
Nota de aula - Edge Coloring of Cycle Powers is Easy - Aula 10

1 Resumo:

Este texto tem por objetivo descrever a aula de Coloração de Arestas em Potências de Ciclos, referente ao curso Tópicos Especiais em Teoria dos Grafos (2020), oferecido pelo programa de Engenharia de Sistemas e Computação PESC/COPPE - UFRJ e ministrado pela professora Celina de Figueiredo.

1.1 Problemas propostos:

Além de documentar o conteúdo abordado ao longo da aula, este documento se propõe a resolver as seguintes questões:

1. Considerando o método de decomposição, exiba uma coloração de arestas ótima para a potência de ciclo com $n = 24$, e $k = 6$. (p.6)
2. Considerando o método de decomposição, exiba uma coloração de arestas ótima para a potência de ciclo com $n = 24$, e $k = 8$. (p.8)

2 Introdução

Em linhas gerais, estabelecer uma coloração de arestas é um problema difícil. Apesar do teorema de Vizing garantir que a coloração ótima de um grafo simples G usa Δ ou $\Delta + 1$, decidir entre essas duas possibilidades é um problema NP -completo.

Os resultados clássicos de Teoria dos Grafos e coloração mostram que os ciclos e grafos completos são de Classe 1 quando têm um número par de vértices, e Classe 2 caso contrário. Como ciclos e grafos completos são casos especiais de potências de ciclo, é natural considerarmos estender os resultados clássicos a todas as potências de ciclo, ou seja, provarmos que uma condição necessária e suficiente para que uma potência de ciclo C seja um grafo de Classe 1 é que C tenha um número par de vértices.

2.1 Definições

Definição 1. *Seja $G = (V, E)$ um grafo com $|V| = n$ e $E = m$. Se $m > \Delta(G)\lfloor n/2 \rfloor$, então G é dito ser **sobrecarregado** [overfull]. Essencialmente, essa definição classifica grafos que tem um número de arestas superior em relação ao que uma coloração com Δ cores pode suportar.*

É fácil ver que grafos sobrecarregados são de classe 2, porque cada cor pode colorir no máximo $\lfloor n/2 \rfloor$ arestas em uma coloração válida.

Podemos notar que grafos completos com um número ímpar de vértices são sobrecarregados. A saber, se G é completo com n vértices, então $\Delta(G) = n - 1$, $m = \frac{n(n-1)}{2}$ e $\lfloor n/2 \rfloor = \frac{n-1}{2}$, pois n é ímpar. Portanto,

$$\frac{n(n-1)}{2} > n-1 \frac{n-1}{2} = \frac{(n-1)^2}{2} \implies m > \Delta(G) \lfloor n/2 \rfloor$$

De uma maneira um pouco mais geral, qualquer grafo regular com um número ímpar de vértices é sobrecarregado. A saber, nesse caso, temos $m = \frac{n\Delta}{2}$ e $\lfloor n/2 \rfloor = \frac{n-1}{2}$, pois n é ímpar. Portanto,

$$\frac{n\Delta}{2} > \Delta \frac{n-1}{2} \implies m > \Delta(G) \lfloor n/2 \rfloor$$

Fica provado que todo grafo regular (em particular completo) com número ímpar de vértices é Classe 2.

Definição 2. Considere dois grafos G e H com o mesmo conjunto de vértices V , definimos o **produto** destes dois grafos, $G \times H$, da seguinte forma:

$$V(G \times H) = V,$$

$$E(G \times H) = \{(u, v) \mid \exists w \in V((u, w) \in E(G) \text{ e } (w, v) \in E(H))\}$$

Definição 3. Definimos as potências de um grafo G recursivamente a partir do produto cartesiano, conforme segue:

$$G^1 = G,$$

$$G^k = G \times G^{k-1}, \text{ para } k \geq 2.$$

Em particular, quando G é um grafo ciclo C_n , sua k -ésima potência é um grafo simples apenas quando $1 \leq k < \frac{n}{2}$. A Figura 1 exibe as três primeiras potências do grafo ciclo C_6 .

