosófica da natureza. Eles reforçam a ideia de que, em sua estrutura mais fundamental, o universo parece preservar informação continuamente, mesmo quando nossa experiência macroscópica sugere exatamente o contrário.

2.3.7 Reversibilidade na Mecânica Quântica

Uma das características mais profundas e conceitualmente marcantes da mecânica quântica é a reversibilidade fundamental de sua dinâmica microscópica. Diferentemente de muitos fenôenos macroscópicos observados no cotidiano, nos quais o tempo parece possuir uma direção privilegiada associada a um eventual aumento da entropia, as leis fundamentais que governam sistemas quânticos isolados são, em sua essência, reversíveis no tempo.

O principal indício matemático dessa reversibilidade encontra-se na própria Equação de Schrödinger. A evolução temporal de um estado quântico $|\psi(t)\rangle$ é descrita por

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle,$$

onde H representa o Hamiltoniano do sistema. A solução formal dessa equação pode ser escrita como

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle,$$

com

$$U(t) = e^{-iHt/\hbar}.$$

Quando o Hamiltoniano é hermitiano, o operador de evolução temporal $U(t)$ é unitário, satisfazendo

$$U^\dagger(t)U(t) = I.$$

Essa propriedade implica a existência da operação inversa

$$U^{-1}(t) = U^\dagger(t) = U(-t),$$

mostrando que, em princípio, a evolução temporal pode ser revertida sem perda de informação.

Substituindo t por $-t$ na expressão do operador de evolução temporal:

$$U(t) = e^{-iHt/\hbar},$$

obtém-se:

$$U(-t) = e^{-iH(-t)/\hbar}.$$

Observa-se que o termo $(-t)$ multiplica diretamente o fator $(-i)$. Assim:

$$-iH(-t) = (-i)(-t)H = +iHt,$$

Portanto:

$$U(-t) = e^{+iHt/\hbar}.$$

Como o Hamiltoniano H é hermitiano, segue que:

$$U^{\dagger}(t) = e^{+iHt/\hbar}.$$

Logo:

$$U(-t) = U^{\dagger}(t) = U^{-1}(t),$$

mostrando que a evolução temporal quântica é reversível.

Do ponto de vista físico, isso significa que um sistema quântico isolado preserva completamente sua informação microscópica ao longo do tempo. Se fosse possível inverter perfeitamente a dinâmica do sistema, o estado inicial poderia ser reconstruído exatamente. Tal propriedade contrasta fortemente com muitos processos macroscópicos irreversíveis, como difusão térmica, atrito ou quebra de objetos, nos quais a informação prática sobre o estado inicial parece se perder.

Essa aparente contradição entre reversibilidade microscópica e irreversibilidade macroscópica constitui um dos grandes temas filosóficos da física moderna. Em nível fundamental, a natureza parece operar através de leis reversíveis; entretanto, em escalas macroscópicas, emerge uma seta temporal associada à termodinâmica e ao eventual, mas não necessariamente, crescimento da entropia.

Nesse contexto, a mecânica quântica introduz uma visão particularmente elegante da natureza: a dinâmica fundamental do universo não destrói informação, mas apenas a redistribui através de evoluções unitárias. Essa interpretação influenciou profundamente áreas como informação quântica, computação quântica e teoria quântica de campos.

A reversibilidade também desempenha papel central em passeios quânticos discretos. Nesses modelos, a evolução do sistema é construída a partir de operadores unitários, tipicamente compostos por operadores moeda e operadores shift. Em particular, o operador *flip-flop shift* possui caráter permutativo e involutivo, satisfazendo

$$S^2 = I,$$

o que reforça a interpretação da dinâmica como um processo reversível de propagação orientada em grafos.

Essa propriedade fornece importante suporte conceitual para a utilização de passeios quânticos em grafos como modelos físicos legítimos para propagação quântica. A preservação da unitariedade garante conservação de probabilidade, coerência e reversibilidade microscópica, características fundamentais da mecânica quântica.

Portanto, a reversibilidade não representa apenas uma propriedade matemática da Equação de Schrödinger, mas uma das ideias centrais da física quântica moderna: em sua descrição mais fundamental, a natureza parece preservar integralmente a informação ao longo do tempo.

Embora seja comum, como vimos, afirmar que a Mecânica Quântica é reversível, essa afirmação requer uma importante ressalva. A reversibilidade discutida nesta seção refere-se exclusivamente à evolução unitária de sistemas quânticos isolados, descrita pela equação de Schrödinger. A formulação completa da Mecânica Quântica também incorpora o postulado da medição, segundo o qual a observação de um sistema projeta o estado quântico sobre um dos autovetores do observável medido. Esse processo de projeção (ou colapso da função de onda) não é descrito por uma transformação unitária e, em geral, não pode ser invertido, constituindo, portanto, um elemento efetivamente irreversível da teoria. Assim, a reversibilidade é uma propriedade da evolução dinâmica entre medições, e não do processo de medição em si. No contexto deste trabalho, essa distinção é particularmente importante, uma vez que o passeio quântico é inteiramente descrito por operadores unitários — moeda, deslocamento, oráculo e simulação de ruído — sem a realização de medições intermediárias. Dessa forma, toda a dinâmica analisada preserva a reversibilidade da evolução unitária, sendo a medição realizada apenas ao final do algoritmo para a obtenção da probabilidade de encontrar o vértice marcado.

2.4 Passeios quânticos lackadaisical

Os passeios quânticos em tempo discreto (DTQWs) foram definidos pela primeira vez por Aharonov et al. [2], e fornecem uma estrutura versátil para explorar dinâmicas quânticas em grafos. Diferentemente de suas contrapartes clássicas, nas quais um caminhante se move probabilisticamente ao longo dos vértices do grafo, um caminhante quântico evolui unitariamente, mantendo superposição e coerência entre diferentes caminhos. Para modelar isso, um espaço de Hilbert auxiliar — o espaço de moeda — é introduzido, codificando as possíveis direções nas quais o caminhante pode se mover. Portanto, o estado do caminhante será $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_C \otimes \mathcal{H}_P$, onde $\mathcal{H}_C$ é o espaço da moeda, e $\mathcal{H}_P$ é o espaço de posição.

A evolução do passeio é então definida por dois operadores unitários. O operador moeda C atua localmente no espaço da moeda, criando uma superposição de direções, enquanto o operador shift S move condicionalmente o caminhante para

vértices adjacentes com base no estado da moeda. Um único passo do passeio é descrito pelo operador unitário

$$U = S\,(C \otimes I), \tag{2.1}$$

onde I atua no espaço de posição. Uma escolha amplamente utilizada para C é o operador de difusão de Grover [8],

$$C = 2\,|s_c\rangle\,\langle s_c| - I_d, \tag{2.2}$$

onde d é o grau do grafo, $|s_c\rangle$ é a superposição uniforme dos estados da moeda, e I_d é a identidade. Essa ideia pode ser facilmente generalizada para grafos não regulares aplicando-se uma moeda diferente para cada vértice.

Aplicações repetidas de U geram padrões de interferência que diferem marcadamente da difusão clássica e formam a base de aplicações algorítmicas, tais como busca espacial. No contexto de algoritmos de busca, o operador shift é frequentemente escolhido como o flip-flop shift, que não apenas move o caminhante do vértice u para um vértice vizinho v, mas também inverte o estado da moeda para apontar de volta de v em direção a u [8]. A fim de transformar o passeio em um algoritmo de busca espacial, um operador adicional é necessário para marcar os vértices alvo. Isso é obtido aplicando a reflexão

$$R = I - 2\sum_{m\in M} |m\rangle\,\langle m|\,, \tag{2.3}$$

que inverte a fase dos estados marcados, onde M denota o conjunto de vértices marcados. Por simplicidade, restringimos nossa análise ao caso $|M| = 1$, com o vértice marcado escolhido no centro da grade sem perda de generalidade. O algoritmo de busca é então implementado aplicando repetidamente o operador de evolução combinado $U' = RU$, que direciona amplitude para o vértice marcado por meio de interferência quântica.

A fim de definir um passeio quântico lackadaisical, o operador moeda é modificado pela introdução de um estado adicional que corresponde a um self-loop em cada vértice [41]. Concretamente, isso é feito substituindo o estado uniforme da moeda na Eq. 2.2 por

$$|s_c\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{d+\ell}}\left(\sum_{i=0}^{d-1}|i\rangle + \sqrt{\ell}\;|d\rangle\right), \tag{2.4}$$

onde ℓ é um parâmetro real que controla o peso do self-loop. Quando $\ell = 0$, isso se reduz a Moeda de Grover padrão, enquanto valores maiores de ℓ aumentam a

amplitude associada à permanência no vértice atual. O operador shift correspondente também deve ser definido adequadamente, de forma que o estado adicional da moeda $|d\rangle$ corresponda ao caminhante permanecendo no mesmo vértice. Essa construção formaliza o passeio quântico lackadaisical introduzido por Wong [41] e posteriormente analisado rigorosamente por Høyer e Yu [16].

Na Fig. 2.2, temos a evolução da probabilidade de sucesso para um passeio quântico lackadaisical sem ruído em uma grade bidimensional com $N = 32 \times 32$ vértices, comparando diferentes pesos de self-loop ℓ. O gráfico mostra que, quando $\ell = 4/N$, a probabilidade de encontrar o vértice marcado aumenta rapidamente e satura em um valor constante próximo de um. Para outros valores de ℓ, a probabilidade de sucesso é significativamente menor ou requer um tempo maior para se desenvolver. Esse comportamento é consistente com as observações numéricas reportadas por Wong para busca baseada em passeios quânticos lackadaisical em grades bidimensionais [44].

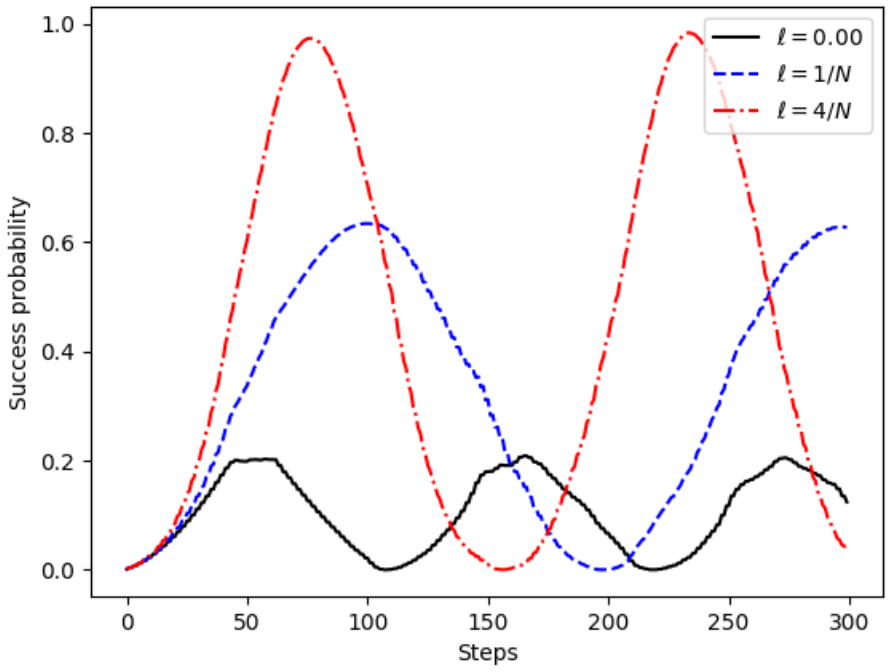

Figura 2.2: Probabilidade de sucesso em função do tempo para a busca com Moeda de Grover em uma grade bidimensional de $N = 32 \times 32$ vértices e self-loop de peso $\ell = 4/N$ em cada vértice, assumindo ausência de ruído. (Colorido online.)

