Rodrigo Fernandes Souto
Aula 5 - Coloração de Vértices
Professora: Celina

Contração

Neste resumo encontrar-se-á uma técnica de coloração de vértices para grafos simples.

Como o nome sugere, escolhemos dois vértices não adjacentes e contraí-mo-los em um só, com a mesma vizinhança dos outros dois contraídos.

· Contração: Uma contração de dois vértices não adjacentes x, y num grafo $G=(V,E)$ define o grafo

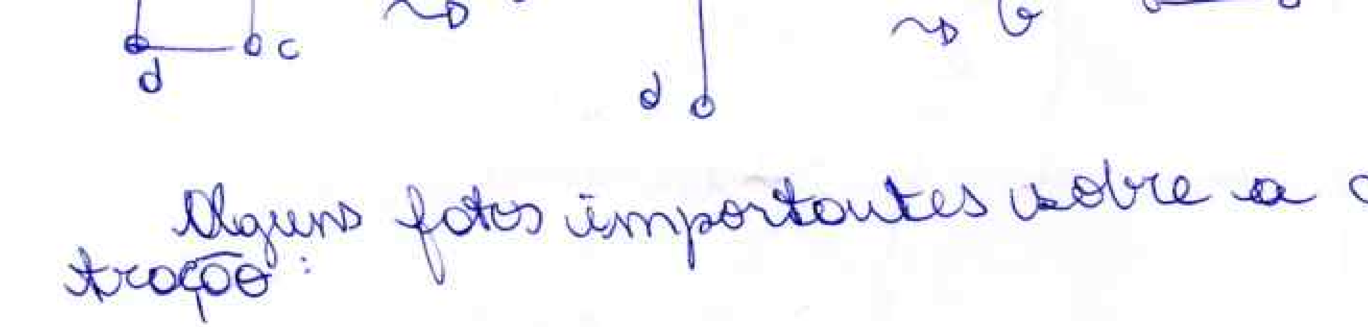
$$G^{xy} = (V^{xy}, E^{xy})$$

da seguinte maneira

$$V^{xy} = (V - \{x,y\}) \cup \{(xy)\}$$

$$E^{xy} = E(G - \{x,y\}) \cup \{(v,(xy)) : v \in N_G(x) \cup N_G(y)\}$$

Por exemplo: $G \cong C_4$.



Alguns fatos importantes sobre a contração:

· FATO 1: A contração iterada de pares de vértices não adjacentes gera um processo que termina numa clique.

Evidente, uma vez que só paramos de contrair quando não existem mais vértices não adjacentes, isto é, terminaremos numa clique.

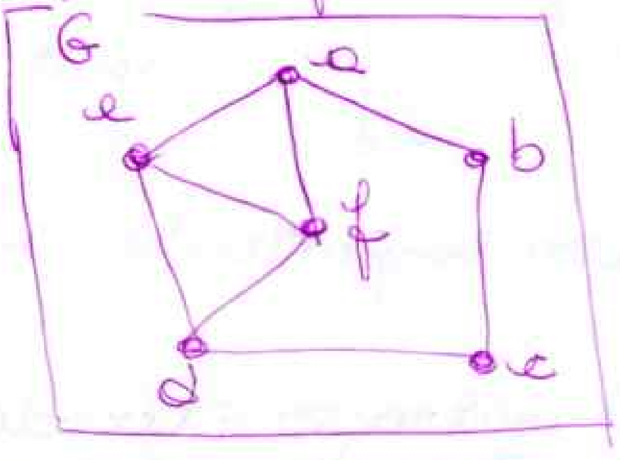
• FATO 2: O processo de contração gera uma coloração válida para o grafo.
Basta colorir a clique restante no final do processo e, ao descontrair xy para x e y, colori-los com a mesma cor de xy.

Note que os fatos anteriores nos dão um algoritmo para colorir G, entretanto, tal algoritmo nem sempre colore propriamente.

Como exemplo, segue a resolução do exercício 2 da ~~ata~~ aula 5:

Considere o grafo G da Figura 5. Encontre uma sequência de contrações tal que o último grafo K da sequência não seja um subgrafo induzido de G. Compare os parâmetros clique máxima e número cromático de K e G.