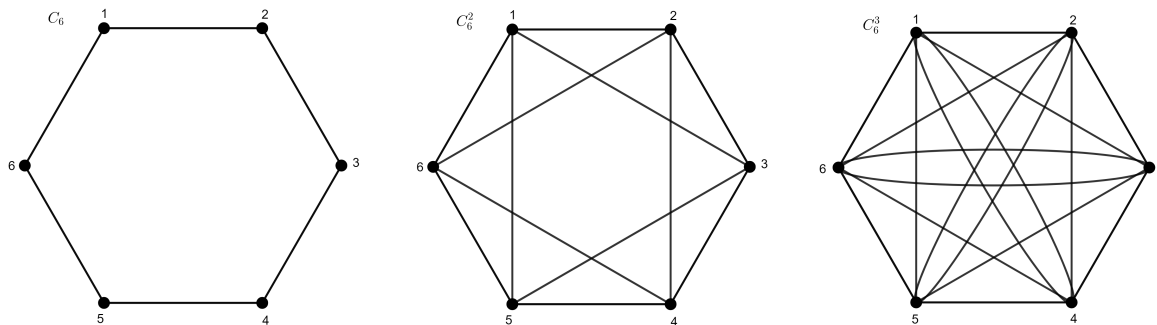


Figura 1: Ilustração feita no software Geogebra.

Observe que quando n é ímpar e $k = \frac{n-1}{2}$, C_n^k é um grafo completo (ver Figura 2). Caso n seja par, tecnicamente pode-se dizer que não existe um k tal que C_n^k é completo, pois $C_n^{n/2}$ não é um grafo simples, conforme podemos ver no grafo C_6^3 , exibido anteriormente na Figura 1.

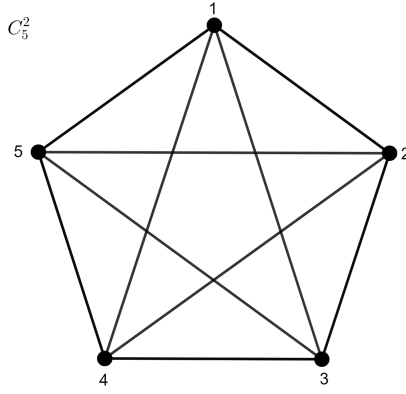


Figura 2: Grafo $C_5^2 \cong K_5$.
Ilustração feita no software Geogebra.

Pode-se notar, a partir da definição, que uma potência de ciclo C_n^k para $k \in \{1, \dots, n/2\}$ é um grafo regular e de grau par, uma vez que $\Delta(C_n^k) = 2k$.

3 Coloração de Potências de Ciclos

Como todo grafo regular com número ímpar de vértices é um grafo Classe 2, podemos subdividir essa classe em Potências de Ciclos Ímpares e Potências de Ciclos Pares para fazer uso desse resultado e analisar a coloração.

3.1 Potências de Ciclos ímpares são Grafos Sobrecarregados

Uma potência de ciclo C_n^k , com n ímpar, é um grafo sobrecarregado, assim como qualquer grafo regular de ordem ímpar.

Para verificar a validade dessa afirmação, note que:

$$m = \frac{n\Delta}{2} = \frac{n(2k)}{2} = nk,$$

para $0 \leq k < \frac{n}{2}$. Por outro lado,

$$m = \Delta \lfloor n/2 \rfloor = (2k) \frac{n-1}{2} = (n-1)k.$$

Portanto, pode-se concluir que $m > \Delta \lfloor n/2 \rfloor$ sempre que $k > 0$. Isso mostra que C_n^k é classe 2 quando n é ímpar.

Uma ideia para colorir potências de ciclo pares é aplicar o Teorema de Vizing, que sempre fornece uma coloração com $\Delta + 1$ cores. Nesse caso, a coloração é ótima, já que o grafo é Classe 2.

3.2 Potências de Ciclos Pares

3.2.1 Arestas de tamanho l são bicolores quando $\text{mdc}(l, n)$ é um número par

Seja n um inteiro par e k um inteiro positivo estritamente menor que $n/2$. Considere S_l o conjunto de arestas de tamanho l , definido da seguinte forma:

$$S_l = \{(x, x + l \pmod{n}) \mid 0 \leq x \leq n - 1\}.$$

Observação 1. Note que essa classe de conjuntos forma uma partição do conjunto de arestas do grafo C_n^k , isto é,

$$S_l \cap S_j = \emptyset, \text{ se } l \neq j,$$

$$E(C_n^k) = \bigcup_{i=1}^k S_i$$

Teorema 2. Para todo índice l tal que $l \geq k$, o subgrafo induzido $C_n^k[S_l]$ possui d componentes conexas, cada uma sendo um ciclo de comprimento $\frac{n}{d}$, onde $d = \text{mdc}(l, n)$.