O modelo Lackadaisical introduz um self-loop em cada vértice, ampliando o espaço de moeda. Nesse caso, o caminhante possui a opção adicional de permanecer no mesmo vértice.

A inclusão do self-loop altera a estrutura espectral do operador de evolução,

melhorando a probabilidade de sucesso em algoritmos de busca.

2.5 Adequação da Modelagem em Grafos

Passeios quânticos em grafos podem ser interpretados como modelos discretos de sistemas físicos, nos quais uma partícula possui graus de liberdade internos e espaciais [9, 23, 26].

A decomposição da evolução em operadores moeda e shift reflete, respectivamente, a mistura de estados internos e a propagação espacial da partícula [3, 17, 26].

No contexto de ruído estrutural, o grafo subjacente pode variar no tempo, como no caso de broken links [20, 29]. Nesse cenário, o operador de evolução torna-se dependente do tempo:

$$U_t = S_t \cdot (C \otimes I),$$

onde S_t depende da configuração instantânea do grafo.

Apesar da aleatoriedade, cada passo da evolução permanece unitário [4]. Assim, o sistema pode ser interpretado como uma composição de operadores unitários aleatórios [18, 20].

Essa formulação corresponde a um sistema quântico sujeito a desordem dinâmica, no qual a estrutura do meio varia no tempo [18, 20]. A modelagem em grafos permite incorporar tais efeitos de forma natural, preservando a consistência física da evolução [9, 23, 26].

2.6 Decoerência por percolação em passeios quânticos em tempo discreto

O estudo de ruído e decoerência em passeios quânticos é essencial para reduzir a distância entre modelos idealizados e implementações práticas [1]. Embora os passeios quânticos possam oferecer vantagens algorítmicas significativas em cenários sem ruído, dispositivos quânticos reais são inerentemente afetados por descoerência, como erros de portas lógicas, relaxação de qubits e interações com o ambiente. Compreender como a decoerência impacta a dinâmica dos passeios quânticos é, portanto, um passo crucial para o desenvolvimento de algoritmos que não sejam apenas teoricamente eficientes, mas também suficientemente robustos para operar em hardware quântico de curto prazo. Nesse contexto, a análise de diferentes modelos de ruído fornece informações valiosas sobre a resiliência dos passeios quânticos e destaca estratégias — como a inclusão de self-loops — capazes de mitigar efeitos prejudiciais e ampliar sua aplicabilidade.

O estudo de passeios quânticos sob ruído tem atraído atenção considerável, uma vez que a decoerência afeta fortemente seu desempenho algorítmico. Diversos modelos de ruído foram considerados na literatura, cada um capturando diferentes mecanismos físicos. Uma abordagem comum consiste em aplicar canais quânticos, como ruído despolarizante ou phase-damping, ao espaço da moeda ou ao espaço da posição, o que suprime gradualmente a interferência quântica e conduz o passeio em direção a um comportamento difusivo clássico. Outra importante linha de pesquisa envolve ruído estrutural, no qual o próprio grafo subjacente é perturbado a cada passo. Exemplos incluem percolação estática ou dinâmica, nas quais arestas são removidas aleatoriamente uma única vez no início ou independentemente a cada passo temporal [1, 25, 31]. Neste trabalho, consideraremos ruído por percolação dinâmica.

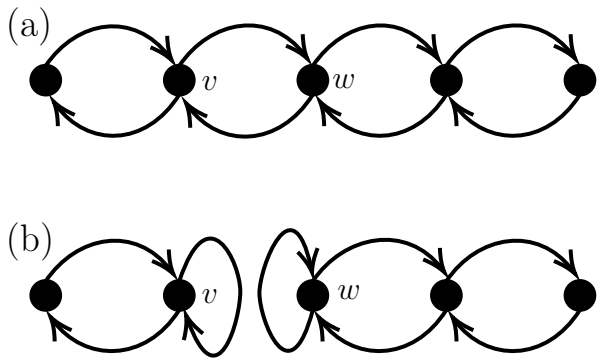

Figura 2.3: A eliminação de uma aresta faz com que o fluxo de amplitude seja redirecionado. (a) Nenhuma aresta foi removida. (b) A aresta (v, w) foi removida.

Na Fig. 2.3, ilustramos como a eliminação de uma aresta afeta a propagação de amplitudes em um passeio quântico em tempo discreto do tipo coined. Por simplicidade, a figura omite self-loops e não representa o flip-flop shift, mas as mesmas ideias se aplicam quando esses elementos estão presentes, como em buscas quânticas lackadaisical. Cada círculo representa um vértice, e cada seta corresponde a uma componente do estado quântico do caminhante: o estado conjunto $|v, d\rangle$, onde v é o vértice e d indica a direção (ou estado da moeda) para a qual o caminhante está apontando. Na parte (a), nenhuma aresta foi removida, e a amplitude pode fluir livremente entre vértices adjacentes em ambas as direções. O caminhante no vértice v com estado da moeda apontando para w irá saltar para w no próximo passo, e vice-versa. Na parte (b), a aresta (v, w) foi removida, o que impede o caminhante de transitar entre esses vértices. Como consequência, a amplitude que fluiria pela aresta removida precisa ser redirecionada. Para manter a unitariedade, a amplitude é realocada para outras direções da moeda disponíveis no vértice v. Esse mecanismo modela a decoerência do tipo percolação no passeio quântico: a

cada passo temporal, a conectividade do grafo é modificada dinamicamente, mas a evolução global permanece unitária por meio do ajuste da redistribuição interna de amplitude [12, 21, 25, 28].

Capítulo 3

Revisão Bibliográfica

3.1 Passeios Aleatórios Clássicos em Grafos

Passeios aleatórios clássicos constituem uma importante classe de processos estocásticos utilizados para modelar fenôenos de difusão, transporte e busca em sistemas discretos. Em grafos regulares, tais processos podem ser descritos como cadeias de Markov homogêneas, nas quais a evolução temporal depende apenas do estado atual do sistema [22].

No contexto de grafos toroidais bidimensionais, os passeios aleatórios apresentam propriedades relevantes como tempo de mistura, tempo de cobertura e tempo médio de retorno. Essas propriedades possuem forte relação com a estrutura espectral do grafo subjacente [5]. O toro bidimensional destaca-se por apresentar simetria translacional e periodicidade espacial, características que simplificam análises matemáticas e tornam o modelo adequado para estudos assintóticos.

Além disso, problemas de busca baseados em passeios aleatórios clássicos são frequentemente utilizados como referência para comparação com algoritmos quânticos, permitindo avaliar ganhos computacionais provenientes de interferência e coerência quântica [17].

3.2 Passeios Quânticos Discretos

Passeios quânticos discretos podem ser entendidos como extensões quânticas dos passeios aleatórios clássicos, substituindo distribuições de probabilidade por amplitudes complexas sujeitas à evolução unitária [3].

No modelo discreto no tempo, a dinâmica do sistema é normalmente composta por dois operadores principais: um operador moeda (coin operator) e um operador deslocamento (shift operator). O operador moeda atua sobre os graus internos de liberdade do caminhante, enquanto o operador shift promove a propagação espacial

condicionada ao estado interno [26].

Uma característica fundamental dos passeios quânticos é a presença de interferência quântica, responsável por distribuições de probabilidade significativamente diferentes das observadas em processos clássicos. Essa propriedade permite o desenvolvimento de algoritmos quânticos mais eficientes para problemas de busca e exploração de grafos [10].

3.3 Busca Baseada em Passeios Quânticos

Algoritmos de busca baseados em passeios quânticos constituem uma importante alternativa ao algoritmo de Grover para problemas espaciais. Nesses algoritmos, o vértice marcado é incorporado à dinâmica através de operadores de reflexão ou perturbações locais da evolução unitária [34].

No caso específico de grades bidimensionais, o algoritmo de busca apresenta comportamento distinto daquele observado em grafos completos. Em particular, a propagação local imposta pela geometria da rede afeta diretamente o tempo de convergência e a probabilidade máxima de sucesso [7].

Tulsi propôs uma modificação do algoritmo original baseada na introdução de um qubit auxiliar, permitindo aumentar significativamente a probabilidade de sucesso da busca em grades bidimensionais [36]. Essa melhoria possui interpretação espectral associada à redução de oscilações indesejadas entre autoestados relevantes da evolução unitária.

Posteriormente, Wong introduziu o modelo conhecido como *lackadaisical quantum walk*, no qual self-loops ponderados são adicionados aos vértices do grafo [40]. A presença desses self-loops altera a estrutura espectral do sistema e pode aumentar significativamente a eficiência da busca quântica em determinadas topologias.

3.4 Passeios Quânticos Lackadaisical

O modelo lackadaisical introduz um grau adicional de liberdade associado à permanência do caminhante no mesmo vértice através de self-loops ponderados. Formalmente, cada vértice recebe uma aresta adicional conectada a si próprio, associada a um peso ℓ [40].

Estudos posteriores demonstraram que escolhas específicas para o peso dos self-loops podem otimizar a busca quântica em grades bidimensionais e grafos periódicos [32]. Em particular, escolhas proporcionais ao inverso da ordem do grafo mostraram-se especialmente relevantes em problemas de busca espacial.

Além dos ganhos computacionais, o modelo lackadaisical possui interesse físico e matemático por modificar a dispersão do passeio quântico, alterando propriedades

espectrais e padrões de interferência.

3.5 Abordagem Analítica

Uma importante contribuição ao estudo dos passeios quânticos com auto-laços foi apresentada por Høyer e Yu [16], que forneceram uma análise rigorosa dos chamados lackadaisical quantum walks (LQWs). Neste trabalho, os autores demonstram que, ao adicionar um auto-laço de peso apropriado a cada vértice de um grafo regular localmente arco-transitivo, é possível localizar um único vértice marcado com probabilidade constante em tempo O(HT), onde HT é o tempo de hitting clássico. A análise estabelece uma equivalência formal entre os LQWs e os passeios quânticos interpolados de Szegedy, permitindo o uso de ferramentas analíticas já consolidadas. Este resultado confirma e generaliza diversas conjecturas anteriores baseadas apenas em evidências numéricas, como no caso do toro 2D, ciclos e hipercubos, consolidando os LQWs como uma abordagem eficiente para algoritmos de busca em grafos estruturados.

3.6 Operador Shift e Estrutura Permutativa

O operador shift desempenha papel central na dinâmica dos passeios quânticos discretos. Entre as diferentes possibilidades, o chamado *flip-flop shift* destaca-se por seu caráter permutativo e involutivo [26].

Nesse modelo, o espaço de Hilbert pode ser interpretado como um espaço de arestas orientadas, no qual o operador shift realiza uma permutação unitária entre direções opostas. Tal propriedade implica:

$$S^2 = I,$$

garantindo reversibilidade microscópica da dinâmica.

Essa interpretação é particularmente importante para justificar a adequação física de simulações em grafos discretos como representações válidas de sistemas quânticos propagativos. A dinâmica unitária preserva coerência e reversibilidade, características fundamentais da mecânica quântica.