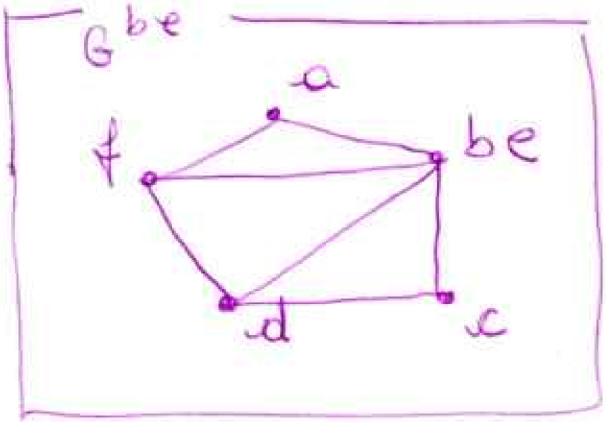
• O grafo da figura 5:



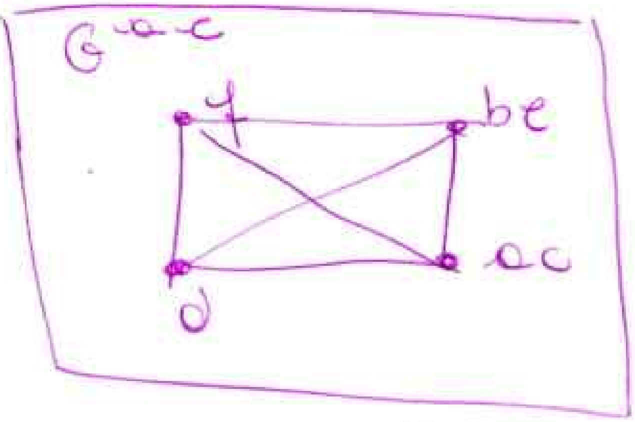
O exemplo ilustra (no texto do curso) que $\chi(G) = 3 = \omega(G)$.

Vamos ver o que obtemos contra-

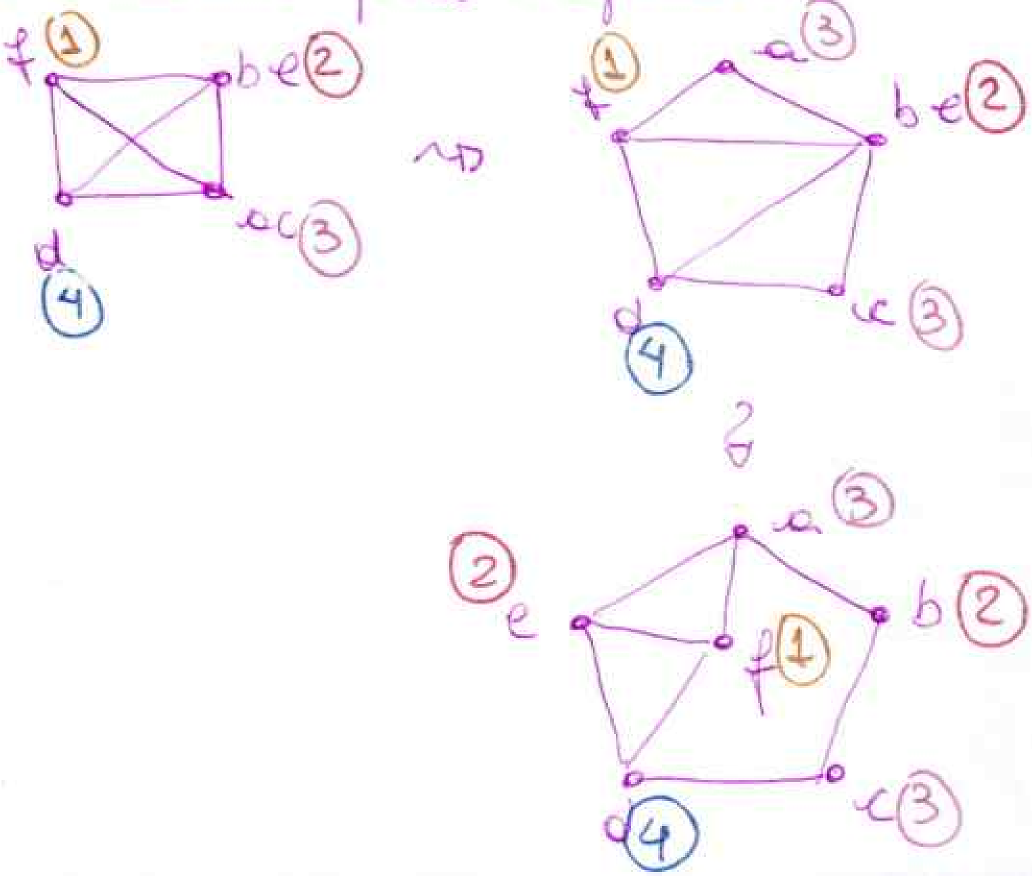
Contrai-se b e e:



Agora, contrai-se a e c



Note que $G^{ac} \cong K_4$ e paramos o processo.
Daí $\omega(G^{ac}) = 4 > 3 = \omega(G)$.
Veja o que acontece no número cromático pelo algoritmo



Note que colorimos G com as 4 cores

1 2 3 4

que é mais do que o necessário, pois $\chi(G) = 3$. Isto porque terminamos em um K_4 que não é induzido de G (subgrafo).

De fato, o algoritmo colore G com as cores usadas na clique obtida ao fim do processo e esta clique é maior ou igual do que a maxclique em G.

• Fato 3: $\omega(G^{xy}) \geq \omega(G)$
Ao contrair x, y estamos contraindo vértices não adjacentes e, portanto, não alterando nenhuma clique de G. Podemos aumentá-la, ~~mas isso~~

Então, ao terminarmos o processo de contração e obtermos uma clique de tamanho $\omega(G)$ (a igualdade no fato anterior funcionando a cada etapa), colorimos G com $\omega(G)$ cores. Onde: $\chi(G) \geq \omega(G)$. Concluímos que $\chi(G) = \omega(G)$ neste caso.

Procuramos então contrações especiais para preservar $\omega(G) = \omega(G^{xy})$ a cada etapa do algoritmo, para isso, vamos definir dupla-par.

• Dupla-par: Dois vértices x e y formam uma dupla-par se não existir caminho induzido de comprimento ímpar com extremos em x e y.

O próximo resultado garante que contrair duplas-pares é aquilo que gostaríamos que acontecesse: preservamos $\omega(G)$ e $\chi(G)$.

• Lema 1: Sejam x e y dupla-par de G. Então $\chi(G) = \chi(G^{xy})$ e $\omega(G) = \omega(G^{xy})$.

Não demonstraremos tal resultado neste resumo, mas a ideia não é difícil:

→ sabemos que $\chi(G^{xy}) \geq \chi(G)$ e $\omega(G^{xy}) \geq \omega(G)$

→ precisamos provar $\chi(G) \geq \chi(G^{xy})$ e $\omega(G) \geq \omega(G^{xy})$

→ por contradição

→ em $\omega(G) < \omega(G^{xy})$ a clique de tamanho $\omega(G)+1$ gera caminho ímpar de x para y

→ em $\chi(G) > \chi(G^{xy})$ temos coloração ótima de G na qual x e y tem a mesma cor, basta usar que caminhos induzidos de x para y são pares

↳ Usamos a ideia de cadeias de Kempe: pegamos subgrafo induzido H de G onde $v \in V(H)$ se e só se v tem a mesma cor que x ou y em G.

Então o Lema, garante que o algoritmo de contração, ao contrair duplas-pares, preserva $\chi(G)$, o que garante uma coloração ótima.

Por outro lado, no geral, é um problema NP-difícil encontrar duplas-pares. Seguimos, pois, o mesmo raciocínio dos outros métodos estudados (guloso e corte): procuramos classes de grafos onde o problema torna-se polinomial.

• <u>Grafos Cordais</u>: um grafo é cordal se não contiver ciclos induzidos C_n, para $n \geq 4$.

Os grafos cordais tem sempre uma dupla de vértices especiais, chamados dupla-2.

• <u>Dupla-2</u>: é um par de vértices em um grafo tal que todo caminho induzido entre eles tem exatamente duas arestas.

• <u>FATO 4</u>: Se x e y é dupla-2, então x e y é dupla-par.