Demonstração. Dois vértices x e y pertencem a uma mesma componente se e somente se existir um inteiro r tal que

$$y \equiv x + rl \pmod{n};$$

Em outras palavras, $d|(y-x)$. Portanto, dois vértices pertencem a uma mesma componente se e somente pertencem a mesma classe residual módulo d . O resultado do teorema é satisfeito porque há exatamente d classes residuais, e todas elas têm o mesmo tamanho. \square

Corolário 1. O grafo $C_n^k[S_l]$ é bicolorível sempre que $l \leq k < n/2$ e $\frac{n}{\text{mdc}(l, n)}$ é par.

3.2.2 Arestas de tamanhos l e $l-1$ formam um subgrafo quatro-colorível quando $\frac{n}{\text{mdc}(l, n)}$ é ímpar

Teorema 3. O grafo $C_n^k[S_l \cup S_{l-1}]$ é quatro-colorível quando $l \leq k < n/2$ e $\frac{n}{\text{mdc}(l, n)}$ é ímpar.

Demonstração. Seja d o $\text{mdc}(l, n)$. Se $\frac{n}{d}$ for ímpar, então d e l são necessariamente pares.

Pela Observação 1, sabemos que S_l é uma união disjunta de ciclos ímpares, enquanto S_{l-1} é uma união disjunta de ciclos pares. A estratégia por trás da demonstração desse teorema é baseada em realizar algumas trocas de S_l e S_{l-1} , com o objetivo de fundir os ciclos ímpares em pares, sem perturbar muito a coloração de S_{l-1} .

O conjunto S_{l-1} pode ser colorido com duas cores. Uma coloração adequada deste conjunto de arestas é a seguinte:

Pinte com uma cor todas as arestas incidentes a um vértice inicial rotulado por índice ímpar, e pinte com a outra cor as arestas restantes.

Note que essa coloração é válida, uma vez que $l-1$ é ímpar.

Seja C_1 o seguinte conjunto de arestas:

$$C_1 = \{(1, l), (l+1, 2l), (3, l+2), (l+3, 2l+2), \dots, (d-1, d+l-2), (d+l-1, d+2l-2)\}$$

Todas essas arestas possuem alcance $l-1$, pois têm a forma $(a, a+l-1)$ e, portanto, pertencem a S_{l-1} . Além disso, o vértice inicial a é ímpar para todas essas arestas, o que significa que todas serão coloridas com a mesma cor. Agora considere o conjunto C_2

$$C_2 = \{(1, l+1), (l, 2l), (3, l+3), (l+2, 2l+2), \dots, (d-1, d+l-1), (d+l-2, d+2l-2)\}$$

Essas arestas têm a forma $(b, b+l)$ e, portanto, pertencem a S_l . Vale ressaltar que as arestas de C_2 pertencem a ciclos distintos em S_l . De fato, duas arestas pertencem ao mesmo ciclo em S_l quando seus vértices incidentes iniciais a e b satisfazem $d|(b-a)$. Vamos repartir C_2 em dois conjuntos A e B , da seguinte forma:

$$A = \{(a, a+l) | 1 \leq ad-1 \text{ e } a \text{ é ímpar} \}$$

$$B = \{(b, b + l) | l \leq b \leq d + l - 2 \text{ e } b \text{ é par} \}$$

Duas arestas em A não podem estar no mesmo ciclo porque seus vértices incidentes iniciais pertencem a um intervalo de comprimento menor que d , o mesmo vale para duas arestas em B . Agora, se nós selecionarmos uma aresta de A e outra de B , a diferença entre seus vértices incidentes iniciais será ímpar e, portanto, não pode ser divisível por um número par assim como d .

Trocamos as arestas em C_1 e C_2 entre S_l e S_{l-1} . Mais precisamente, considere

$$S'_{l-1} = (S_{l-1} - C_1) \cup C_2,$$

$$S'_l = (S_l \cup C_1) - C_2.$$

Observe que $S'_{l-1} \cup S'_l = S_{l-1} \cup S_l$, porque apenas trocamos arestas entre os dois conjuntos.