3.7 Decoerência, Broken Links e Percolação Dinâmica

Efeitos de decoerência em passeios quânticos têm sido amplamente estudados devido à inevitável interação entre sistemas quânticos e o ambiente externo [18]. Entre os diferentes modelos de ruído, destaca-se o modelo de *broken links*, no qual conexões do grafo são removidas aleatoriamente ao longo da evolução temporal.

Esse mecanismo possui forte relação conceitual com modelos de percolação dinâmica, nos quais o grafo subjacente varia aleatoriamente no tempo [29]. Em ambos os casos, a evolução do sistema pode ser interpretada como uma sequência de operadores unitários condicionados a grafos aleatórios.

Apesar da introdução de ruído, diversos trabalhos mostram que propriedades genuinamente quânticas podem sobreviver parcialmente, incluindo interferência residual, revivals de coerência e assinaturas não-markovianas [4].

Recentemente, estudos envolvendo passeios quânticos lackadaisical em grades toroidais bidimensionais investigaram o impacto de broken links sobre a probabilidade de sucesso de algoritmos de busca. Esses resultados indicam que determinadas escolhas do peso dos self-loops podem aumentar a robustez do algoritmo frente à decoerência estrutural.

Capítulo 4

Modelo de Busca por Passeio Quântico Lackadaisical

Neste capítulo, apresentamos o modelo de busca baseado em passeios quânticos discretos conforme desenvolvido por Wong [44], especializado para o caso de um toro bidimensional com um único vértice marcado. Este modelo constitui a base para as análises realizadas nos capítulos seguintes, incluindo a investigação de perturbações estocásticas introduzidas nesta tese.

4.1 Espaço de Hilbert

Considere um grafo com N vértices. O espaço de Hilbert do passeio quântico é dado por:

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^d$$

onde $\mathbb{C}^N$ representa o espaço de posições e $\mathbb{C}^d$ representa o espaço de moeda. No caso do toro 2D com self-loops, temos $d = 5$, com base:

$$\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle, |\leftarrow\rangle, |\rightarrow\rangle, |\circlearrowleft\rangle\}$$

onde $|\circlearrowleft\rangle$ representa o self-loop. O sistema é inicializado no estado uniforme:

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{v=1}^{N} |v\rangle \otimes |s_c\rangle$$

onde

$$|s_c\rangle = \frac{1}{\sqrt{4+\ell}} \left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle + |\leftarrow\rangle + |\rightarrow\rangle + \sqrt{\ell}\, |\circlearrowleft\rangle \right)$$

Este estado é o autovetor associado ao autovalor unitário do operador de evolução [44].

4.2 Operador de Moeda

O operador moeda é definido como:

$$C = 2|s_c\rangle\langle s_c| - I$$

correspondendo ao operador de difusão de Grover generalizado para grafos ponderados [43].

4.3 Operador Shift

O operador shift S implementa a dinâmica de propagação do passeio quântico, movendo o sistema entre vértices adjacentes e invertendo a direção da moeda (flip-flop shift), conforme estabelecido em [7].

A evolução sem marcação é dada por:

$$U = S(C \otimes I_N)$$

Para introduzir o problema de busca, considera-se um vértice marcado $w \in V$. A busca é implementada por meio de um oráculo do tipo Grover:

$$Q = I_N - 2|w\rangle\langle w|$$

A evolução do sistema passa a ser:

$$U' = U(Q \otimes I_5)$$

Este operador é equivalente a aplicar C nos vértices não marcados e $-C$ no vértice marcado, seguido do operador shift [44].

O modelo lackadaisical introduz um self-loop com peso ℓ em cada vértice. Resultados numéricos mostram que a escolha

$$\ell = \frac{4}{N}$$

permite que a probabilidade de sucesso atinja um valor constante próximo de 1 em tempo $O(\sqrt{N \log N})$ [44].

Essa escolha de parâmetro é adotada ao longo desta tese e constitui o ponto de partida para as extensões propostas em [37, 38].

A probabilidade de encontrar o vértice marcado no tempo t é dada por [34, 36, 40]:

$$P(t) = \sum_{c} |\langle w, c|\psi(t)\rangle|^2$$

Nosso objetivo é determinar o tempo ótimo [11, 34]:

$$t^* = \arg\max_t P(t)$$

4.4 Interpretação da Dinâmica

Uma característica fundamental do modelo lackadaisical é que a amplitude de probabilidade pode se concentrar no self-loop do vértice marcado, permitindo que a probabilidade de sucesso atinja valores próximos de 1, em contraste com o modelo sem self-loop, no qual a probabilidade máxima é da ordem de $O(1/\log N)$ [7].

A partir do modelo apresentado, esta tese investiga o impacto de perturbações estocásticas na dinâmica do passeio quântico, em particular através da introdução de remoção aleatória de arestas (broken links), conforme desenvolvido em [37, 38].

Conforme discutido em [44], o modelo lackadaisical com oráculo de Grover não se enquadra diretamente no formalismo do algoritmo de busca abstrato, o que limita a aplicabilidade de métodos analíticos baseados em decomposição espectral. Assim, a análise do modelo é predominantemente numérica.

Capítulo 5

Modelagem de Busca Quântica Lackadaisical sob Ruído Estrutural

5.1 Introdução

A modelagem de algoritmos de busca baseados em passeios quânticos em ambientes ruidosos constitui um problema central na compreensão da robustez desses algoritmos frente a imperfeições físicas e estruturais. Passeios quânticos têm sido amplamente utilizados como ferramenta para o desenvolvimento de algoritmos de busca, apresentando vantagens significativas em relação a abordagens clássicas [6, 17].

Em particular, ruídos que afetam diretamente a topologia do grafo subjacente introduzem desafios adicionais, uma vez que alteram a própria estrutura sobre a qual a dinâmica quântica ocorre. Esse tipo de ruído, frequentemente modelado por meio de processos de percolação dinâmica, tem sido utilizado como forma efetiva de descrever efeitos de decoerência em sistemas baseados em passeios quânticos [18].

Neste contexto, apresenta-se uma formulação unificada para a modelagem de busca quântica lackadaisical em grafos bidimensionais sob a presença de ruído estrutural dinâmico, descrito por meio da remoção aleatória de arestas ao longo do tempo. A abordagem adotada neste trabalho baseia-se na formulação algébrica proposta em [37], estabelecendo uma conexão direta com modelos de percolação dinâmica.

O objetivo deste capítulo é estabelecer o formalismo matemático necessário para a análise posterior do comportamento dinâmico do sistema, sem abordar, neste momento, resultados experimentais específicos.

5.2 Passeio Quântico Lackadaisical em Grafos Bidimensionais

Considere um grafo bidimensional regular $G = (V, E)$, representando um toro de dimensão $m \times m$, com $N = m^2$ vértices. Cada vértice possui grau quatro, correspondente às direções norte, sul, leste e oeste.

O formalismo de passeios quânticos discretos estabelece que a dinâmica do sistema ocorre em um espaço de Hilbert composto, dado por

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_C \otimes \mathcal{H}_P,$$

onde $\mathcal{H}_C$ é o espaço de moeda e $\mathcal{H}_P$ é o espaço de posições [17].

No modelo lackadaisical, introduz-se um estado adicional associado a um self-loop em cada vértice, representando a possibilidade de o caminhante permanecer na mesma posição. Esse modelo foi introduzido como uma forma de melhorar o desempenho de algoritmos de busca baseados em passeios quânticos [42]. O peso associado a esse self-loop é denotado por ℓ, sendo considerado, neste trabalho, o valor $\ell = 4/N$.

O operador de moeda atua localmente no espaço $\mathcal{H}_C$, sendo definido como uma generalização do operador de difusão de Grover para o caso ponderado. O operador de deslocamento (shift) realiza a propagação do estado entre vértices adjacentes, respeitando a estrutura do grafo e incorporando o mecanismo de flip-flop, amplamente utilizado na literatura de passeios quânticos [6].

A evolução do sistema em um grafo fixo é descrita pelo operador unitário $U = SC$.

5.3 Introdução de Ruído Estrutural

Para modelar descoerência na estrutura do grafo, considera-se a presença de ruído estrutural na forma de remoção dinâmica de arestas. Esse tipo de ruído reflete situações em que conexões entre vértices podem falhar de maneira aleatória ao longo do tempo, sendo frequentemente associado a modelos de percolação dinâmica [18].

Formalmente, define-se uma sequência de grafos

$$G_t = (V, E_t),$$

onde $E_t \subseteq E$ é obtido a partir de E pela remoção independente de cada aresta com probabilidade p.

5.3.1 Modelo de Simulação de Ruído por Percolação

Operações quânticas podem ser entendidas como matrizes, e isso permite o uso de ferramentas algébricas para reinterpretar o algoritmo. O passeio quântico lackadaisical [44] consiste em 3 operações, Q, C e S, em cada uma das n iterações. A operação Q atua como o oráculo do algoritmo, invertendo o sinal do vértice marcado, e C é a operação da moeda quântica, ambas possuindo representações matriciais bem compreendidas [44]. A operação S é o shift utilizado no passeio, que será discutido com mais detalhes nos próximos parágrafos. O modelo deste trabalho adiciona uma ou mais operações de decoerência à sequência, representadas pela letra B.

De maneira semelhante a Wong, todas essas operações ocorrem no espaço de Hilbert $\mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^5$, utilizando os N vértices do grafo e as 5 direções da moeda como base computacional, e o algoritmo começa com a mesma superposição $|\psi_0\rangle$, uniformemente distribuída sobre os vértices, mas não necessariamente sobre as direções da moeda. Então, após n passos, pode-se representar o estado alcançado como

$$|\psi_n\rangle = \prod_{i=1}^{n} B_i S(I_n \otimes C)(Q \otimes I_5) |\psi_0\rangle \tag{5.1}$$

Para explicar B, é importante lembrar que a operação S neste algoritmo é um flip-flop shift, e pode ser entendida como uma matriz de permutação que simplesmente troca a posição das amplitudes em $|\psi\rangle$ de acordo com as arestas do toro, conferindo ao grafo sua estrutura. Assim, S permuta apenas pares específicos de posições em $|\psi\rangle$, de maneira controlada e previsível, e segue que $S^{-1} = S = S^\dagger$.

Resta modelar o Broken Link como uma operação matricial, isto é, o passo probabilístico do algoritmo no qual ocorre uma operação de percolação. Se a probabilidade de Broken Link é 0, a operação deve ser equivalente à matriz identidade, já que S deve permanecer inalterado. Se a probabilidade de Broken Link é 1, a matriz deve cancelar completamente o flip-flop shift, uma vez que todas as conexões estariam quebradas e os vértices não mais permutariam entre si, isto é, $BS = I$. Como a matriz S é sua própria inversa, isso também implica que, neste último caso, teríamos $B = S$.

Para obter essas propriedades, B começa, a cada passo, idêntica a S. Então, para cada aresta do grafo, existe uma probabilidade de $(1 - p)$ de que os dois elementos diagonais específicos da matriz que codificam essa conexão, os quais são 0, tornem-se 1. Simultaneamente, os elementos fora da diagonal, iguais a 1, nas mesmas linhas e colunas tornam-se 0. Isso efetivamente desfaz o shift naquela aresta específica, sendo eficiente para modelar a propriedade de Broken Link do algoritmo. Uma consequência direta deste modelo é que, para qualquer B, vale que $B^{-1} = B$.