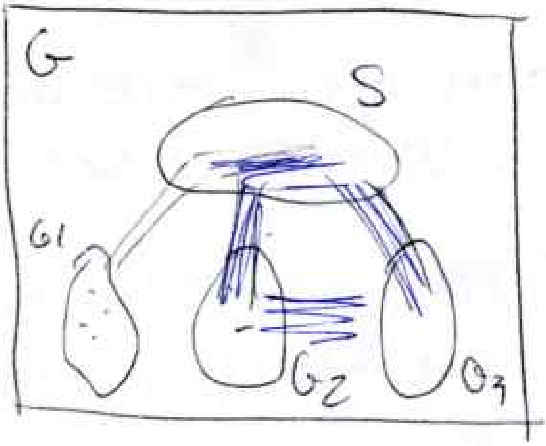
Evidente, pela definição, se x e y só possuem caminhos induzidos de tamanho 2 (quando são os extremos de tal caminho), então não admitem caminho de tamanho ímpar e portanto são dupla-par.

· <u>FATO 5</u>: Dado G grafo, encontra-se duplo-2 em tempo polinomial.

Os próximos resultados garantem uma coloração ótima de G cordal em tempo polinomial (usando a contração):

· <u>Teorema 1</u>: Se G é um grafo cordal que não é uma clique, então G contém uma dupla-2.

<u>Prova</u>: Seja G grafo cordal que não é clique. Sabemos que existe S corte minimal que é clique. Considere $G_1, G_2, \ldots, G_k$ componentes conexos de G após cortamo-lo com S.
Consideramos dois casos:
1º) Todo $G - G_i$, $i \in \{1, \ldots, k\}$, é clique.
Então $k=2$. Com efeito: suponha, para uma contradição, que $k=3>2$ sem perda de generalidade.
Caso $G - G_1$ seja clique, temos que S não é corte pois há arestas entre G_2 e G_3, contradição.

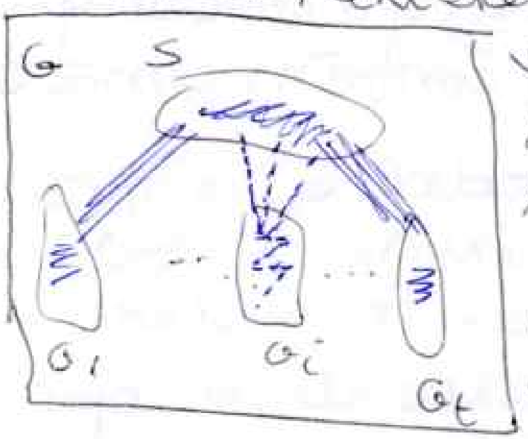


Assim, basta tomar $u \in G_1$ e $v \in G_2$ que temos uma duplo-2, já que se P é caminho de u para v, P tem vértice em S e como $G - G_i$, $i \in \{1,2\}$, é clique, tal vértice se conecta diretamente com u e v.

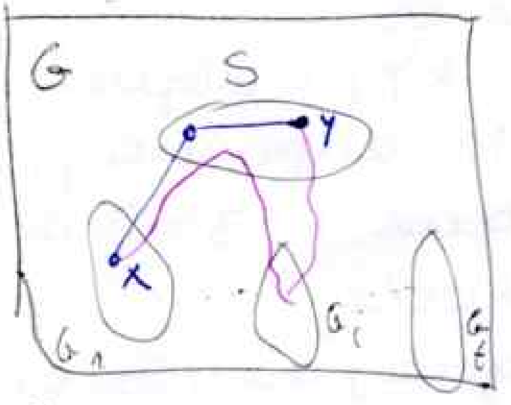
2ª) Existe algum $G - G_i$, $i \in \{1, \dots, k\}$, que não é clique.

Sabemos que $G - G_i$ é cordal e por indução em $|V(G)|$, $G - G_i$ possui duplo-2, digamos x e y.

Assim, existem caminhos de x para y em G de comprimento 2, e estes são todos de x para y.



Com efeito: suponha, para uma contradição, que existe caminho de x para y que passe por G_i.



Daí, pelo diagrama ao lado, fica claro que existiria ciclo de comprimento $k \geq 4$. Contradição, pois G é cordal.

Logo x e y é duplo-2 de G.

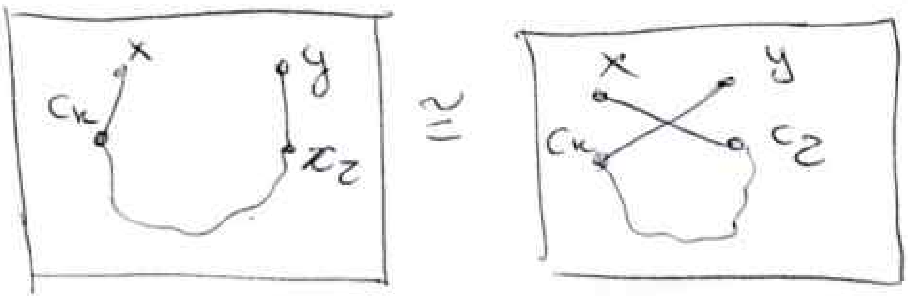
Teorema 2: Se G é um grafo cordal que não é clique e x, y é duplo-2 de G, então G^{xy} é cordal.