Pode-se afirmar que S'_{l-1} é bicolorível. Na verdade, C_1 é um emparelhamento, porque todas suas arestas tiveram a mesma cor atribuída em S_{l-1} . Isso significa que os $2d$ vértices nas extremidades finais das arestas são todos distintos. Mas C_2 tem exatamente o mesmo conjunto de $2d$ vértices nas extremidades finais das arestas, portanto, é um emparelhamento também. Dessa forma, observe que podemos dar a cor que C_1 tinha ao C_2 e assim produzir uma coloração válida para S'_{l-1} . Na prática, a troca que fizemos consiste em substituir um emparelhamento por outro.

Além disso, pode-se afirmar que S'_l é também bicolorível. Isso se deve ao fato de que, com a troca, os d ciclos ímpares em S_l são agrupados em pares (observe que d é par) e os dois ciclos em cada par são mesclados para formar um ciclo par. Tome, por exemplo, as duas primeiras arestas de C_1 .

$$(1, 1), (l + 1, 2l)$$

e as duas primeiras arestas de C_2 ,

$$(1, l + 1), (l, 2l);$$

Com a troca, os ciclos em S_l que continham arestas $(1, l + 1)$ e $(l, 2l)$ tornam-se um único ciclo, mais longo e par. Uma fusão (*merge*) semelhante ocorre com outros ciclos em S_l . Dado que existem d ciclos e d arestas trocadas sem duas arestas no mesmo ciclo, todos os ciclos são fundidos pela troca e S_l é uma união disjunta de ciclos pares. Logo, é bicolorível. \square

Teorema 4. *O grafo C_n^k é Classe 1 para todo n par.*

Demonstração. Faremos indução em k .

Se $k = 1$ então $C_n^k = C_n$ que é Classe 1 para n pares.

Se $k > 1$ distinguimos dois casos de acordo com a paridade de n/d , onde $d = \text{mdc}(k, n)$.

1. Se $\frac{n}{d}$ for par, $C_n^k[S_k]$ é bicolorível. Por hipótese de indução, C_n^{k-1} é Classe 1. Além disso,

$$E(C_n^k) = E_1 \cup E_2, \text{ onde } E_1 = E(C_n^{k-1}) \text{ e } E_2 = S_k.$$

Como $\Delta(C_n^k[E_1]) = 2(k - 1) = 2k - 2$, $\Delta(C_n^k[E_2]) = 2$, e ambos os grafos induzidos são de Classe 1, temos que C_n^k é Classe 1.

2. Se $\frac{n}{d}$ for ímpar, concluímos que $C_n^k[S_k \cup S_{k-1}]$ é quatro-colorível. Por hipótese de indução, C_n^{k-2} é de Classe 1. Além disso,

$$E(C_n^k) = E_1 \cup E_2, \text{ onde } E_1 = E(C_n^{k-2}) \text{ e } E_2 = S_k \cup S_{k-1}.$$

Como $\Delta(C_n^k[E_1]) = 2(k - 2) = 2k - 4$, $\Delta(C_n^k[E_2]) = 4$, e ambos os subgrafos induzidos são de Classe 1, temos que C_n^k é Classe 1.

A Figura 3 ilustra as trocas em S_l .

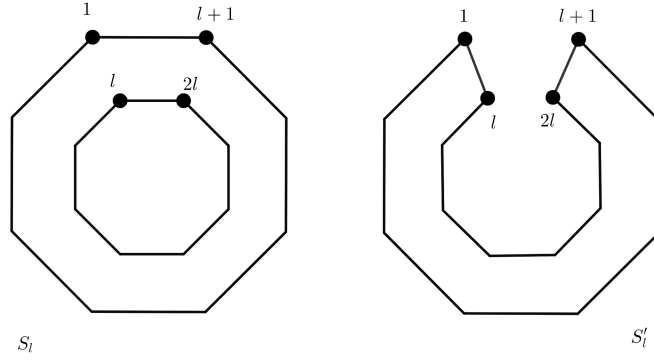


Figura 3: Ilustração feita no software Geogebra.

□

Ilustraremos os resultados obtidos neste texto a partir dos problemas propostos na Subseção 1.1. Exibiremos uma construção para uma coloração ótima do grafo C_{24}^6 .