Uma vantagem dessa abordagem é a possibilidade de concatenar diversos fe-

nômenos possíveis de quebra de arestas, utilizando uma matriz B diferente para representar cada passo probabilístico de perda de alguma informação de adjacência na estrutura do grafo. Também é importante notar que o modelo permite a aplicação simultânea de quebras determinísticas de arestas B_d no mesmo passo, desde que as matrizes respeitem todas as propriedades vistas acima. Isso é independente de quaisquer decoerências probabilísticas B_p,

$$|\psi_n\rangle = \prod_{i=1}^{n} B_{d,i} B_{p,i} S(I_n \otimes C)(Q \otimes I_5) \, |\psi_0\rangle \, . \tag{5.2}$$

Finalmente, se duas matrizes diferentes B_i e B_i' aplicadas no mesmo passo do algoritmo quebrarem uma aresta em comum, o resultado será equivalente a manter a aresta intacta, o que pode ser desejável ou não, dependendo da aplicação do modelo. Como a quantidade de arestas no grafo é $2N$, existem apenas 2^{2N} matrizes B válidas distintas.

Essa abordagem de modelagem segue diretamente a estrutura proposta em [37], na qual a dinâmica do sistema é interpretada como uma evolução condicionada a uma realização aleatória da topologia do grafo.

5.4 Evolução Quântica Dependente do Tempo

A presença de ruído estrutural implica que o operador de deslocamento passa a depender explicitamente do tempo, sendo denotado por S_t. Consequentemente, o operador de evolução do sistema também se torna dependente do tempo:

$$U_t = S_t \cdot C.$$

A evolução do estado quântico é então dada por

$$|\psi_t\rangle = U_t U_{t-1} \cdots U_1 |\psi_0\rangle.$$

Apesar da dependência temporal, cada operador U_t é unitário, de modo que a evolução global preserva a norma do estado. No entanto, a composição de operadores distintos ao longo do tempo introduz uma dinâmica mais complexa, caracterizada pela ausência de um operador de evolução fixo, fenômeno discutido em estudos sobre decoerência em passeios quânticos [18].

5.5 Interpretação como Processo Unitário Aleatório

A dinâmica descrita pode ser interpretada como um processo unitário aleatório, no qual, a cada passo de tempo, um operador unitário é selecionado de acordo com uma distribuição de probabilidade induzida pelo processo de remoção de arestas.

Essa interpretação estabelece uma conexão direta com modelos de percolação dinâmica e tem sido utilizada para descrever de forma efetiva a transição entre regimes quânticos e clássicos em passeios quânticos [18].

No contexto deste trabalho, essa abordagem permite modelar efeitos de decoerência sem recorrer explicitamente à formalização de sistemas abertos, mantendo a unitariedade da evolução em cada realização individual do sistema, conforme discutido em [37].

5.6 Formulação do Problema de Busca

O problema de busca é introduzido pela marcação de um vértice específico $|w\rangle \in \mathcal{H}_P$. A presença do vértice marcado modifica localmente o operador moeda, de forma a induzir uma dinâmica que favorece a concentração de amplitude nesse vértice, conforme proposto em algoritmos de busca baseados em passeios quânticos [34].

O estado inicial do sistema é tipicamente escolhido como uma superposição uniforme sobre todos os vértices e direções da moeda.

A probabilidade de sucesso do algoritmo, em um dado instante t, é definida como a probabilidade de encontrar o sistema no vértice marcado:

$$P_{\text{sucesso}}(t) = \sum_{c} |\langle c, w|\psi_t\rangle|^2.$$

onde c representa as direções da moeda e w o vértice marcado.

Essa quantidade será o principal objeto de análise nos capítulos seguintes, nos quais serão investigados os efeitos do ruído estrutural sobre a dinâmica de busca.

Capítulo 6

Impacto de Broken Links na Probabilidade de Sucesso da Busca

6.1 Introdução

Neste capítulo, investigam-se os efeitos do ruído estrutural, modelado por meio de broken links, sobre o desempenho de algoritmos de busca baseados em passeios quânticos lackadaisical. Em particular, analisa-se a evolução temporal da probabilidade de sucesso, definida como a probabilidade de localizar o vértice marcado ao longo da dinâmica do sistema.

A influência de ruído em passeios quânticos tem sido amplamente estudada na literatura, sendo conhecida sua capacidade de modificar significativamente os padrões de interferência quântica e, consequentemente, o desempenho de algoritmos de busca [18]. No caso específico de ruído estrutural, a remoção dinâmica de arestas introduz um mecanismo adicional de desordem, afetando diretamente a propagação do estado quântico.

Dando continuidade ao modelo estabelecido no Capítulo anterior, esta seção apresenta resultados numéricos obtidos a partir de simulações do sistema, com o objetivo de caracterizar o impacto desse tipo de ruído na probabilidade de sucesso da busca. Resultados relacionados à robustez do modelo lackadaisical sob ruído estrutural foram inicialmente investigados em [38], servindo como base para a análise desenvolvida neste capítulo.

6.2 Configuração Experimental

As simulações foram realizadas considerando grafos quadrados bidimensionais com condições periódicas de contorno, formando toros de dimensão $m \times m$, com $N = m^2$ vértices.

O modelo lackadaisical foi adotado com peso de self-loop fixado em $\ell = 4/N$, conforme discutido na literatura [42]. O estado inicial do sistema corresponde a uma superposição uniforme sobre todos os vértices e estados da moeda, configuração típica em algoritmos de busca baseados em passeios quânticos [34].

O ruído estrutural foi introduzido por meio da remoção independente de arestas a cada passo de tempo, com probabilidade p, conforme modelado no Capítulo 4 e formalizado em [37]. Para cada valor de p, foram realizadas múltiplas execuções independentes, permitindo a obtenção de médias estatísticas da probabilidade de sucesso.

A quantidade de interesse é a probabilidade de sucesso ao longo do tempo, definida por

$$P_{\text{sucesso}}(t) = \sum_{c} |\langle c, w|\psi_t\rangle|^2,$$

onde a soma é realizada sobre todos os estados da moeda.

6.3 Evolução Temporal da Probabilidade de Sucesso

A análise da evolução temporal da probabilidade de sucesso revela que a presença de broken links altera significativamente a dinâmica do sistema em comparação com o caso sem ruído.

Na Fig. 6.1, temos $\overline{P}_T(x, y)$ em uma grade toroidal 16×16 após $T = 10000$ passos, exibida como mapas de calor para diferentes valores da probabilidade de broken links p e do peso do self-loop ℓ. O subplot superior esquerdo corresponde ao algoritmo regular sem ruído e sem self-loops: o vértice marcado é identificável, mas apenas com uma pequena probabilidade de sucesso. No subplot superior direito, self-loops são incluídos, mas nenhum ruído está presente, reproduzindo o resultado de Wong [41] com uma probabilidade muito maior no vértice marcado. O subplot inferior esquerdo mostra que, quando ruído é introduzido sem self-loops, a decoerência degrada completamente a busca e a distribuição converge para uniforme. Finalmente, o subplot inferior direito ilustra nosso principal resultado: com ruído e self-loops simultaneamente, o vértice marcado ainda se destaca com uma probabilidade significativamente acima da uniforme, demonstrando que os self-loops aumentam a robustez da busca quântica lackadaisical sob decoerência.

Na ausência de ruído, o comportamento típico do algoritmo é caracterizado por oscilações acentuadas na probabilidade de sucesso, associadas a efeitos de interferência quântica [11]. A introdução de ruído estrutural modifica esse padrão, resultando em uma dinâmica mais suave e progressivamente menos oscilatória.

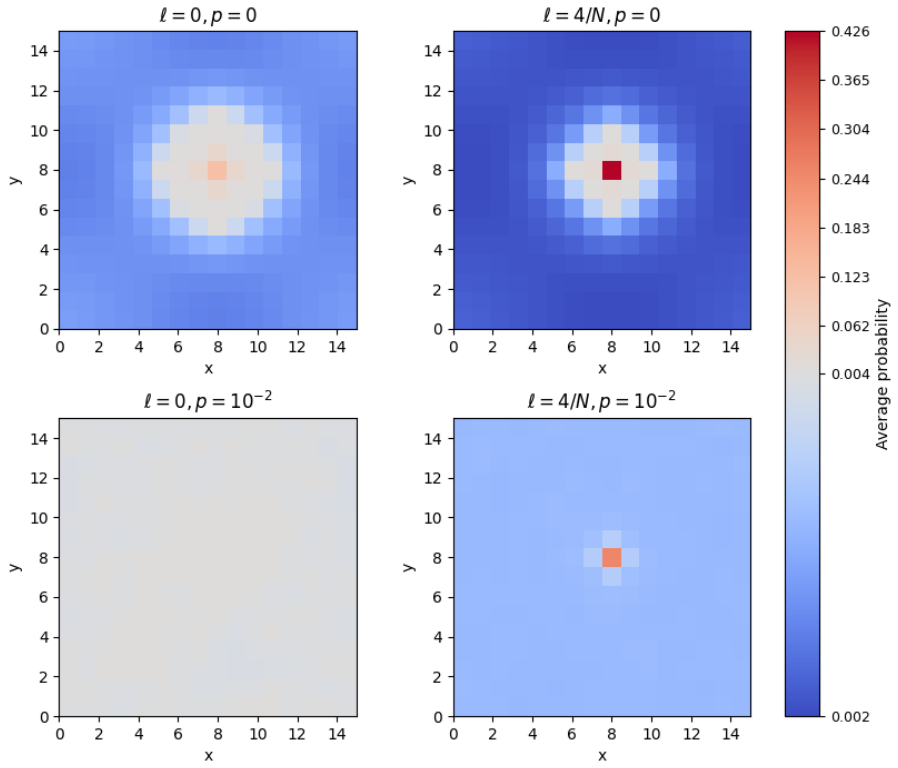

Figura 6.1: Distribuição média de probabilidade $\overline{P}_T(x, y)$ em uma grade toroidal 16×16 após $T = 10000$ passos da busca por passeio quântico lackadaisical. Cada subplot corresponde a um par diferente de parâmetros, com a probabilidade de broken links p e o peso do self-loop ℓ indicados no título. As distribuições são mostradas como mapas de calor sobre a grade. (Colorido online.)

Observa-se que, à medida que o tempo evolui, a probabilidade de sucesso tende a se estabilizar, indicando a aproximação de um regime assintótico. Esse comportamento foi observado de forma consistente em diferentes configurações do sistema, embora o tempo necessário para atingir esse regime varie em função dos parâmetros considerados.

6.4 Dependência com a Taxa de Broken Links

A variação da probabilidade de remoção de arestas p exerce influência direta sobre a dinâmica transiente do sistema.

Na Fig. 6.2, mostramos a probabilidade de sucesso em função do tempo para o passeio sem self-loops ($\ell = 0$) sob diferentes probabilidades de broken links p. Os resultados indicam que o aumento de p suprime o pico da probabilidade de sucesso e conduz a dinâmica em direção à linha de base uniforme. Para tempos de evolução da

ordem de $1/p$, o passeio quântico torna-se efetivamente totalmente decoerente, e o processo de busca é completamente degradado, com a distribuição de probabilidade aproximando-se da uniforme e o vértice marcado deixando de ser distinguível [1].