Prova: Por contradição: suponha que G^{xy} não é cordal. Então existe $\{c_1, \dots, c_k\} \subseteq V(G^{xy})$ que induz ciclo C_k, $k \geq 4$.

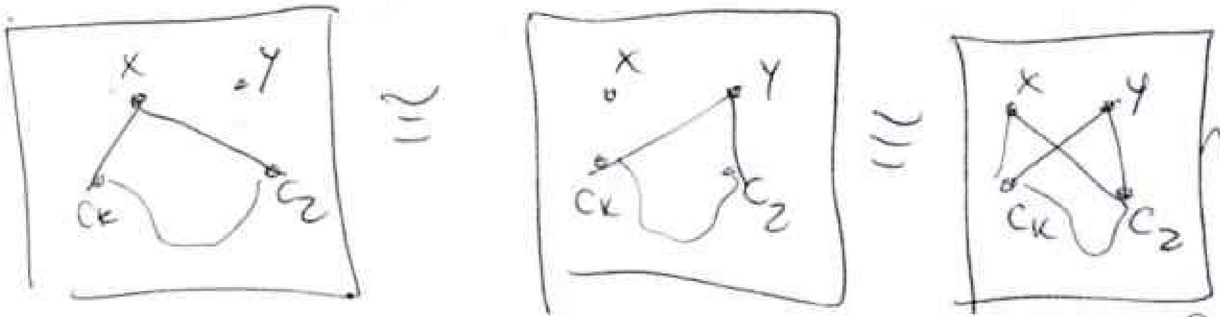
Se $(xy) \notin \{c_1, \dots, c_k\}$, então o ciclo é induzido em G, contradição pois G é cordal.

Se $xy = c_1$, sem perda de generalidade, então como $c_2, c_k \in N(c_1) = N(xy) = N_G(x) \cup N_G(y)$, podemos afirmar que x ou y tem de ser adjacentes a c_2 ou c_k.

Caso a caso, obtemos em G:



Caminho maior que 2, mas x e y é duplo-2, contradição.



Ciclos maiores que 4, mas G é cordal.

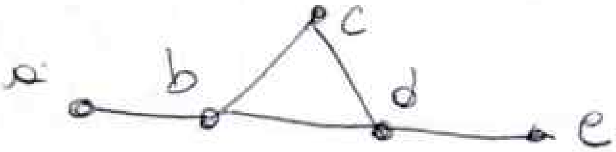
■

Logo, dado G cordal, polinomialmente procuramos x e y duplo-2 e obtemos G^{xy} cordal com x_1 e y_1 duplo-2 em $V(G^{xy})$. Polinomialmente obtemos $G^{x_1 y_1}$. Fazendo isto iteradamente, polinomialmente chegamos ao fim do processo, obtendo uma clique que dá a coloração ótima de G.

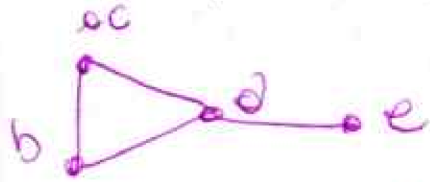
Para exemplificar, façamos o exercício 1 da aula 5.

Considere o grafo cordal da figura 4. Colora os vértices usando o algoritmo básico de contração, onde nas contrações de vértices, cada par de vértices contraídos define uma dupla-2.

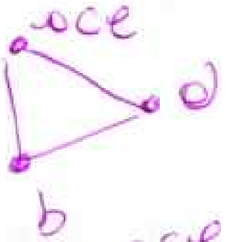
Figura 4.



→ $\{a, c\}$ é dupla 2, portanto G^{ac}:



→ $\{ac, e\}$ é dupla 2, ficamos com G^{ace}:



→ Colorimos $G^{ace} \cong K_3$ com 1, 2 e 3 e depois descontraímos os vértices, mantendo as cores