Pelo Teorema 4, para obter uma coloração ótima podemos considerar um conjunto com $\Delta(C_{24}^6) = 12$ cores. Considere o conjunto C abaixo:

$$C = \{ \text{purple}, \text{green}, \text{orange}, \text{light purple}, \text{yellow}, \text{dark blue}, \text{cyan}, \text{red}, \text{grey}, \text{light yellow}, \text{dark red}, \text{dark green} \}$$

A partir da Observação 1, podemos analisar a coloração do grafo a partir dos subgrafos induzidos pelas partições dos conjuntos de arestas S_l , $l \in \{1, \dots, 6\}$. Pode-se notar que todos os subgrafos induzidos são bicoloríveis, pois satisfazem o Corolário 1. A saber,

$$C_{24}^6[S_1] \implies \frac{24}{\text{mdc}(1, 24)} = 24, \text{ que é par.}$$

$$C_{24}^6[S_2] \implies \frac{24}{\text{mdc}(2, 24)} = 12, \text{ que é par.}$$

$$C_{24}^6[S_3] \implies \frac{24}{\text{mdc}(3, 24)} = 8, \text{ que é par.}$$

$$C_{24}^6[S_4] \implies \frac{24}{\text{mdc}(4, 24)} = 6, \text{ que é par.}$$

$$C_{24}^6[S_5] \implies \frac{24}{\text{mdc}(5, 24)} = 24, \text{ que é par.}$$

$$C_{24}^6[S_6] \implies \frac{24}{\text{mdc}(6, 24)} = 4, \text{ que é par.}$$

Podemos colorir $C_{24}^6[S_1]$ com as duas primeiras cores de C , $C_{24}^6[S_2]$ com a terceira e quarta cores de C , e assim por diante. Em cada $C_{24}^6[S_l]$ iniciamos a coloração atribuindo à aresta incidente ao vértice 1 uma das cores pré selecionadas e prosseguimos a coloração alternando as duas cores entre arestas que compartilham o mesmo vértice. Abaixo exibiremos na a coloração dos subgrafos $C_{24}^6[S_1]$ e $C_{24}^6[S_2]$ Figura 4, a coloração dos subgrafos $C_{24}^6[S_3]$ e $C_{24}^6[S_4]$ na Figura 5 e por fim a coloração dos subgrafos $C_{24}^6[S_5]$ e $C_{24}^6[S_6]$ na Figura 6.

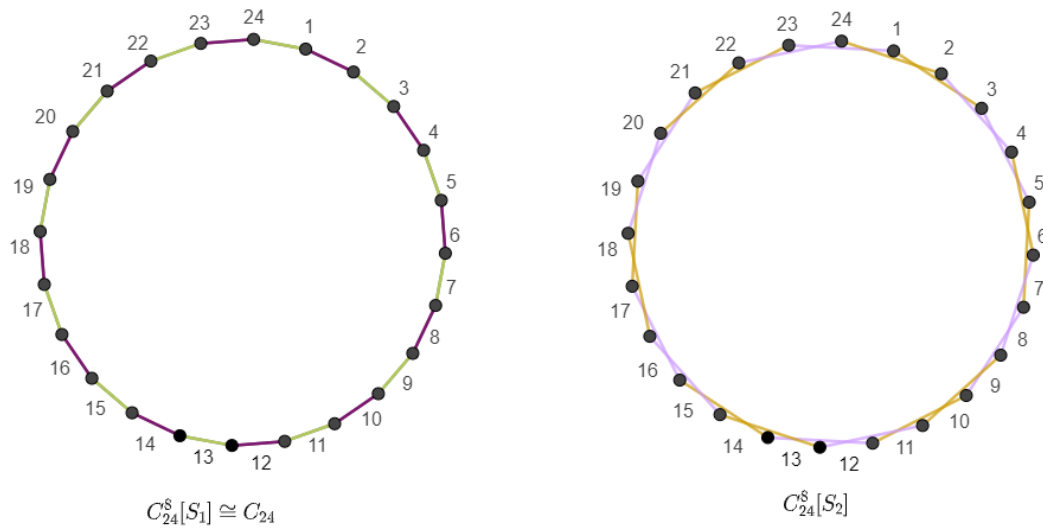


Figura 4: Ilustração feita no software Geogebra.