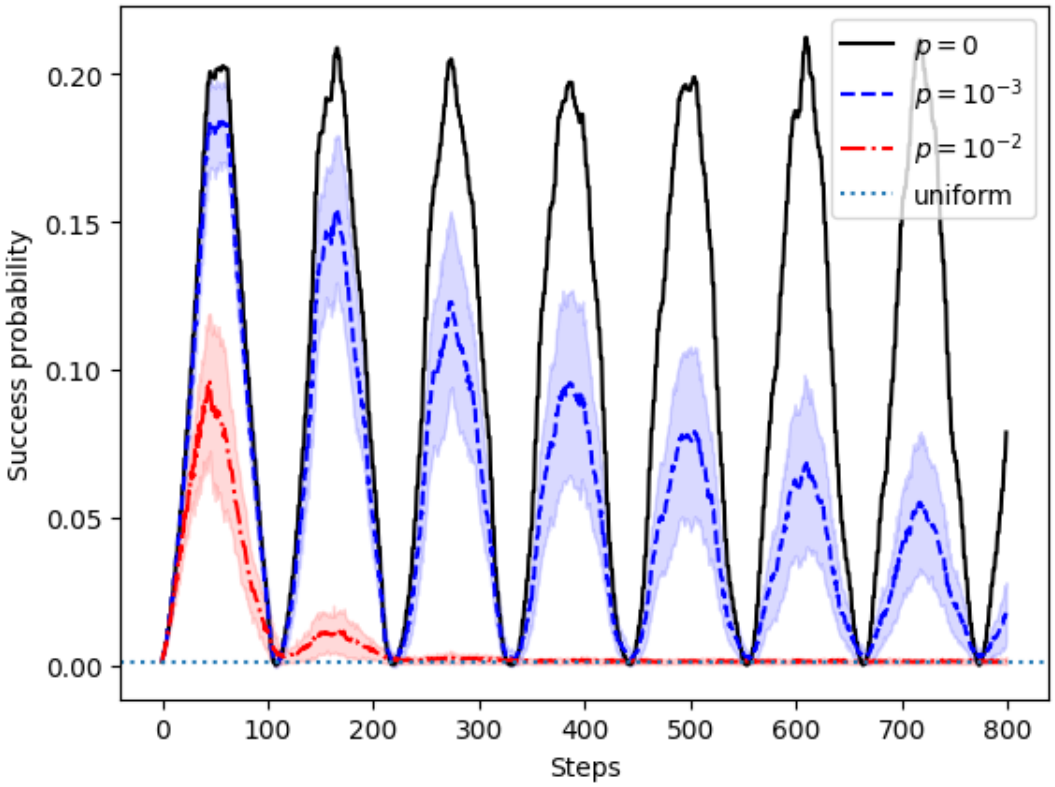

Figura 6.2: Probabilidade de sucesso ao longo do tempo sob decoerência por broken links, para uma grade toroidal 32×32. Cada curva representa a média de 50 simulações ruidosas independentes. A região sombreada indica o desvio padrão entre as execuções. A linha horizontal pontilhada marca a distribuição uniforme como referência. (Colorido online.)

Para valores pequenos de p, o comportamento ainda preserva características marcadamente quânticas, com oscilações pronunciadas e maior variabilidade temporal. À medida que p aumenta, observa-se uma redução progressiva dessas oscilações, refletindo a diminuição da coerência global do sistema [18].

Para valores intermediários de p, a dinâmica apresenta um comportamento de transição, no qual coexistem efeitos de interferência residual e mecanismos de relaxação induzidos pelo ruído. Em regimes de ruído mais intenso, a dinâmica torna-se predominantemente monotônica, aproximando-se mais rapidamente de um estado estacionário.

6.5 Dependência com o Tamanho do Grafo

O tamanho do grafo influencia principalmente a escala temporal da dinâmica.

Grafos maiores tendem a apresentar tempos de convergência mais elevados, refletindo o aumento do espaço de estados do sistema. Esse comportamento é consistente com análises de passeios quânticos em grafos de maior dimensão, nos quais a propagação da amplitude ocorre de forma mais distribuída [17].

No entanto, apesar dessa dependência temporal, observa-se que o comportamento qualitativo da evolução da probabilidade de sucesso permanece consistente entre diferentes tamanhos de rede.

6.6 Robustez do Comportamento Assintótico

Um aspecto relevante observado nas simulações é a robustez do comportamento assintótico frente a variações tanto do tamanho do grafo quanto da taxa de ruído.

Para uma ampla faixa de parâmetros, a dinâmica do sistema converge para um regime estacionário, caracterizado por uma probabilidade de sucesso aproximadamente constante ao longo do tempo. Essa convergência ocorre de maneira sistemática, independentemente das condições iniciais específicas ou das realizações particulares do ruído.

A análise detalhada desse regime assintótico, bem como a caracterização do valor limite da probabilidade de sucesso, serão desenvolvidas no capítulo seguinte.

6.7 Resultados numéricos

Neste trabalho, realizamos simulações numéricas do passeio quântico lackadaisical em tempo discreto em uma grade toroidal bidimensional. O passeio foi implementado com a moeda de Grover e o operador shift flip-flop [8], e o elemento marcado foi escolhido como o vértice central da grade, sem perda de generalidade. Investigamos os efeitos da variação do peso do self-loop ℓ e da probabilidade de broken links p, onde a decoerência foi modelada como um processo de percolação dinâmica no qual arestas são quebradas aleatoriamente a cada passo. Como a dinâmica é probabilística, todas as quantidades reportadas foram obtidas a partir de médias sobre múltiplas execuções independentes, e o desvio padrão é representado nos gráficos como regiões sombreadas. O tamanho da grade, o número de execuções e o número total de passos estão especificados nas legendas de cada figura. Nossa análise concentrou-se em dois principais indicadores: a probabilidade de sucesso, definida como a probabilidade de medir o vértice marcado em um dado passo, e a distribuição de probabilidade média $\overline{P}_T(x, y)$, que captura o comportamento espacial de longo prazo do passeio e será

formalmente introduzida abaixo. Uma abordagem numérica foi necessária, uma vez que um tratamento analítico completo de passeios lackadaisical sob decoerência por broken links rapidamente se torna intratável devido à interação entre self-loops e ruído estocástico.

Na Fig. 6.3, temos a evolução temporal da probabilidade de sucesso para uma grade 16×16 sob decoerência por broken links com $p = 0.01$, comparando diferentes pesos de self-loop ℓ. Os resultados mostram que a introdução de self-loops melhora sistematicamente a resiliência do algoritmo de busca ao ruído, produzindo probabilidades de sucesso maiores do que no caso sem self-loops. Essa melhoria é observada em todos os valores testados para ℓ, embora self-loops excessivamente grandes possam eventualmente se tornar prejudiciais.

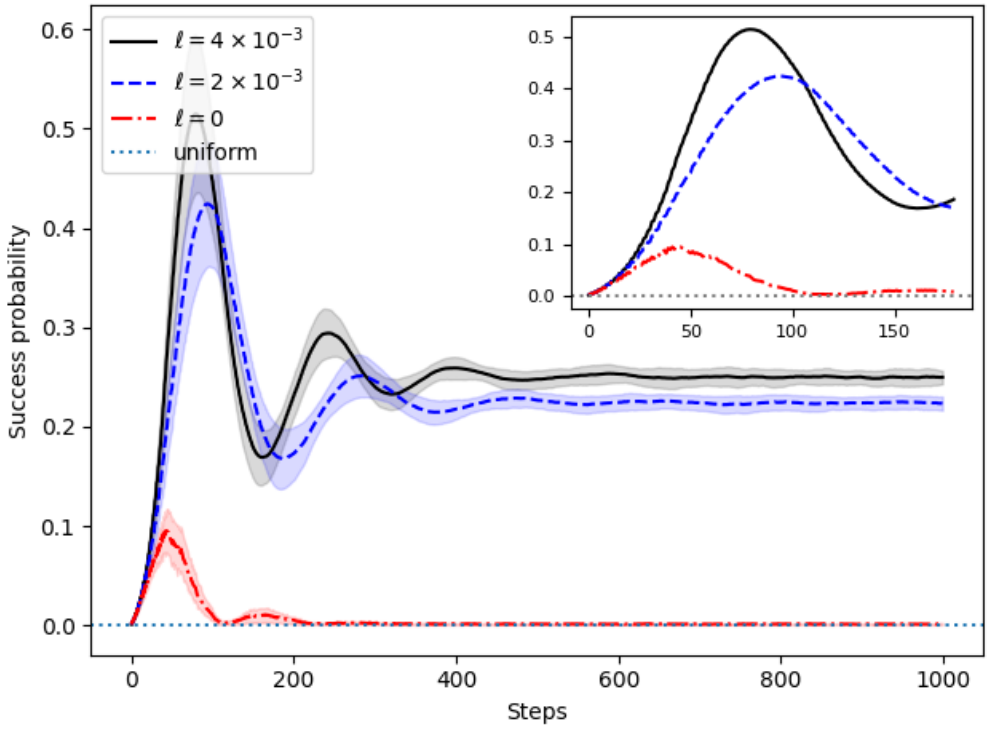

Figura 6.3: Probabilidade de sucesso ao longo do tempo sob probabilidade de broken links ($p = 0.01$) e diferentes pesos de self-loop, para uma grade toroidal 32×32. Cada curva representa a média de 50 simulações ruidosas independentes. A região sombreada indica o desvio padrão entre as execuções. A linha horizontal pontilhada marca a distribuição uniforme como referência. (Colorido online.)

A distribuição média de probabilidade do passeio quântico é definida como

$$\overline{P}_T(x, y) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} P_t(x, y), \tag{6.1}$$

onde $P_t(x, y)$ é a probabilidade de encontrar o caminhante no vértice (x, y) após t

passos.

No caso sem ruído, a escala ótima $\ell \approx 4/N$ que conduz a uma probabilidade de sucesso constante na grade bidimensional foi identificada numericamente por Wong [44]. No cenário sem ruído, uma escala geral do peso ótimo do self-loop para busca com um único alvo em grafos vértice-transitivos foi proposta com base em extensas evidências numéricas [27]. Uma questão natural é se o peso ótimo do self-loop ℓ deve ser reajustado na presença de ruído por broken links, ou se o valor conhecido por ser ótimo no passeio ideal ($\ell \approx 4/N$) permanece adequado sob decoerência. Para investigar isso, realizamos uma varredura sobre valores de ℓ para diversas taxas de ruído p e, para cada configuração, extraímos a probabilidade máxima de sucesso alcançada durante a evolução.

Como podemos observar na Fig. 6.4, as curvas para todos os níveis de ruído atingem o pico aproximadamente no mesmo valor $\ell \approx 4/N$, embora a probabilidade absoluta de sucesso diminua com o aumento de p. Consideramos uma grade 16×16 e tomamos a média sobre 40 simulações ruidosas independentes. Isso indica que a introdução de percolação dinâmica não desloca substancialmente o valor de ℓ que maximiza o desempenho. A observação sugere que o mecanismo de interferência responsável pelo ajuste ótimo no passeio ideal é amplamente preservado sob ruído estrutural moderado. Do ponto de vista prático, essa propriedade é vantajosa, pois implica que uma única escolha de ℓ, motivada teoricamente, permanece próxima do ótimo sem exigir recalibração sob diferentes condições de ruído.

6.8 Discussão

Os resultados apresentados indicam que o ruído estrutural desempenha um papel duplo na dinâmica do sistema. Por um lado, ele suprime os efeitos de interferência quântica responsáveis pelas oscilações observadas no caso ideal. Por outro, ele induz um processo de relaxação que conduz o sistema a um regime estacionário.

Esse comportamento é consistente com interpretações da literatura sobre decoerência em passeios quânticos, nas quais a introdução de desordem leva à transição de regimes fortemente oscilatórios para dinâmicas mais regulares [18].

A compreensão completa das propriedades desse regime, em particular do valor limite da probabilidade de sucesso, requer uma análise mais aprofundada, que será conduzida no próximo capítulo.

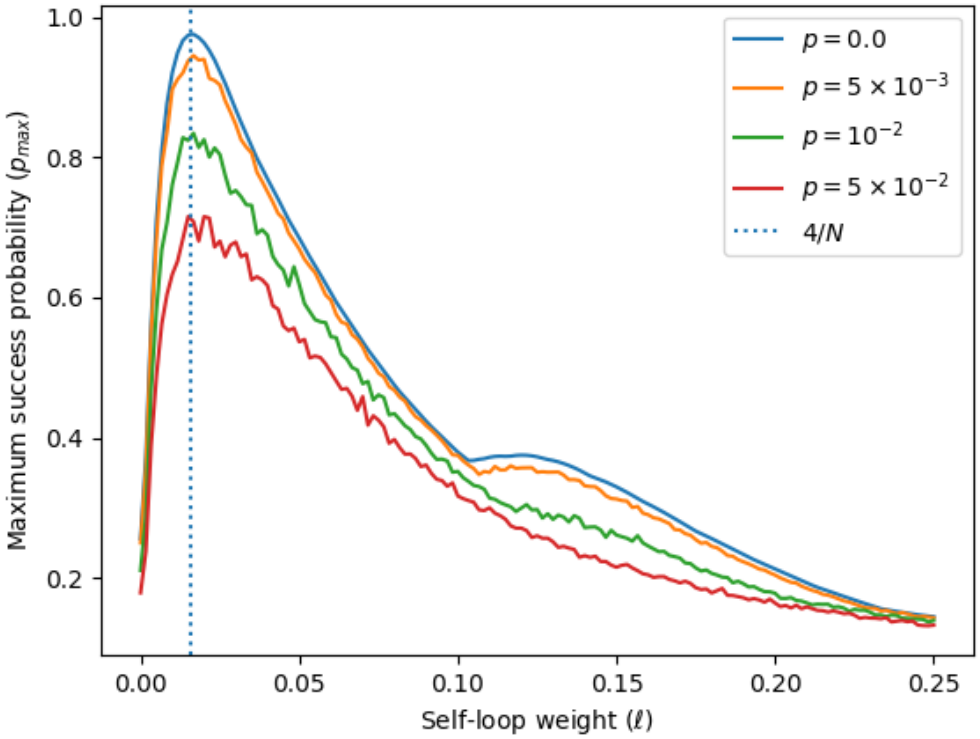

Figura 6.4: Probabilidade máxima de sucesso em função do peso do self-loop ℓ para diversas taxas de ruído por broken links p em uma grade toroidal 16×16. Para todos os níveis de ruído, o pico permanece próximo do valor ótimo sem ruído $\ell \approx 4/N$, indicando que o parâmetro que maximiza o desempenho é notavelmente estável sob ruído de percolação dinâmica. Embora a probabilidade geral de sucesso diminua com o aumento de p, a localização do ℓ ótimo permanece essencialmente inalterada, sustentando a interpretação de que a estrutura de interferência que determina o peso ótimo do loop no passeio ideal é amplamente preservada no regime ruidoso.

Capítulo 7

Convergência Assintótica Universal

7.1 Introdução

A presença de ruído em algoritmos quânticos é tradicionalmente associada à degradação do desempenho, sobretudo em tarefas de busca, nas quais a interferência quântica desempenha papel central na amplificação de amplitude. Em particular, em modelos baseados em passeios quânticos, espera-se que perturbações estruturais comprometam a coerência do sistema, resultando em comportamentos complexos e, em geral, não universais.

No entanto, os resultados obtidos nesta tese revelam um comportamento qualitativamente distinto. Ao introduzir ruído estrutural na forma de remoção dinâmica de arestas (broken links) em um passeio quântico lackadaisical sobre grafos quadrados, observa-se a emergência de um regime assintótico robusto, caracterizado pela convergência da probabilidade de sucesso para um valor aproximadamente igual a 0,25.

De forma notável, essa convergência mostrou-se independente tanto do tamanho do grafo quanto da taxa de broken links, desde que esta não exceda um limiar suficientemente elevado. Esse resultado sugere a existência de um comportamento universal induzido por desordem estrutural, no qual a dinâmica do sistema perde sensibilidade a parâmetros macroscópicos, preservando apenas dependências relacionadas à escala temporal de relaxação.

O objetivo deste capítulo é apresentar, caracterizar e interpretar esse fenômeno, estabelecendo suas propriedades fundamentais e discutindo suas possíveis implicações teóricas.

7.2 Modelo Considerado

Considera-se um passeio quântico discreto em um toro bidimensional $G = (V, E)$ com $N = m \times m$ vértices, onde cada vértice possui grau quatro. O modelo lackadaisical é obtido pela introdução de um self-loop em cada vértice, com peso $\ell = 4/N$.

A dinâmica do sistema é governada por um operador unitário de evolução da forma

$$U_t = S_t \cdot C,$$

onde C é o operador de moeda e S_t é o operador de deslocamento dependente do tempo.

O ruído estrutural é introduzido por meio da remoção dinâmica de arestas: a cada passo de tempo, cada aresta do grafo é removida independentemente com probabilidade p. Consequentemente, o grafo efetivo em cada instante t é dado por

$$G_t = (V, E_t),$$

onde $E_t \subseteq E$ é uma realização aleatória do conjunto de arestas.

Essa dinâmica define uma sequência de operadores unitários aleatórios, resultando em uma evolução global da forma [$|\psi_t\rangle = U_t U_{t-1} \cdots U_1 |\psi_0\rangle$.]

7.3 Evidências Numéricas

Simulações numéricas foram realizadas para diferentes tamanhos de grafos quadrados e para diversas taxas de broken links p. Em todos os casos analisados, observou-se que a probabilidade de sucesso evolui ao longo do tempo até atingir um regime estacionário não inferior a 0.25, ou seja, para os valores observados de $0.0001 \leq p \leq 0.9000$ a probabilidade de sucesso converge sistematicamente para um valor ≈ 0.25.

Além disso, verificou-se que:

- A convergência ocorre para todos os tamanhos de grafo considerados;
- O valor limite é independente do tamanho do grafo;
- O valor limite é robusto em relação à variação de p dentro do intervalo considerado;
- O tempo necessário para atingir o regime assintótico depende de N e de p.

Esses resultados indicam a presença de um comportamento altamente robusto, no qual diferentes regimes dinâmicos convergem para um mesmo valor limite.

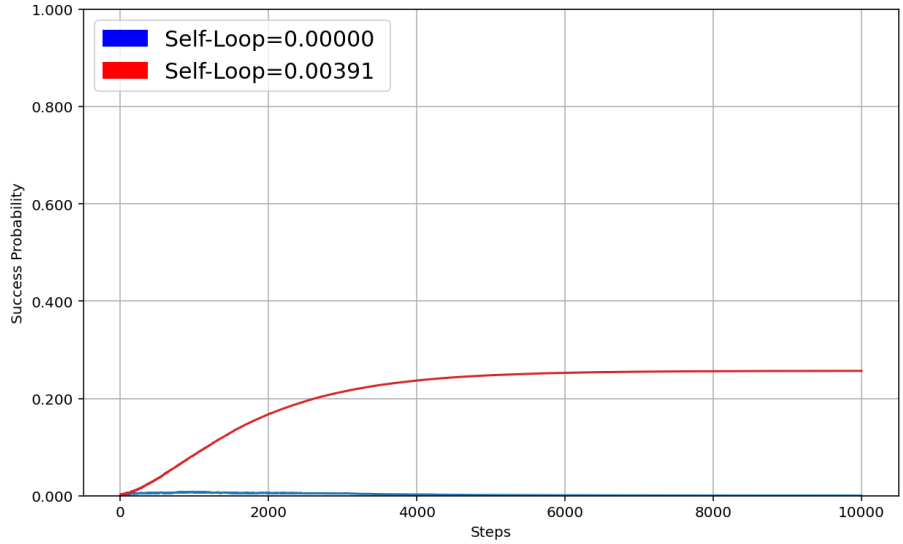

Figura 7.1: Cauda longa da probabilidade de sucesso para probabilidade de broken links $p = 0.5$. Os resultados são obtidos a partir da média sobre 100 execuções independentes, cada uma com 10.000 passos, utilizando $\ell = 4/N$ em uma grade toroidal 32×32. A probabilidade média de sucesso aproxima-se de 0.25. $P_{\text{success}}(t)$.

7.4 Aspectos do Regime Assintótico

Com base nas evidências numéricas, pode-se descrever o comportamento assintótico da probabilidade de sucesso como $[P_{\text{sucesso}}(t; N, p) \longrightarrow \frac{1}{4}, \quad \text{quando } t \to \infty,]$ para valores de p dentro do regime considerado.

Esse comportamento apresenta as seguintes propriedades:

O valor limite da probabilidade de sucesso não depende do número de vértices do grafo, indicando a ausência de efeitos de escala no regime assintótico.

Dentro da faixa analisada, a variação da probabilidade de remoção de arestas não altera o valor limite da probabilidade de sucesso, afetando apenas a dinâmica transiente.

O tempo característico de convergência, denotado por $\tau = \tau(N, p)$, depende tanto do tamanho do grafo quanto da intensidade do ruído, refletindo a influência desses parâmetros na velocidade de relaxação do sistema.

7.5 Interpretação do Fenômeno

A convergência para o valor 1/4 pode ser interpretada como consequência da supressão parcial da interferência quântica causada pelo ruído estrutural dinâmico.

A remoção aleatória de arestas ao longo do tempo impede a manutenção de relações de fase consistentes entre diferentes caminhos quânticos, levando a uma perda progressiva de coerência global. Como resultado, a dinâmica do sistema passa

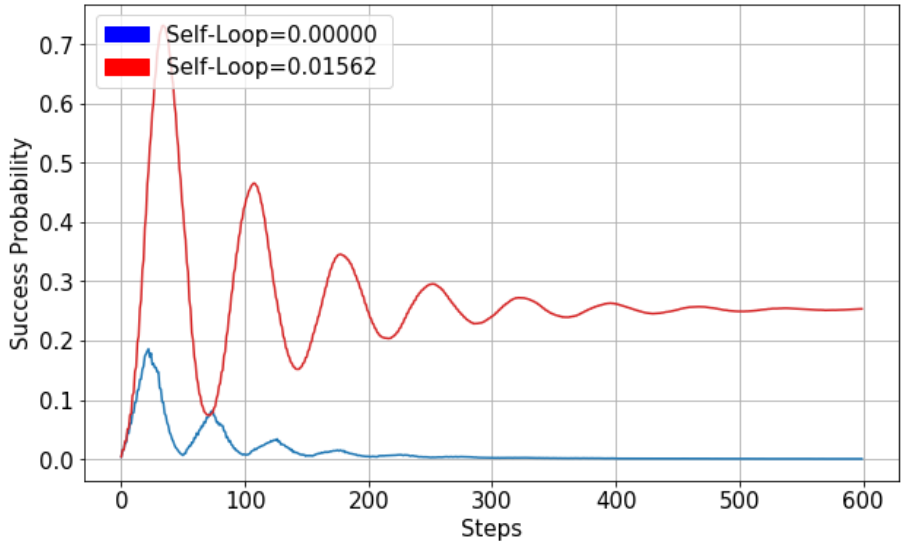

Figura 7.2: Cauda longa da probabilidade de sucesso para probabilidade de broken links $p = 0.01$. Os resultados são obtidos a partir da média sobre 100 execuções independentes, cada uma com 600 passos, utilizando $\ell = 4/N$ em uma grade toroidal 16×16. A probabilidade média de sucesso aproxima-se de 0.25. $P_{\text{success}}(t)$.

a ser dominada por propriedades locais do grafo.