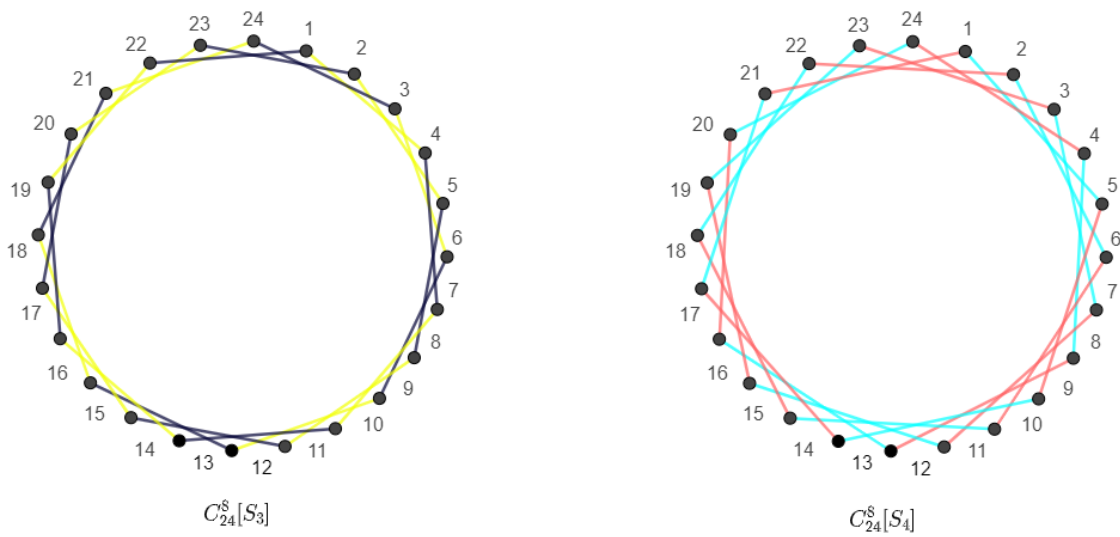


Figura 5: Ilustração feita no software Geogebra.

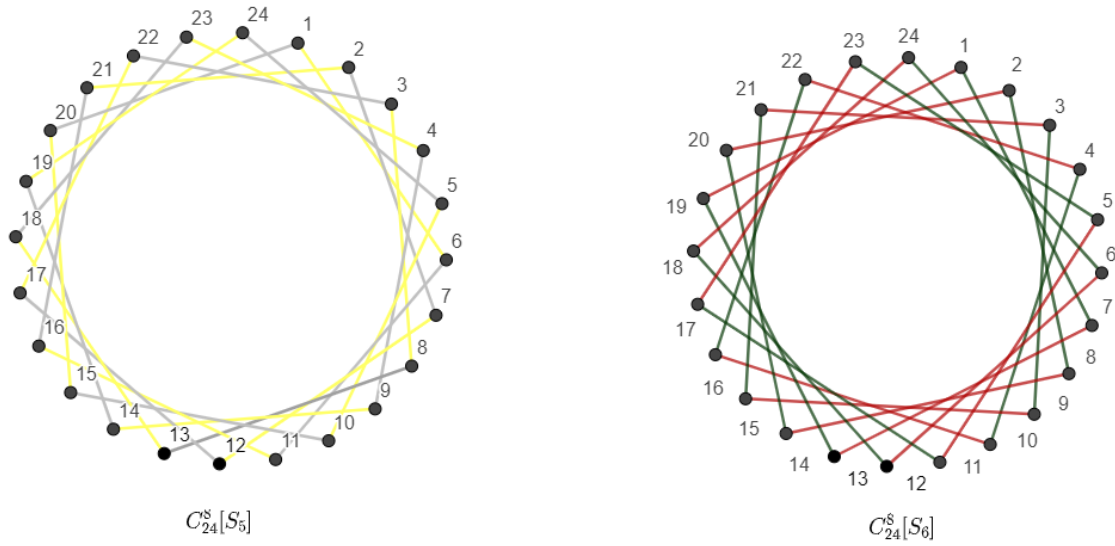


Figura 6: Ilustração feita no software Geogebra.

Dessa forma, obtivemos através do método de decomposição, uma coloração de arestas ótima utilizando o conjunto de cores C , confirmando que C_{24}^6 é Classe 1.

Para colorir de maneira ótima o grafo C_{24}^8 faremos novamente uso do Teorema 4 e do Corolário 1. Nesse caso considere o conjunto C abaixo, com $\Delta(C_{24}^8)$ 16 cores:

$$C = \{ \text{purple}, \text{light green}, \text{gold}, \text{light purple}, \text{yellow}, \text{dark blue}, \text{cyan}, \text{red}, \text{grey}, \text{yellow-green}, \text{dark red}, \text{dark green}, \text{orange}, \text{light blue}, \text{pink}, \text{dark green} \}$$

Ao analisarmos os subgrafos $C_{24}^8[S_l]$, $l \in \{1, \dots, 8\}$, podemos notar que os 6 primeiros subgrafos induzidos são exatamente os mesmos que foram utilizados na coloração de C_{24}^6 , portanto, herdamos essa coloração. Resta analisar a coloração dos subgrafos $C_{24}^8[S_7]$ e $C_{24}^8[S_8]$.