No caso do toro bidimensional, cada vértice possui quatro direções possíveis de propagação. A perda de coerência global conduz a uma distribuição efetiva aproximadamente uniforme sobre esses graus de liberdade direcionais, resultando em uma probabilidade limite da ordem de 1/4.

Os resultados observados sugerem a seguinte hipótese não confirmada neste trabalho:

Em grafos regulares de grau 4, sujeitos a ruído estrutural dinâmico caracterizado por remoção aleatória de arestas abaixo de um limiar crítico, a probabilidade de sucesso de algoritmos de busca baseados em passeios quânticos converge assintoticamente para um valor da ordem de 1/4, independentemente do tamanho do grafo e da intensidade específica do ruído dentro desse regime.

Essa conjectura aponta para a existência de um comportamento universal associado à estrutura local do grafo, abrindo perspectivas para investigações analíticas futuras.

Em resumo, neste capítulo, foi apresentado um fenômeno emergente na dinâmica de passeios quânticos lackadaisical sob ruído estrutural: a convergência assintótica da probabilidade de sucesso para um valor aproximadamente igual a 1/4.

Esse comportamento mostrou-se robusto em relação ao tamanho do grafo e à taxa de broken links, caracterizando um regime universal induzido por desordem estrutural. A interpretação proposta sugere que a perda parcial de coerência conduz a uma dinâmica efetivamente governada pela estrutura local do sistema.

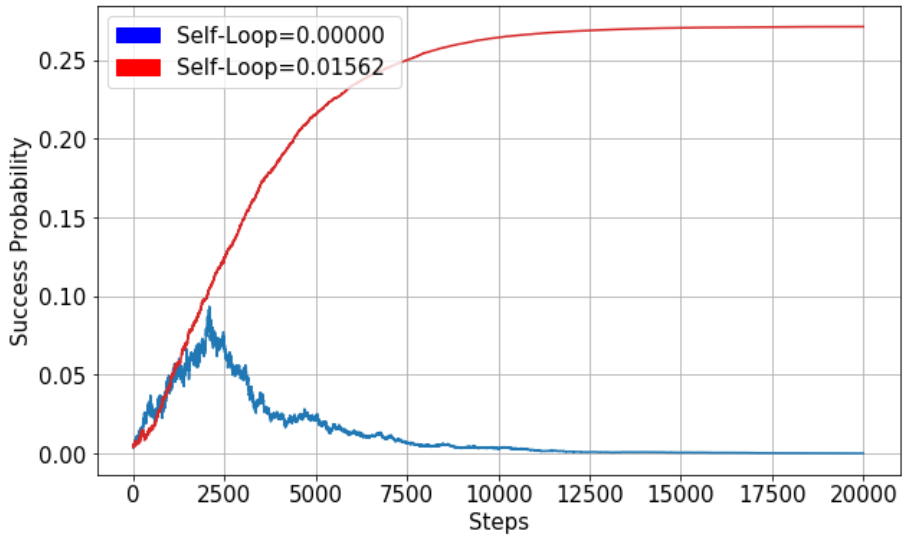

Figura 7.3: Cauda longa da probabilidade de sucesso para taxa de broken links $p = 0.90$. Os resultados são obtidos a partir da média sobre 10 execuções independentes, cada uma com 20.000 passos, utilizando $\ell = 4/N$ em uma grade toroidal 16×16. A probabilidade média de sucesso aproxima-se de 0.25. $P_{\text{success}}(t)$.

Os resultados apresentados estabelecem uma nova perspectiva sobre o papel do ruído em algoritmos quânticos, indicando que, sob certas condições, a desordem pode induzir comportamentos regulares e previsíveis.

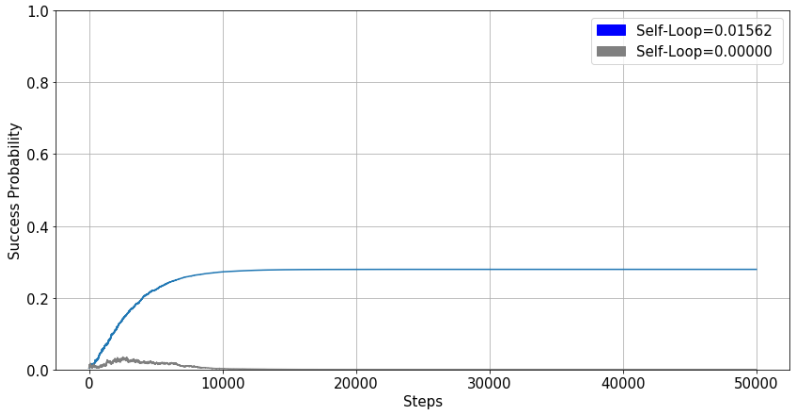

Figura 7.4: Broken Link 90%. Sobre 10 execuções independentes com 50.000 passos, $\ell = 4/N$, grade $= 16 \times 16$.

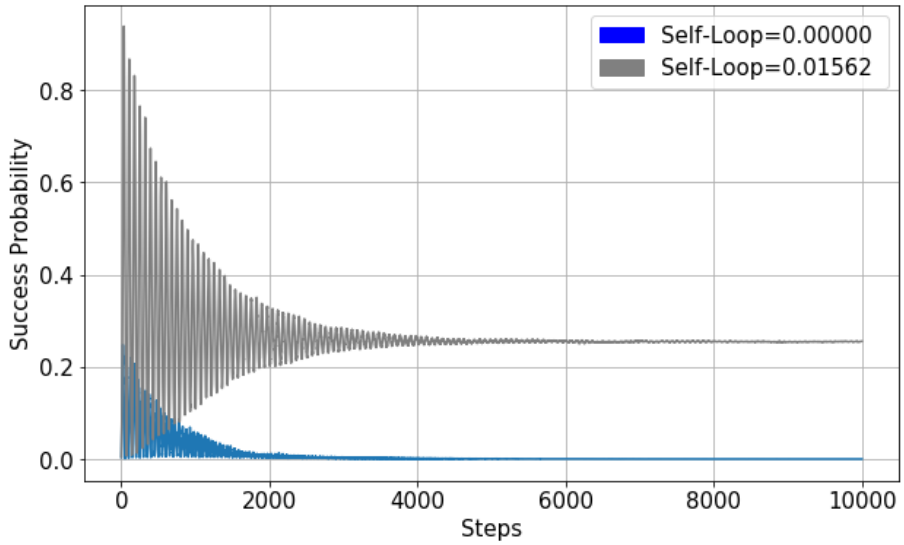

Figura 7.5: Cauda longa da probabilidade de sucesso para taxa de broken links $p = 0.001$. Os resultados são obtidos a partir da média sobre 10 execuções independentes, cada uma com 10.000 passos, utilizando $\ell = 4/N$ em uma grade toroidal 16×16. A probabilidade média de sucesso aproxima-se de 0.25. $P_{\text{success}}(t)$.

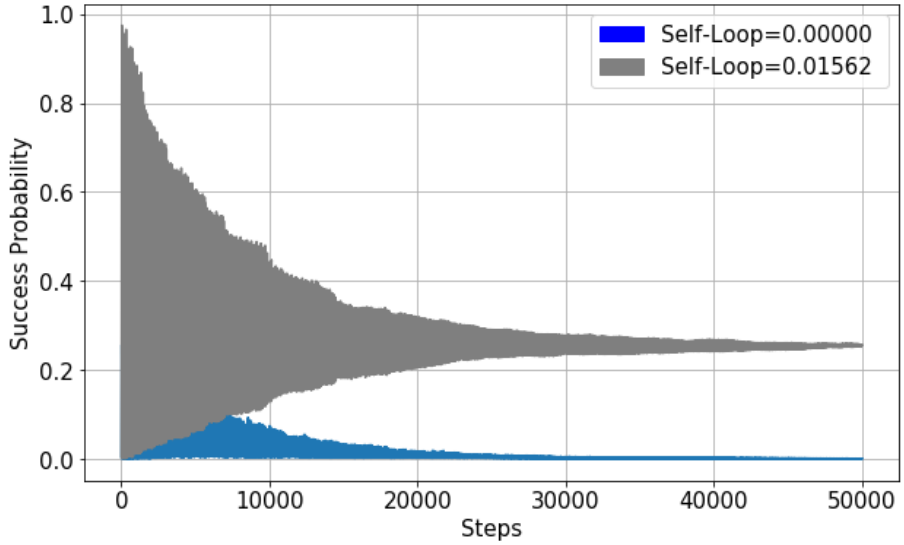

Figura 7.6: Cauda longa da probabilidade de sucesso para taxa de broken links $p = 0.0001$. Os resultados são obtidos a partir da média sobre 3 execuções independentes, cada uma com 50.000 passos, utilizando $\ell = 4/N$ em uma grade toroidal 16×16. A probabilidade média de sucesso aproxima-se de 0.25. $P_{\text{success}}(t)$

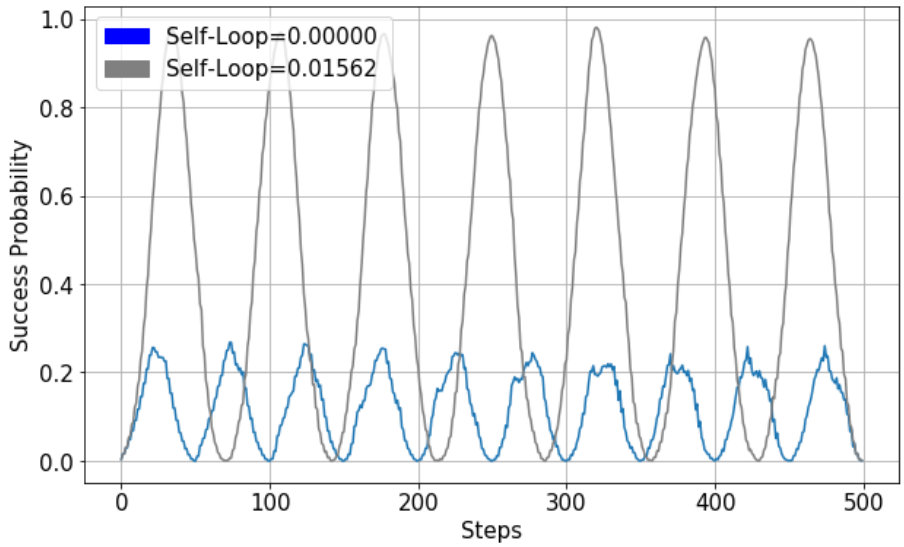

Figura 7.7: Probabilidade de sucesso para taxa de broken links $p = 0.0001$. Os resultados são obtidos a partir de 1 execução com 500 passos, utilizando $\ell = 4/N$ em uma grade toroidal 16×16. A probabilidade de sucesso inicia convergência. $P_{\text{success}}(t)$

Capítulo 8

Conclusões e Trabalhos Futuros

8.1 Síntese dos Resultados

Nesta tese, foi investigado o comportamento de algoritmos de busca baseados em passeios quânticos lackadaisical em grafos bidimensionais, com ênfase no impacto de ruído estrutural modelado por meio de broken links. Inicialmente, foi estabelecido o formalismo matemático para a descrição do passeio quântico discreto em um toro bidimensional, incorporando a presença de self-loops com peso $\ell = 4/N$. Em seguida, foi introduzido um modelo de ruído estrutural dinâmico, no qual a topologia do grafo varia ao longo do tempo por meio da remoção aleatória de arestas, resultando em uma evolução unitária dependente do tempo.

A análise numérica da dinâmica do sistema revelou que a presença de broken links altera significativamente o comportamento da probabilidade de sucesso do algoritmo de busca. Em particular, observou-se a redução de oscilações associadas à interferência quântica e a emergência de um regime de relaxação para um estado estacionário.

Um dos resultados desta tese consiste na identificação de um regime assintótico robusto, no qual a probabilidade de sucesso converge para um valor aproximadamente igual a 1/4. Esse comportamento mostrou-se independente do tamanho do grafo e robusto em relação à taxa de ruído, dentro de uma ampla faixa de parâmetros.

8.2 Discussão Geral

Os resultados obtidos nesta tese sugerem uma mudança de perspectiva em relação ao papel do ruído em sistemas quânticos. Tradicionalmente, o ruído é interpretado como um fator exclusivamente prejudicial, responsável pela degradação da coerência e pela perda de desempenho em algoritmos quânticos.

Entretanto, a análise realizada indica que, no contexto de passeios quânticos lackadaisical sob ruído estrutural dinâmico, a desordem pode desempenhar um papel construtivo ao induzir a emergência de um regime assintótico robusto e independente de parâmetros macroscópicos.

Esse comportamento pode ser interpretado como a transição de um regime dominado por interferência quântica para um regime efetivo no qual a dinâmica é governada principalmente pela estrutura local do grafo. Nesse cenário, a perda parcial de coerência não conduz a um comportamento completamente clássico, mas sim a um estado intermediário caracterizado por propriedades universais.

8.3 Trabalhos Futuros

Os resultados apresentados nesta tese abrem diversas possibilidades para investigações futuras.

Uma direção natural consiste no desenvolvimento de uma análise teórica rigorosa que permita demonstrar formalmente a convergência da probabilidade de sucesso para o valor 1/4, bem como caracterizar as condições necessárias para a ocorrência desse comportamento.

Outra linha de investigação envolve a generalização dos resultados para outras classes de grafos, em particular grafos regulares de grau arbitrário, com o objetivo de verificar a validade da hipótese de que o valor limite da probabilidade de sucesso é determinado pelo grau do grafo.

Adicionalmente, seria relevante explorar a relação entre o modelo de broken links e outras formas de decoerência, buscando estabelecer conexões mais profundas entre diferentes abordagens de modelagem de ruído em passeios quânticos.

Por fim, a comparação entre o modelo lackadaisical e outras estratégias de busca quântica, como o algoritmo de Tulsi, pode fornecer insights adicionais sobre mecanismos de amplificação de probabilidade e robustez frente a ruído.

8.4 Considerações Finais

Esta tese contribui para o entendimento da dinâmica de passeios quânticos em ambientes ruidosos, destacando a existência de comportamentos emergentes não triviais induzidos por desordem estrutural.

A identificação de um regime assintótico universal representa um resultado significativo, com potencial para motivar novas investigações teóricas e experimentais na área de algoritmos quânticos baseados em grafos.

De forma geral, os resultados obtidos reforçam a ideia de que o ruído, longe de ser apenas um obstáculo, pode também atuar como um elemento estruturante na

dinâmica de sistemas quânticos complexos.

Referências Bibliográficas

[1] G. Abal, R. Donangelo, F. L. Marquezino, A. C. Oliveira, and R. Portugal. Decoherence in Search Algorithms. In *Proceedings of the 36th Integrated Software and Hardware Seminar (SEMISH)*, pages 293–306, Bento Gonçalves, Brazil, December 2009.

[2] Y. Aharonov, L. Davidovich, and N. Zagury. Quantum random walks. *Physical Review A*, 48(2):1687–1690, August 1993. Publisher: American Physical Society.

[3] Yakir Aharonov, Luiz Davidovich, and Nicim Zagury. Quantum random walks. *Physical Review A*, 48(2):1687–1690, 1993.

[4] Andreas Ahlbrecht et al. Asymptotic behavior of quantum walks with spatio-temporal coin fluctuations. *Quantum Information Processing*, 10(6):1383–1407, 2011.

[5] David Aldous and James Fill. *Reversible Markov Chains and Random Walks on Graphs*. Book in preparation, 2002.

[6] Andris Ambainis. Quantum walks and their algorithmic applications. *International Journal of Quantum Information*, 1(4):507–518, 2003.

[7] Andris Ambainis et al. Coins make quantum walks faster. *Proceedings of the 16th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 1099–1108, 2005.

[8] Andris Ambainis, Julia Kempe, and Alexander Rivosh. Coins make quantum walks faster. In *Proceedings of the sixteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, SODA '05, pages 1099–1108, USA, January 2005. Society for Industrial and Applied Mathematics.

[9] Pablo Arrighi. An overview of quantum cellular automata. *Natural Computing*, 18(4):885–899, 2019.

[10] Andrew M. Childs, Edward Farhi, and Sam Gutmann. An example of the difference between quantum and classical random walks. *Quantum Information Processing*, 1(1):35–43, 2003.

[11] Andrew M. Childs and Jeffrey Goldstone. Spatial search by quantum walk. *Physical Review A*, 70(2):022314, 2004.

[12] Fabian Elster, Sonja Barkhofen, Thomas Nitsche, Jaroslav Novotný, Aurél Gábris, Igor Jex, and Christine Silberhorn. Quantum walk coherences on a dynamical percolation graph. *Scientific Reports*, 5(1):13495, August 2015. Publisher: Nature Publishing Group.

[13] Lov K. Grover. A fast quantum mechanical algorithm for database search. *Proceedings of the Twenty-Eighth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 212–219, 1996.

[14] Erwin L. Hahn. Spin echoes. *Physical Review*, 80(4):580–594, 1950.

[15] Peter Høyer and Jiahui Yu. Lackadaisical quantum walks. *Quantum Information Processing*, 20(11):363, 2021.

[16] Peter Høyer and Zhan Yu. Analysis of Lackadaisical Quantum Walks. *Quantum Information and Computation*, 20(13&14):1138–1153, November 2020. arXiv:2002.11234 [quant-ph].

[17] Julia Kempe. Quantum random walks: an introductory overview. *Contemporary Physics*, 44(4):307–327, 2003.

[18] Viv Kendon. Decoherence in quantum walks – a review. *Mathematical Structures in Computer Science*, 17(6):1169–1220, 2007.

[19] Joel L. Lebowitz. Boltzmann's entropy and time's arrow. *Physics Today*, 46(9):32–38, 1993.

[20] Gediminas Leung, Paul Knott, Joseph Bailey, and Viv Kendon. Coined quantum walks on percolation graphs. *New Journal of Physics*, 12(12):123018, 2010.

[21] Godfrey Leung, Paul Knott, Joe Bailey, and Viv Kendon. Coined quantum walks on percolation graphs. *New Journal of Physics*, 12(12):123018, December 2010.

[22] László Lovász. *Random walks on graphs: A survey.* Bolyai Society Mathematical Studies, 1993.

[23] David A. Meyer. From quantum cellular automata to quantum lattice gases. *Journal of Statistical Physics*, 85(5–6):551–574, 1996.

[24] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2010.

[25] A. C. Oliveira, R. Portugal, and R. Donangelo. Decoherence in two-dimensional quantum walks. *Physical Review A*, 74(1):012312, July 2006. Publisher: American Physical Society.

[26] Renato Portugal. *Quantum Walks and Search Algorithms*. Springer, 2013.

[27] Mason L. Rhodes and Thomas G. Wong. Search on vertex-transitive graphs by lackadaisical quantum walk. *Quantum Information Processing*, 19(9):334, September 2020.

[28] L. Rigovacca and C. Di Franco. Two-walker discrete-time quantum walks on the line with percolation. *Scientific Reports*, 6(1):22052, February 2016. Publisher: Nature Publishing Group.

[29] Alejandro Romanelli. Driving quantum-walk spreading with coin decoherence. *Physical Review A*, 71(3):032319, 2005.

[30] J. J. Sakurai and Jim Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2 edition, 2017.

[31] Raqueline A. M. Santos and Franklin De L. Marquezino. Decoherence on staggered quantum walks. *Physical Review A*, 105(3):032452, March 2022.

[32] Raul Santos and Renato Portugal. Lackadaisical quantum walks for spatial search. *Quantum Information Processing*, 20(11):1–22, 2021.

[33] Maximilian Schlosshauer. *Decoherence and the Quantum-To-Classical Transition*. Springer, 2007.

[34] Neil Shenvi, Julia Kempe, and K. Birgitta Whaley. Quantum random-walk search algorithm. *Physical Review A*, 67(5):052307, 2003.

[35] Charles P. Slichter. *Principles of Magnetic Resonance*. Springer, 3 edition, 1990.

[36] Avatar Tulsi. Faster quantum-walk algorithm for the two-dimensional spatial search. *Physical Review A*, 78(1):012310, 2008.

[37] Gabriel Mauricio Oswald Vieira, Rui Aldé Lopes, Nelson Maculan, and Franklin de Lima Marquezino. An algebraic model for simulation of percolation decoherence on quantum-walk-based search. In *Anais do XXXI Workshop de Teses e Dissertações em Andamento (WTD)*. Sociedade Brasileira de Computação, 2024.

[38] Gabriel Mauricio Oswald Vieira, Nelson Maculan, and Franklin de Lima Marquezino. Noise-resilient spatial search with lackadaisical quantum walks. *Quantum Information Processing, publisher: Springer Nature*, 25:183, 2026.

[39] John Watrous. Quantum simulations of classical random walks and undirected graph connectivity. *Journal of Computer and System Sciences*, 62(2):376–391, 2001.

[40] Thomas G. Wong. Grover search with lackadaisical quantum walks. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 48(43):435304, 2015.

[41] Thomas G Wong. Grover search with lackadaisical quantum walks. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 48(43):435304, October 2015. Publisher: IOP Publishing.

[42] Thomas G. Wong. Quantum walk search with lackadaisical self-loops. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 48(43):435304, 2015.

[43] Thomas G. Wong. Grover search with lackadaisical quantum walks. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 50(19):195303, 2017.

[44] Thomas G. Wong. Faster search by lackadaisical quantum walk. *Quantum Information Processing*, 17(3):68, February 2018.

[45] Wojciech H. Zurek. Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical. *Reviews of Modern Physics*, 75(3):715–775, 2003.