Note que $\text{mdc}(24, 8) = 8$ e $\frac{24}{\text{mdc}(24, 8)} = \frac{24}{8} = 3$, que é ímpar. Assim, pelo Teorema 3 podemos obter uma quatro coloração para o subgrafo induzido $C_{24}^8[S_7 \cup S_8] = C_{24}^8[S_7] \cup C_{24}^8[S_8]$. Para construir a coloração, construímos C_1 e C_2 exibidos na Figura 7:



$$C_1 = \{(1, 8), (3, 10), (5, 12), (7, 14), (9, 16), (11, 18), (13, 20), (15, 22)\}$$

$$C_2 = \{(1, 9), (3, 11), (5, 13), (7, 15), (8, 16), (10, 18), (12, 20), (14, 22)\}$$

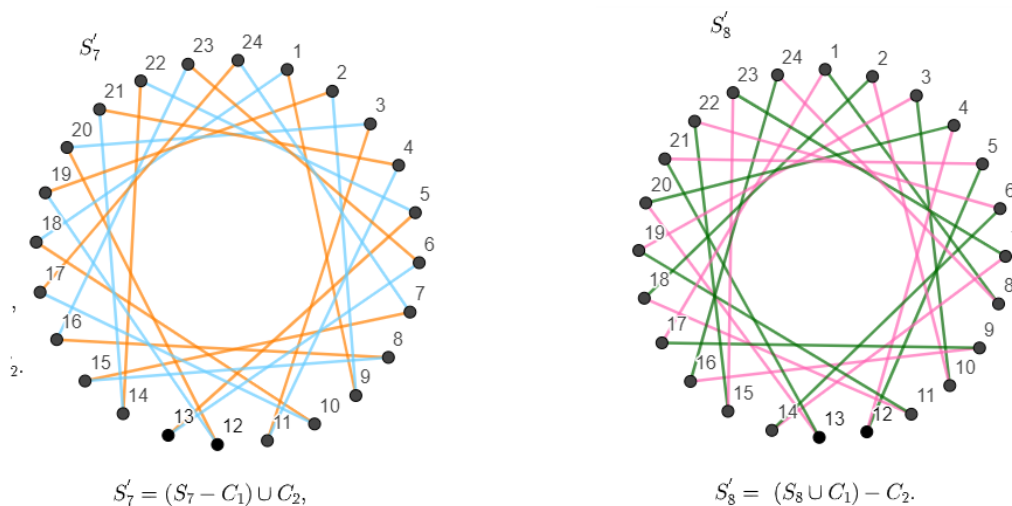
Figura 7: Ilustração feita no software Geogebra.

Agora definimos os conjuntos S'_7 e S'_8 , conforme descrito no Teorema 3, isto é, construímos S'_7 a partir do grafo S_7 e trocando as arestas de seu subconjunto próprio C_1 pelas arestas de C_2 , que possuem tamanho 8. De maneira, similar, obtemos S'_8 a partir do grafo S_8 , trocando as arestas de seu subconjunto próprio C_2 pelas arestas de C_1 .

Vale ressaltar que essa construção de S'_7 e S'_8 se mostra conveniente para obter a coloração de $S_7 \cup S_8$, uma vez que

$$S'_7 \cup S'_8 = (S_7 \setminus C_1 \cup C_2) \cup (S_8 \setminus C_2 \cup C_1) = S_7 \cup S_8.$$

A bicoloração de cada um desses grafos é exibida na Figura 8:



$$S'_7 = (S_7 - C_1) \cup C_2,$$

$$S'_8 = (S_8 \cup C_1) - C_2.$$

Figura 8: Ilustração feita no software Geogebra.

Dessa forma, obtivemos através do método de decomposição, uma coloração de arestas ótima utilizando o conjunto de cores C , confirmando que C_{24}^8 é Classe 1.

Referências

- [1] C.M.H. DE FIGUEIREDO, J. MEIDANIS, C. M. *Coloração em Grafos*. XVI Jornada de Atualização em Informática, 1997.
- [2] MEIDANIS, J. *Edge Coloring of Cycle Powers is Easy*. 1998.